1.- Dada la matriz $B(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, calcular:

a) El determinante de la matriz $2B(x)$

b) Para qué valor de $"x"$ la matriz $B(x)$ no tiene inversa

c) Calcular por determinantes la matriz inversa de $B(1)$

Solución:

a) a1)Directamente:

$$|B(x)|=\begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix}=6x$$

Luego $|2B(x)|=2^3 \cdot 6x=48x$

a2) Descomponiendo el determinante:

$$|B(x)|=\begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2x & 3 & 6 \\ 4x & 2 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}=6x\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}+0=6x$$

Luego $|2B(x)|=2^3 \cdot 6x=48x$

b) $B(x)$ no tiene inversa si $|B(x)|=0$; es decir $x=0$

c) $$B(1)=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 6 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}\Rightarrow |B(x)|=6$$

$$\left[Adj(B(1))\right]^T=\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 18 & -30 & 12 \\ -14 & 26 & -11 \end{pmatrix}\text{, de donde } B^{-1}(1)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ \frac{-7}{3} & \frac{13}{3} & \frac{-11}{6} \end{pmatrix}$$

2º.- Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+ay+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ ax+y+z=9 \end{cases}$, se pide:

a) Probar que es siempre compatible, obteniendo los valores de $"a"$ para los que es indeterminado.

b) Resolver el sistema anterior para $a=1$

……………………………………………………………………………………………

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 8a + 7 \text{ que se anula para } \begin{cases} a = 1 \\ a = 7 \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 7$ el sistema es <u>compatible</u> y determinado porque el rango de la matriz de coeficientes es 3, igual que el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.

Si $a = 1$ el sistema toma la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 3x + 5y + z = 9 \\ x + y + z = 9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 9 \\ 3x + 5y + z = 9 \end{cases}$$ obviamente <u>compatible</u> e indeterminado

Si $a = 7$, el sistema toma la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}}_{B}$$; donde $Ran(A) = 2$ y $Ran(AB) = 2$ ya que todos los determinantes $3x3$ que se pueden formar o tiene dos columnas proporcionales o coinciden con el de la matriz de coeficientes.

Luego el sistema también es <u>compatible</u> e indeterminado

b) Para $a = 1$, hemos visto que el sistema toma la forma.

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 3x + 5y + z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9 - z \\ 3x + 5y = 9 - z \end{cases}$$ que podemos resolver fácilmente:

$$x = \frac{(9-z)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = 18 - 2z \quad ; \quad y = \frac{(9-z)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{2} = z - 9$$

3º.- Estudiar y resolver , en función del parámetro "m" el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} (m+1)x + y + z = 0 \\ x + (m+1)y - z = 0 \\ x - y + (m+1)z = 0 \end{array}\right\}$$

……………………………………………………………………………………………

Solución:

$$\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & -1 \\ 1 & -1 & m+1 \end{vmatrix} = m^3+3m^2-4 \text{ que se anula para } \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$$

Si $m \neq 1$ ó $m \neq -2$ el sistema es compatible y determinado con solución:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Si $m=-2$, el sistema toma la forma:

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x-y-z=0 \text{; compatible indeterminado con solución:}$$

$$x=y+z \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \quad \text{donde } \alpha \text{ y } \beta \text{ son parámetros}$$

Si $m=1$, el sistema toma la forma:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ x-y+2z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=-z \\ x+2y=z \end{cases} \text{, de fácil solución:}$$

$$\begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ un parámetro}$$

4º.-

a) Encontrar el valor de "x" para que los vectores $\vec{a}=[x,2,1]$ y $\vec{b}=[1,2,x]$ sean ortogonales

b) Una vez encontrado el valor de "x" que hace que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares, encontrar un tercer vector $\vec{c}$ que con los dos anteriores forme un base ortogonal de V^3

c) Encontrar las coordenadas del vector $\vec{d}=[4,11,4]$ en dicha base.

d) Tomando como referencia el sistema ortogonal formado por los vectores $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$, ¿cuál sería el volumen del paralelepípedo que tuviese como diagonal el vector $\vec{d}$

Solución:

a)

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$, luego $\begin{pmatrix} x & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\x\end{pmatrix}=x+4+x=0\Rightarrow x=-2$

b) Un vector normal a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el vector $\vec{a}\times\vec{b}$, luego podemos tomar $\vec{c}$ como.

$$\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=[-6.-3,-6]\Leftrightarrow[2,1,2]$$

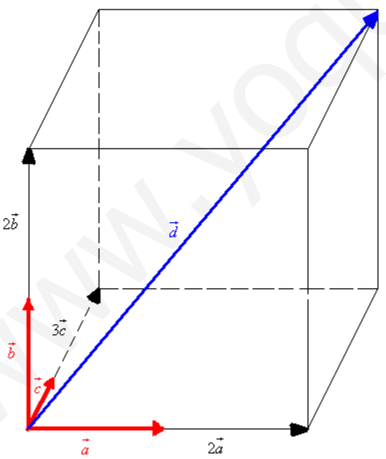
Luego $\{[-2,2,1],[1,2,-2],[2,1,2]\}$ es una base de V^3

c) En esa base, las coordenadas del vector $[4,11,4]$ son $[a,b,c]$ que podemos calcular:

$$[4,11,4]=a[-2,2,1]+b[1,2,-2]+c[2,1,2]\Rightarrow\begin{cases}4=-2a+b+2c\\11=2a+2b+c\\4=a-2b+2c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\\c=3\end{cases}$$

Luego las coordenadas del vector $\vec{d}$ en la base anterior son $[2,2,3]$

d) Dado que el vector $\vec{d}$ se obtiene como suma de 2 veces el vector $\vec{a}$, 2 veces el vector $\vec{b}$ y 3 veces el vector $\vec{c}$, el volumen del paralelepípedo que tiene por diagonal el vector $\vec{d}$, es:



$$V=\left|\begin{vmatrix}-4 & 4 & 2\\ 2 & 4 & -4\\ 6 & 3 & 6\end{vmatrix}\right|=324 \text{ unidades de volumen}$$