1º.-Dado el sistema: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+3y+2z=3 \\ 2x+2y+z=a \end{cases}$, estudiar su compatibilidad en función del parámetro "a" y resolverlo en el caso de compatible indeterminado (pau. País Vasco)

Solución:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+3y+2z=3 \\ 2x+2y+z=a \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}}_{B}$$

$$Ran(A) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a-3 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \text{si } a=3, \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Ran(A)=2 \\ \text{si } a \neq 3 \Rightarrow Ran(A)=3 \end{array} \right.$$

Si $a \neq 3$, el sistema es compatible y determinado

Si $a=3$, $Ran(A)=2$ y $Ran(AB) = Ran\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ran\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Luego el sistema es compatible e indeterminado; cuya soluciones:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 3x+3y+2z=3 \\ 2x+2y+z=3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=-y \\ 2x+z=3-2y \end{cases}$$

Y aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -y & 1 \\ 3-2y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 3-y \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y \\ 2 & 3-2y \end{vmatrix}}{-1} = -3$$

2º.-Sean la recta $r: \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases}$

a) ¿Qué ángulo forman los planos que definen la recta r

b) Determinar la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y no corta a ninguno de los dos planos que determinan la recta

c) Encontrar el punto que pertenece a la recta r y equidista de los puntos $A(1,2,3)$ y $B(2,1,0)$

Solución:

a)

$$\cos\alpha = \frac{\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}\right\|} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \alpha = ar\cos\left(\frac{-1}{3}\right) \simeq 109,47^{\circ}$$

b)

Es fácil ver que el punto A no pertenece a ninguno de los dos planos que definen la recta r, luego la recta buscada que pasa por A debe ser paralela a la recta r, es decir debe contener el vector:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 2\end{bmatrix}, \text{ paralelo a } \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Por lo que la recta buscada es : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$

c)

Si escribimos la recta r en forma paramétrica: $r:\begin{cases} x = 1 \\ y = 1+\mu \\ z = \mu \end{cases}$,cualquier punto de la recta r tiene la forma: $(1,1+\mu,\mu)$, luego el punto buscado debe cumplir:

$$d_{r,A} = d_{r,B} \Rightarrow \sqrt{(1-1)^2+(1+\eta-2)^2+(\eta-3)^2} = \sqrt{(2-1)^2+(1-1-\eta)^2+(0-\eta)^2}$$

Que resolviendo obtenemos: $\eta = \frac{9}{8}$, por lo que el punto buscado es : $\left(1,\frac{17}{8},\frac{9}{8}\right)$

3º.-Sean las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ y $g(x) = x^2 - 1$. Encontrar:

a) las ecuaciones de las asíntotas de la función $h(x)$, definida como $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Elige entre b1) o b2) o ambas:

b1) calcula $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$

b2) calcula $\int x\, ar\tan(x)\; dx$

Solución.

a) Se trata de encontrar las asíntotas de $h(x)=\dfrac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2-1}$

- No tiene asíntotas horizontales pues: $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\infty$
- Asíntotas verticales:

  En $x=1$ pues $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=\infty$

  y en $x=-1$, ya que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\infty$
- Asíntota oblicua de la forma $y=mx+n$

  $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[h(x)-x\right]=-3$

Luego $y=x-3$ es una asíntota oblicua.

b1)

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\frac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2-1}dx=\int\left[x-3-\frac{6}{x+1}+\frac{3}{x-1}\right]dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-3x-6\ln|x+1|+3\ln|x-1|+k$$

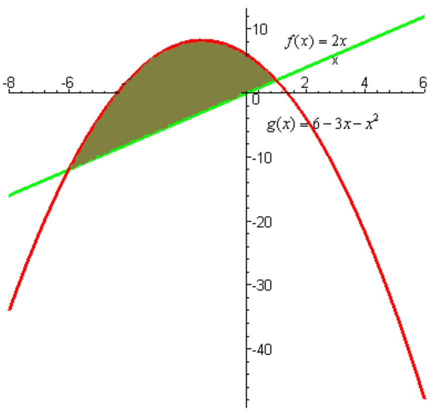
b2)

$$\int\underbrace{x\;ar\tan(x)\;dx}_{\left\{\begin{array}{l} u=ar\tan x \to du=\frac{1}{1+x^2} \\ dv=xdx \to v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}\nearrow}=\frac{x^2}{2}ar\tan x-\int\frac{\frac{1}{2}x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}ar\tan x-\frac{1}{2}\int\left[1-\frac{1}{1+x^2}\right]dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}ar\tan x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}ar\tan x+k=k-\frac{x}{2}+\left(\frac{1+x^2}{x}\right)ar\tan x$$

4º.-Calcular el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=2x$ y $g(x)=6-3x-x^2$ (pau. Navarra)

Solución:



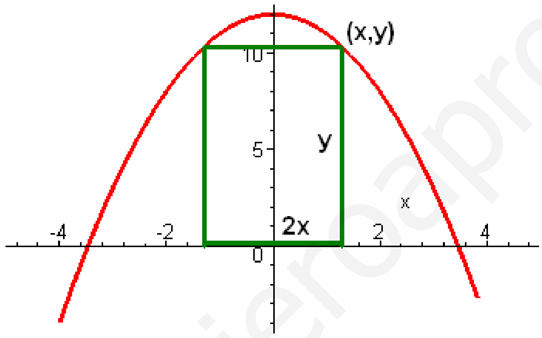
Cortes de la recta $f(x)=2x$ con $f(x)=6-3x-x^2$

$$2x=6-3x-x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ x=1 \end{cases}, \text{ luego:}$$

$$A=\int_{-6}^{1}\left[6-3x-x^2-2x\right]dx=\frac{343}{6} \text{ uni. de área}$$

5º.-Hallar las dimensiones del cartel rectangular de área máxima cuyos dos vértices superiores se sujetan a una estructura metálica rígida en forma parabólica de ecuación $y=12-x^2$ y los vértices inferiores están sujetos en el eje 0X. (pau.Valencia)

Solución:



Sean $2x$ e y las dimensiones del cartel; entonces la función a maximizar es:

$$f(x)=2xy=2x(12-x^2)=24x-2x^3$$

$f'(x)=24-6x^2$ que se anula para $\begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$; como $f''(x)=-12x$; $f(2)<0$, luego para dicho valor de x hay un máximo; por lo que las dimensiones del cartel serán:

$$\left(4,12-2^2\right)=4 \text{ unidades de longitud de largo por 8 de alto}$$