1º.-Dado el sistema de ecuaciones con las incógnitas x, y, z $\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ x-2y+2z=\lambda \end{array}\right\}$ se pide:

a) Determinar razonadamente el valor de λ para que el sistema sea compatible
b) Solucionar el sistema para ese valor de λ
c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de λ

Solución:

a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}}_{B}$$

$$Ran(A)=2, \text{ pues } \left\{\begin{array}{l} \det(A)=0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right.$$

Para que el sistema sea compatible $Ran(AB)=2$, luego:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow 2-\lambda=3 \Rightarrow \lambda=-1$$

b)

Para $\lambda=-1$ el sistema toma la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ x-2y+2z=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=2+z \\ 2x-y=1-z \end{array}\right\} \text{ que podemos solucionar por Cramer:}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2+z & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=1 \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{-3}=1+z$$

c) Si $\lambda=-1$ el sistema es compatible e indeterminado, dependiendo de un parámetro; por ello los tres planos se cortan en una recta, siendo dos de ellos coincidentes y el otro secante , o bien, tres planos distintos que se cortan en una recta. Dado que los tres vectores normales son distintos, estamos en este último caso

Si $\lambda \neq -1$ el sistema es incompatible, por lo que los tres planos no tienen ningún punto en común; luego los plano se cortan dos a dos o dos de los planos son paralelos y el tercero es secante a ellos. Dado que no hay vectores normales, estamos en el primer caso: los planos se cortan dos a dos.

2º.-Dados los puntos $\begin{cases} A=(4,-4,9) \;\; ; \;\; B=(2,0,5) \;\; \text{C=(4,2,6)} \\ L=(1,1,4) \;\; ; \;\; \text{M=(0,2,3) ; y } \; N=(3,0,5) \end{cases}$, se pide:

a) Calcular la distancia del punto C al punto medio del segmento de extremos A,B y el área del triángulo de vértices A,B,C

b) Las ecuaciones generales del plano π_1 que contiene a los puntos A,B,C y del plano π_2 que contiene los puntos L,M,N

c) Encontrar la ecuación paramétrica de la recta r intersección de los planos π_1 y π_2 y el ángulo que forman dichos planos

Solución:

a)

Sea P el punto medio de $\overline{AB}$, entonces $P=(3,-2,7)$, luego:

$$d_{CP}=\sqrt{1^2+4^2(-1)^2}=\sqrt{18} \text{ uni. de lon.}$$

$$A=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|[-12,6,12]\right|=9 \text{ uni. de área}$$

b)

$$\pi_1 :: \begin{vmatrix} x-4 & y+4 & z-9 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2x-y-2z+6=0$$

$$\pi_2 :: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y+z-5=0$$

c)

$$r :: \begin{cases} 2x-y-2z=-6 \\ y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=[1,-2,2] \text{ vector director} \\ x=0 \begin{cases} -y-2z=-6 \\ y+z=5 \end{cases} \Rightarrow (0,4,1) \text{ Punto de la recta} \end{cases}$$

de donde la ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=4-2\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

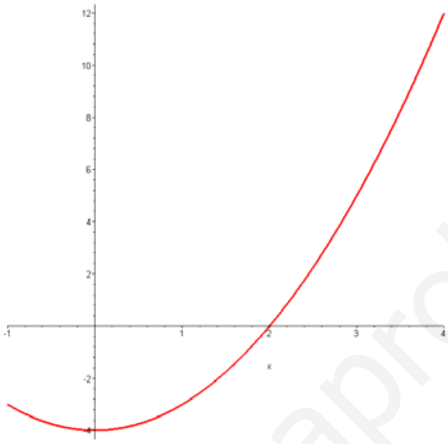
3º.- a) Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \le x \le 4$

b) Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-1, 4]$

c) Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = |x^2 - 1|$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$

Solución:

a)



b)

$$f(x) = |x^2 - 4| \text{ para } x \in [-1, 4] = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{para } x \in [-1, 2] \\ x^2 - 4 & \text{para } x \in [2, 4] \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{para } x \in [-1, 2) \\ 2x & \text{para } x \in (2, 4] \end{cases}$$

la función derivada se anula para $x = 0$ y tiene concavidad negativa ,($f''(x) = -2$), luego en dicho punto hay un mínimo relativo. Ahora bien, por tratarse de una función limitada debemos estudiar los puntos extremos $x = -1$, $x = 2$ y $x = 4$

En $x = -1$, $f(-1) = 5$
En $x = 2$, $f(2) = 0$
En $x = 4$, $f(4) = 12$

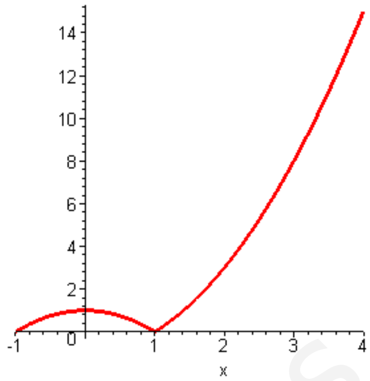
Luego dicha función tiene un mínimo absoluto en $x = 2$ y un máximo absoluto en $x = 4$

c)

$$f(x) = |x^2 - 1| \; si \; x \in [-1,4] \Rightarrow \begin{cases} -x^2+1 \text{ si } x \in [-1,1] \\ x^2+1 \text{ si } x \in [1,4] \end{cases}$$

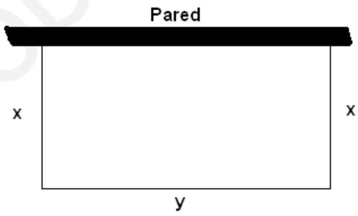
Luego:

$$A = \int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx + \int_{1}^{4} (x^2-1)dx = \frac{4}{3} + 18 = \frac{53}{3} \text{ uni. de á}$$



4º.- Un pastor dispone de 500 metros de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una parad ya existente. Halla las dimensiones del cercado para que el área encerrada sea máxima.

Solución:



$$500 = 2x + y \Rightarrow y = 500 - 2x$$

$$Área = f(x) = x \cdot y = x(500-2x) = 500x - 2x^2$$

$$f'(x) = 500 - 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 125$$

dado que $f''(x) < 0 \Rightarrow$ en x=125 hay un máximo

Luego las dimensiones que dan un área máxima son 250 m x 125 m