

Problema 1 Se pide:

- a) Calcular el punto simétrico al $P(-1, 3, 2)$ respecto de la recta $r : \frac{x+1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$, y calcular la distancia entre este punto y r .
- b) Dado el mismo punto anterior, calcular su simétrico respecto al plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, y calcular la distancia desde este punto al plano.

Solución:

- a) Calculamos un plano perpendicular a la recta $\pi : y - z + \lambda = 0$, que contiene al punto $P(-1, 3, 2)$, por lo que tenemos $3 - 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = -1$. Luego el plano es $\pi : y - z - 1 = 0$. La recta r y el plano π se cortan en un punto Q que será el punto medio entre P y su simétrico P' respecto a la recta r . Calculamos Q :

$$\lambda + 2 + \lambda - 1 = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{2} \implies Q \left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{P + P'}{2} = Q \implies P' = 2Q - P = (-1, -4, -5)$$

Para calcular la distancia de P a r necesitamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_r P} = (0, 3, 4)$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times \vec{u}_r| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(-7, 0, 0)| = 7 u^2; \quad |\vec{u}_r| = \sqrt{2}$$

$$d = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} u$$

- b) Calculamos una recta perpendicular al plano y que contenga al punto P

$$t : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

calculamos el punto de corte de esta recta con el plano π , y este punto Q será el punto medio entre P y su simétrico P' respecto al plano

$$(-1 + \lambda) + (3 + \lambda) - 4 + 4\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{6} \implies Q \left(-\frac{5}{6}, \frac{19}{6}, \frac{10}{6} \right)$$

$$\frac{P + P'}{2} = Q \implies P' = 2Q - P = \left(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

La distancia

$$d(P; \pi) = \frac{|-1 + 3 - 4 + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u$$

Problema 2 Sean los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad & \lambda x - (\lambda - 1)y + z = 2 \\ \pi_2 : \quad & 2x - y + z = \lambda \\ \pi_3 : \quad & \lambda x - y + z = \lambda + 1 \end{aligned}$$

Estudiar la posición relativa que ocupan en el espacio para los diferentes valores de λ .

Solución:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & -(\lambda - 1) & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 1 & \lambda + 1 \end{array} \right) \quad |A| = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies \lambda = 2$$

Si $\lambda \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas y en este caso se trata de un sistema compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.

Si $\lambda = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Las tres primeras filas son iguales nos dicen que $\text{Rango}(A) = 1$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ nos dice que $\text{Rango}(\bar{A}) = 2$. Luego $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A})$ y el sistema es incompatible. Comparando los planos dos a dos tenemos que π_1 y π_2 son coincidentes, mientras que el plano π_3 es paralelo a ellos.

Problema 3 Se pide:

- Encontrar los puntos de la recta $r : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$, que están a una distancia $\sqrt{6}$ del punto $P(3, 1, 1)$.
- Encontrar el lugar geométrico de los puntos que distan $\sqrt{10}$ del punto $H(-1, 2, 1)$
- Encontrar un plano tangente a la figura del anterior apartado en el punto $Q(2, 3, 1)$.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Para calcularlos nos apoyamos en una esfera de centro $P(3, 1, 1)$ y radio $\sqrt{6}$: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6$. Esta esfera corta a la recta en los siguientes puntos

$$(-1 - \lambda)^2 + (2\lambda - 1)^2 + \lambda^2 = 6 \implies \lambda = 1, \quad \lambda = -\frac{2}{3}$$

Los puntos buscados son

$$P_1(1, 2, 2); \quad P_2\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 10 \implies x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 4 = 0$
se trata de una esfera de centro $H(-1, 2, 1)$ y radio $r = \sqrt{10}$

c) Cogemos el vector $\overrightarrow{HQ} = (2, 3, 1) - (-1, 2, 1) = (3, 1, 0)$ El plano tangente $\pi : 3x + y + \lambda = 0 \implies 6 + 3 + \lambda = 0 \implies \lambda = -9$. El plano buscado es $\pi : 3x + y - 9 = 0$