1º.- a) Transforma la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ en otra equivalente B en que la submatriz formada por las tres primeras columnas sea una matriz triangular.

b) Aprovecha la transformación de la matriz A realizada en el apartado anterior para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ x-2y+z=0 \\ x+2y-3z=-4 \end{cases} \quad \text{(Método de Gauss)}$$

Solución:

a)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -32 & -96 \end{pmatrix}$$

b)

La transformación anterior significa que el sistema dado puede tomar la forma:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ x-2y+z=0 \\ x+2y-3z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ \quad -7y+3z=-5 \\ \qquad -32z=-96 \end{cases}$$ que lo tenemos escalonado en forma de Gauss, luego:

$$z=\frac{-96}{-32}=3 \Rightarrow -7y+3\cdot 3=-5 \Rightarrow y=2 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-1\cdot 3=5 \Rightarrow x=1$$

2º.- a) Encontrar, si existen, para qué valores de "x", la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x+1 & 2 & x-1 \\ x-1 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa

b) Encontrar la matriz inversa de A

Solución:

a)

La matriz no tiene inversa si su determinante se anula; como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x+1 & 2 & x-1 \\ x-1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=6$$, la matriz siempre tiene inversa, independientemente de lo que valga x

……………………………………………………………………………………………

b)

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} x+3 & -4x & 3-x \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[Adj(A)\right]^t=\begin{pmatrix} x+3 & 1 & -2 \\ -4x & 2 & 2 \\ 3-x & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz inversa es:

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} x+3 & 1 & -2 \\ -4x & 2 & 2 \\ 3-x & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x}{6}+\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2x}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3-x}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3º) Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$. Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3

b) Los números reales α y β para que los que se verifica $\left(I+A\right)^3=\alpha I+\beta A$

[Selectivo 2008-Valencia]

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 17\cdot 17-29\cdot 10 & 17\cdot 29-29\cdot 17 \\ -10\cdot 17+17\cdot 10 & -10\cdot 29+17\cdot 17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}=-1\cdot I\cdot\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}=-A$$

b)

$$\left(I+A\right)^3=I^3+3I^2A+3IA^2+A^3=I+3A+3A^2+A^3=I+3A-3I-A=2A-2I$$

Luego $\alpha=-2$ y $\beta=2$

4º.- Dado el sistema dependiente del parámetro real "a" $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar, razonadamente, los valores de "a" para los que el sistema es compatible determinado

b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado

[Selectivo 2008-Valencia]

……………………………………………………………………………………………

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 \quad \text{que se anula para } \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si $a = -2$ el sistema toma la forma:

$$\left.\begin{aligned} -2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= 1 \\ x + y - 2z &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Luego el sistema es incompatible

Si $a = 1$ el sistema toma la forma:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x + y + z = 1 \quad \text{obviamente compatible e indeterminado}$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$, el sistema es compatible y determinado

b)

Como hemos visto el sistema es compatible y determinado cuando $a \neq -2$ ó $a \neq 1$ y lo podemos resolver por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{a^3 - 3a^2 + 2} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^3 - 3a^2 + 2} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2 (a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2 (a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2 (a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2 (a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2 (a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

…………………………………………………………………………………………………

5º.-a) Dado los vectores $\vec{a} = xi - 3j + 2k$, $\vec{b} = i + j + xk$, encontrar el valor de "x" que hace que esos vectores sean perpendiculares

b) Encontrar un vector $\vec{c}$ que con los dos anteriores forme una base ortogonal para V^3

c) Encontrar el volumen de la figura cuyas aristas son los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$

d) Calcular el área total de la figura del apartado c)

Solución:

a)

Para que los dos vectores sean perpendiculares $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, luego:

$$\begin{pmatrix} x & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = x - 3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Luego los vectores $i - 3j + 2k$ y $i + j + k$ son perpendiculares

b)

El vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a los vectores dados, luego:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5i + j + 4k$$

c)

Al ser los tres vectores perpendiculares, la figura que delimitan es un prisma rectangular, luego su volumen es:

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right| = 42 \text{ unidades de volumen}$$

-Volumen que también podríamos haber calculado, en este caso, multiplicando los módulos de los tres vectores:

$$V = \left(\left\| [1, -3, 2] \right\| \right) \left(\left\| [1,1,1] \right\| \right) \left(\left\| [, -5, 1, 4] \right\| \right) = \sqrt{14}\sqrt{3}\sqrt{42} = 42 \text{ unidades de volumen}$$

d)

El área total es la suma del área de sus caras que son seis rectángulos iguales dos a dos.

$$A_{total} = 2\left[\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} \right| \right] = 2\left[\left| [-5,1,4] \right| + \left| [-14,-14,-14] \right| + \left| [3,-9,6] \right| \right] =$$

$$= 2\left(\sqrt{42} + 14\sqrt{3} + 3\sqrt{14} \right) \cong 83.9 \text{ unidades de área}$$