……………………………………………………………………………………………...

1º.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{cases}$$

a) determinar razonadamente para qué valores de λ es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible

b) hallar el conjunto de soluciones del sistema para el caso de compatible indeterminado

Solución:

a)

$$\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda \\ 3\lambda \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6$$ **,** que se anula para $\begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$

Si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 3$ entonces $Ran(A) = 3 = Ran(AB) \Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado

Si $\lambda = -2$ el sistema toma la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

En la matriz A la columna primera y la segunda son iguales (cambiadas de signo) luego:

$$Ran(A) = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

mientras que $Ran(AB) = 3$ pues $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 30$

luego el sistema es incompatible

Si $\lambda = 3$ el sistema toma la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

en el que $Ran(A) = 2$ pues $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

y

$$Ran\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = Ran\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} = Ran\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Luego el sistema es compatible indeterminado

b)

Para solucionar el sistema en este caso tenemos en cuenta que el sistema es equivalente al:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = 3 - z \\ 3x + 2y = 9 + z \end{array}\right.$$

que podemos resolver fácilmente por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 9+z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{15 - z}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 3 & 9+x \end{vmatrix}}{|5|} = \frac{4z}{5}$$

2º.-Tenemos cuatro puntos $A(0,0,0)$, $B(0,0,2)$, $C(0,2,0)$ y $D(2,0,0)$. Se pide:

a) El volumen de tetraedro $ABCD$

b) Ecuación del plano que pasa por B, C y D

c) Distancia del origen al plano BCD

Solución:

a) Loa vectores $\overrightarrow{AB} = [0,0,2]$ $\overrightarrow{AC} = [0,2,0]$ y $\overrightarrow{AD} = [2,0,0]$ delimitan el tetraedro, luego

www.yoquieroaprobar.es

$$V = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{4}{3} \text{ unidades de volumen}$$

b)

los vectores $\overrightarrow{BC} = [0,2,-2]$ y $\overrightarrow{BD} = [2,0,-2]$ están en el plano, luego:

$$\begin{cases} x = 2\mu \\ y = 2\lambda \\ z = 2-2\lambda-2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \text{x} & 0 & 2 \\ \text{y} & 2 & 0 \\ \text{z-2} & \text{-2} & \text{-2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y+z-2=0$$

c)

La distancia de $(0,0,0)$ al plano BCD es:

$$d = \left| \frac{-2}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ unidades de longitud}$$

3º.-Dada la función $f(x) = \begin{cases} sen\ x & \text{si } x \le 0 \\ x - ax^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

¿Existen valores de “a” con los cuales $f(x)$ es derivable en toda la recta real? . Razona la respuesta y ,si es afirmativa, encuentra dichos valores.

Solución:

$$f'_{auxiliar}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1-2ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

que es derivable dentro de cada rama; para que lo sea en $x=0$ se debe cumplir:

$$\cos 0 = 1 - 2a0$$

que se cumple para cualquier valor de “a”

luego la función es derivable siempre independientemente del valor de “a”

4º.- Determina el mayor área que puede encerrarse en un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1m.

Solución:

Si x e y son los catetos del triángulo rectángulo buscado, se área es:

$$S = \frac{xy}{2}$$

por otra parte, $x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

luego

www.yoquieroaprobar.es

$$S=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}=\frac{\sqrt{x^2-x^4}}{2}$$

que derivando:

$$S'=\frac{x-2x^3}{2\sqrt{x^2-x^4}} \quad \text{que se anula para} \quad \begin{cases} x=-\sqrt{\dfrac{1}{2}} \\ x=0 \\ x=\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

Dado que por la índole del problema "x" es un cateto y por lo tanto debe valer <1, por lo que el denominador siempre es positivo; el numerador ($x-3x^3$) determinará el signo de la derivada:

Si $x<-\sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow S'<0 \Rightarrow S$ es decreciente

Si $x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{2}},0\right) \rightarrow S'>0 \Rightarrow S$ es creciente

Si $x \in \left(0,\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow S'>0 \Rightarrow S$ es creciente

Si $x>\sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow S'<0 \Rightarrow S$ es decreciente

Luego para $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ la función toma un valor máximo. Luego el área máxima buscada es:

$$S=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4} \text{ unidades de área}$$

5º.- En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y=\frac{x^2}{4}-x$, siendo un río el eje OX. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos la distancia en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60€?

Solución:

La carretera cruza el río en los puntos:

$$\frac{x^2}{4}-x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

luego el pinar tiene 4 km a lo largo del río.

El área del pinar serás , pues:

www.yoquieroaprobar.es

$$S=-\int_{2}^{4}\left(\frac{x^2}{4}-x\right)dx=\frac{8}{3}\ km^2$$ y el costo $$C=\frac{8}{3}km^2\cdot 100ha/km^2\cdot 60€/ha=160000€$$

www.yoquieroaprobar.es