1º.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=2 \\ x-3y+z=10 \\ x+y+az=-2 \end{array}\right\}$$

a) determinar razonadamente para qué valores de "a" el sistema es compatible determinado.

b) Estudiar razonadamente si hay algún valor de "a" para el que el sistema sea compatible indeterminado

c) Encontrar la s solución del sistema cuando $a=3$

Solución:

a)

Dado que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 7a-5$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12$, el sistema es compatible y determinado para todo $a \neq \dfrac{5}{7}$, dedo que en este caso el rangote la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada coinciden (compatibilidad) y su valor es 3 que es el número de incógnitas.

b) El sistema no puede ser nunca compatible e indeterminado pues el rango de la matriz ampliada siempre es 3 , independientemente del valor de "a"

c)

Para $a=3$ el sistema toma la forma:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=2 \\ x-3y+z=10 \\ x+y+3z=-2 \end{array}\right\}$$ que como hemos visto en el apartado a) es compatible determinado.

Para solucionarlo aplicamos la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 10 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12}{-26} = \frac{-6}{13} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{-56}{-26} = \frac{28}{13}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{-36}{13}$$

2º.- a) Escribir la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(0,1,1)$, $B(-3,0,1)$ y $C(-2,2,2)$

b) Escribir la ecuación de la rectas que pasan por el punto $D(0,2,2)$ y por los puntos $E(a,0,0)$, siendo a cualquier número

c) ¿Qué valor debe tomar a para que la recta y el plano sean paralelos.

Solución:

a) La ecuación del plano buscado es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & 3 & -2 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+3y+5z-8=0$$

b) el vector $\overrightarrow{ED}=[a,2,2]$ es director de la recta, luego:

$$\begin{cases} x = a\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}$$

es la ecuación de todas las rectas buscadas.

c) de todas estas rectas encontradas, aquellas que es paralela al plano debe cumplir:

$$[1,3,5]\cdot[a,2,2]=0 \Leftrightarrow a+16=0 \Rightarrow a=-16$$

3º.-Hallar las constantes a y b para que $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\text{x+a}}{\text{x+1}} & \text{si } x>0 \\ b & \text{si } x=0 \\ \dfrac{sen2x}{x} & \text{si } x<0 \end{cases}$

Sea una función continua para todo valor real

Solución:

La función es continua dentro de cada rama independientemente de los valores que tomen a y b. Para que lo sea en los puntos de salto:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = b = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+a}{x+1} = a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{sen2x}{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow b = a = 2$$

Luego la función es siempre continua cuando a y b valen 2

4º.- La concentración en sangre de un fármaco después de su toma es $C(t) = 0,29483t + 0,04253t^2 - 0,00035t^3 \ \ mg/ml$, donde t es el tiempo transcurrido en minutos. Se pide:

a) Calcular el periodo de tiempo durante el cuál el fármaco actúa

b) Determinar en qué instante la concentración del fármaco es máxima

(selectividad junio-05)

Solución:

a) El fármaco actúa durante el tiempo en que hay concentración del mismo en la sangre, lo que podemos traducir como
$C(t) = 0,29483t + 0,04253t^2 - 0,00035t^3 \geq 0$

que es positiva en el intervalo $[0,128]$, luego se espera que el fármaco actúa durante 128 minutos aproximadamente.

b) $C'(t) = 0,29483 + 0.08506t - 0.00105t^2$

que igualando a cero y resolviendo: $\begin{cases} t \cong -3.33 \\ t \cong 84,34 \end{cases}$

$$C''(t) = 0,0856t - 0,0021t \Rightarrow \begin{cases} C''(-3,33) > 0 \\ C''(84,34) < 0 \end{cases}$$

Luego en el instante $t = 84,34$ minutos se produce la concentración máxima

---

5º.- Calcular el área limitada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y = 4x + 1 - x^2$

Solución:

Las curvas se cortan en

$$x^2 + 1 = 4x + 1 - x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Luego el área buscas es:

$$S = \int_0^2 \ (4x + 1 - x^2 - 1 - x^2)dx = \frac{8}{3} \text{ u.de a.}$$