1º.- Una matriz A es tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) ¿Cuál es la matriz A?
b) Calcular la matriz fila X_{1x3} que cumpla $XA^2 = BA^3$, siendo $B_{1x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:
a)
De la identidad $A \cdot A^2 = A^3$ obtenemos $A = A^3 \cdot A^{-2} = A^3 \cdot (A^2)^{-1}$

Como $\left(A^2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Sea $X_{1x3} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, entonces

$$X = B \cdot A^3 \cdot A^{-2} = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2º.- Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \to f_1 \\ f_2 - f_1 \to f_1 \\ f_3 \to f_3 \\ f_4 - f_1 \to f_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

…………………………………………………………………………………………………

3º.- Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda+2)x-y+z=0\\ 3x+(\lambda+6)y-3z=0\\ 5x+5y+(\lambda-2)=0\end{array}\right\}$$

a) Calcular para qué valor de λ el sistema tiene solamente la solución $(x,y,z)=(0,0,0)$

b) Obtener las soluciones para todos los valores de λ que hacen el sistema indeterminado.

Solución:

a) El sistema toma la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\ 3 & \lambda+6 & -3\\ 5 & 5 & \lambda-2\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}_{B}$$

y es compatible y determinado cuando $Ran(A)=3$, es decir si:

$$\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\ 3 & \lambda+6 & -3\\ 5 & 5 & \lambda-2\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow \lambda^3+6\lambda^2+9\lambda=\lambda\left(\lambda+3\right)^2\neq 0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}\lambda\neq 0\\ ó\\ \lambda\neq -3\end{array}\right.$$

b) El sistema es indeterminado si $\left\langle\begin{array}{l}\lambda=0\\ ó\\ \lambda=-3\end{array}\right.$

Si $\lambda=0$ el sistema toma la foma:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 6 & -3\\ 5 & 5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$ en el que $Ran(A)=2$, por lo que es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{l}2x-y=-z\\ 3x+6y=3z\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{-z}{5}\\ y=\dfrac{3x}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{5}t\\ y=\dfrac{3}{5}t\\ z=t\end{array}\right.$$

Si $\lambda=-3$ el sistema toma la forma:

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 3 & 3 & -3\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$ en el que $Rna(A)=1$. , por lo que es equivalente a:

$$x+y=z \Rightarrow \begin{cases} x=-\lambda+\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$$

4º.-a) Dado $\vec{a}=2i+j-2k$, encontrar "x" para que el vector $\vec{b}=xi+2j+k$ sea ortogonal al vector $\vec{a}$

b) Encontrar el vector proyección de $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{a}+\vec{b}$

c) Encontrar un tercer vector $\vec{c}$ que con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formen un base ortogonal en V^3

d) Cuánto mide el volumen del prisma que tiene por aristas los vectores $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$

Solución:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, luego

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=2x+2-2=2x=0 \Rightarrow x=0$$

b) $\vec{a}+\vec{b}=(2,3,-1)$, luego el módulo del vector proyección de $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{a}+\vec{b}$ es $\left|\overrightarrow{P_{\vec{a}\text{ sobre }(\vec{a}+\vec{b})}}\right|=\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{\left|(\vec{a}+\vec{b})\right|}=\dfrac{(2,1,-2)\cdot(2,3,-1)}{\sqrt{14}}=\dfrac{9}{\sqrt{14}}$ unidades

y el vector unitario en la dirección del vector $(\vec{a}+\vec{b})$ es $\left(\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{-1}{\sqrt{14}}\right)$

luego el vector buscado es:

$$\overrightarrow{P_{\vec{a}\text{ sobre }(\vec{a}+\vec{b})}}=\frac{9}{\sqrt{14}}\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)=\left(\frac{9}{7},\frac{27}{14},\frac{-9}{14}\right)$$

c) Es fácil ver que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes, y además son ortogonales. Para encontrar una base ortogonal en V^3 bastará encontrar un vector que sea perpendicular a ambos, es decir:

$$\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5i-2j+4k=(5,-2,4)$$

también podríamos haber empleado el vector $-\vec{c}$

d) El volumen del paralelepípedo que tiene por arista a los tres vectores es:

$$V=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}=45 \text{ unidades de volumen}$$

Dicho volumen coincide con el producto de los módulos de los tres vectores ¿Por qué?