

1°.-Calcular la matriz X que cumple:

$$2X + B = AX$$

siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

$$B = AX - 2IX = (A - 2I)X \quad \text{de donde} \quad X = (A - 2I)^{-1}B, \text{ es decir:}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & -1 \\ \frac{-1}{5} & -1 \end{pmatrix}$$

2°.- Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Desarrollando los determinantes:

$$-24 + x^2 = 4x + x^2 \Rightarrow x = -6$$

3°.- Discutir el siguiente sistema, en función de " m ", y resolverlo en el caso en que $m = 0$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + (m+1)y + (m-1)z = 0 \\ mx - (m-1)y - z = 0 \\ y - (m+1)z = 0 \end{array} \right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & m+1 & m-1 \\ m & -m+1 & -1 \\ 0 & 1 & -m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por tratarse de un sistema homogéneo es compatible.

$$\text{Estudiamos le } Rang(A) \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & m+1 & m-1 \\ m & -m+1 & -1 \\ 0 & 1 & -m-1 \end{vmatrix} = 5m^2 + m^3, \text{ que se anula pata } \begin{cases} m = 0 \\ m = -5 \end{cases}$$

Si $m \neq -5$ o $m \neq 0$ El sistema es compatible y determinado, con solución $\{0,0,0\}$

Si $m = -5$ El sistema toma la forma:

$$\begin{cases} 2x - 4y - 6z = 0 \\ -5x - 6y - z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{Compatible e indeterminado pues } \text{Rang}(A) = 2$$

Si $m = 0$ El sistema toma la forma:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{Sistema compatible e indeterminado}$$

En Este caso el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

4°.-Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ -4x + 8y = -4 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

$$\text{Rang}(AB) \Rightarrow \text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(AB) = 1 = \text{Rang}(A) = 1, \text{ se}$$

trata de un sistema compatible e indeterminado equivalente a $3x - 6y = 3$, cuya solución

es : $x = 1 + 2y \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

5°.-Dado los dos vectores $\vec{a} = 2i + 3j - k$ y $\vec{b} = -i + j + 2k$,

a) comprobar que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de vectores en V^3 , si:

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{v} = \vec{a} - \vec{b} \quad \text{y} \quad \vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$$

b) encontrar las coordenadas del vector $i + j + k$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

Solución:

a)

$$\vec{u} = [1, 4, 1] \quad , \quad \vec{v} = [3, 2, -3] \quad \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [7, -3, 5]$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, los tres vectores son linealmente independientes, luego

pueden ser una base para V^3

b)

Si $[x, y, z]$ son las coordenadas de $[1, 1, 1]$ en $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, debe cumplirse:

$$[1, 1, 1] = x[1, 4, 1] + y[3, 2, -3] + z[7, -3, 5]$$

que resolviendo obtenemos: $[x, y, z] = \left[\frac{8}{47}, \frac{12}{47}, \frac{3}{47} \right]$

6°. -Un triángulo tiene por lados los segmentos que contiene los vectores \vec{a} y \vec{b} del ejercicio 5°, y de longitud, respectivamente, el módulo de ellos: Calcular:

- a) la longitud del otro lado
- b) al área del triángulo
- c) la altura del triángulo sobre el lado que soporta el vector \vec{b}

Solución:

a) Sea \vec{c} el vector cuyo módulo es el tercer lado, entonces $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, luego $\vec{c} = \vec{u}$ y su longitud $\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ unidades de longitud

b) El triángulo es la mitad del paralelogramo cuyos lado son los dos vectores \vec{a} y \vec{b} , luego el área es la mitad del módulo del vector \vec{w} , es decir

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{7^2 + (-3)^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{83}}{2} \text{ unidades de área}$$

c) Como $S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \Rightarrow \text{altura} = \frac{2 \times S}{\text{base}} = \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{\frac{83}{22}}$ unidades de

longitud