

Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$, calcule:

1. Dominio de f .
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
10. Calcular la integral de esta función.

Solución:

1. Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
2. Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1 \implies (-1, 0)$ y $(1, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies$ No hay.
- 3.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	-	+	-	+

4. $f(-x) = -f(x) \implies$ Es IMPAR.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x} = \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = 0$$

$y = x$

6.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 0 \implies x^2 + 1 = 0 \implies \text{no tiene solución}$$

Como además $f'(x) > 0$ podemos asegurar que la función es creciente en todo el dominio de la función $(\mathbb{R} - \{0\})$ y no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

7.

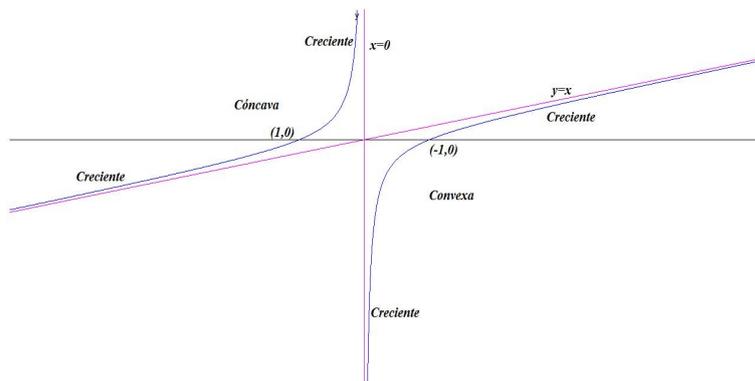
$$f''(x) = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	+	-
y	cóncava	convexa

Cóncava: $(-\infty, 0)$

Convexa: $(0, +\infty)$



8. Representación

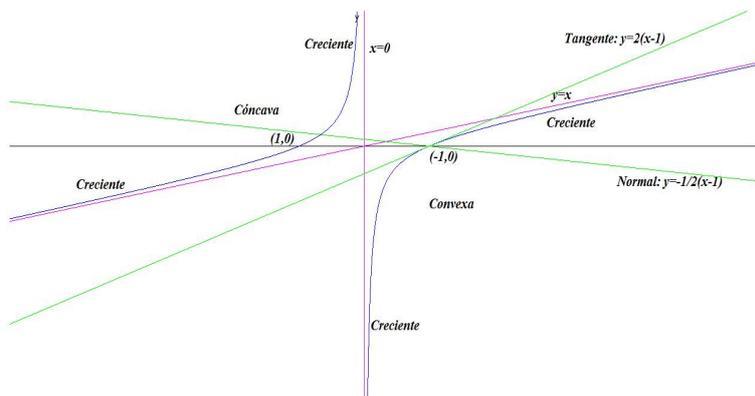
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$:

Como $f(1) = 0$ las rectas pasan por el punto $(1, 0)$.

Como $m = f'(1) = 2$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y = 2(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y = -\frac{1}{2}(x - 1)$$



10.

$$\int \frac{x^2 - 1}{x} dx = \int \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = x^2 - \ln x + C$$