Problema 1 Se pide:

1. Estudiar si los vectores $\overrightarrow{u_1} = (a, -a, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (2a, 1, 1)$ y $\overrightarrow{u_3} = (1, -1, -1)$, son linealmente independientes, según los diferentes valores del parámetro a.

2. Cuando sean linealmente dependientes, escribir, si es posible, $\overrightarrow{u_3}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$

(Junio 1996-Murcia)

Solución:

1. $$\begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ 2a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2a^2 - 3a - 1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \; a = -\frac{1}{2}$$

   $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ y $\overrightarrow{u_3}$ son linealmente independientes si $a \neq -1$ y $a \neq -1/2$.

2. Si $a = -1$: $\overrightarrow{u_3} = -\overrightarrow{u_1}$

   Si $a = -1/2$: $\overrightarrow{u_3} = -\overrightarrow{u_2}$

Problema 2 Las trayectorias de dos aviones vienen dadas por las rectas:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array} \right.$$

1. Estudie si las trayectorias se cortan, se cruzan o son coincidentes.

2. Calcule la distancia mínima entre ambas trayectorias.

3. Si un observador se encuentra en el punto de coordenadas $O(0, 0, 0)$, ¿qué trayectoria sigue su mirada en el momento en el que ve coincidir a los dos aviones?.

(Junio 2006-Murcia)

Solución:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, -1, 2) \\ P_{r_1}(1, 1, 1) \end{array} \right. \qquad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (-1, 1, 0) \\ P_{r_2}(1, 0, 2) \end{array} \right.$$

1. $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0,-1,1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

2.

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |(-2,-2,0)| = \sqrt{8}$$

$$|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]| = 2$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, u$$

3. Como intersección de dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-1,2) \\ \overrightarrow{PP_{r_1}} = (1,1,1) \\ P(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - y - 2z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{PP_{r_2}} = (1,0,2) \\ P(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x + 2y - z = 0$$

$$t : \begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Problema 3 Se pide:

1. Hallar la ecuación de un plano determinado por los puntos $A(1,3,2)$, $B(2,0,1)$ y $C(1,4,3)$

2. Estudia la posición relativa de la recta $r : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ con respecto al plano anterior, hallando el punto de intersección en el caso de que se corten.

(Junio 2006-Islas Canarias)

Solución:

1.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,-3,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,1) \\ P(2,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-2 \\ -3 & 1 & y \\ -1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x + y - z - 3 = 0$$

2. Sustituyendo en el plano $2(-1+3\lambda)+(2+\lambda)-2\lambda-3=0 \Longrightarrow \lambda = 3/5$. Si sutituimos en la recta tenemos un punto de corte en el punto $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right)$

Problema 4 Considera el punto $P(3,2,0)$ y la recta r de ecuación $\left\{\begin{array}{l} x+y-z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{array}\right.$

1. Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

2. Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r.

(Junio 2006-Andalucia)

Solución:

$$r: \left\{\begin{array}{l} x+y-z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x=-1-2\lambda \\ y=4+3\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,3,1) \\ P_r(-1,4,0) \end{array}\right.$$

1. $\overrightarrow{P_rP}=(4,-2,0)$

$$\pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,3,1) \\ \overrightarrow{P_rP}=(4,-2,0) \\ P_r(-1,4,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi: \left|\begin{array}{ccc} -2 & 4 & x+1 \\ 3 & -2 & y-4 \\ 1 & 0 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow x+2y-4z-7=0$$

2. Construimos un plano π_1 perpendicular a r que contenga a P:

$$\pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_{\pi_1}}=(-2,3,1) \\ P(3,2,0) \end{array}\right. \Longrightarrow -2x+3y+z+\lambda=0$$

Como este plano contiene a P: $-6+6+0+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=0$ El plano es $\pi_1: 2x-3y-z=0$.

Cortamos el plano π_1 con la recta r: $2(-1-2\lambda)-3(4+3\lambda)-\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda=-1$

El punto de corte lo obtenemos sustituyendo en la recta $H(1,1,-1)$. Este punto será el punto medio entre P y Q:

$$\frac{P+Q}{2}=H \Longrightarrow Q=2H-P=(-1,0,-2)$$