Problema 1 Se pide:

1. Estudiar, según los valores del parámetro λ, la posición relativa de los planos:
$$\begin{cases} \lambda x- & 2y+ & \lambda z = 0 \\ 10x- & y+ & 5z = 0 \\ 4x+ & 3y- & z = 0 \end{cases}$$

2. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0, 1, 2)$, $(1, 0, 3)$ y $(2, -1, 0)$.

(Islas Canarias: Selectividad Junio 2005)

Solución:

1. Como el sistema es homogeneo el sistema siempre tiene solución, o bien tiene solución única y en este caso sería la trivial $(0, 0, 0)$, o bien tiene infinitas, en este caso o bien los tres planos son coincidente, o dos coincidentes y el otro corta, o bien los tres planos se cortan en una recta.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & \lambda \\ 10 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20\lambda - 60 = 0 \Longrightarrow \lambda = 3$$

Si $\lambda \neq 3$ el sistema sería compatible determinado, y por tanto los tres planos se cortarían en el punto $(0, 0, 0)$.

Si $\lambda = 3 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2 <n^{\text{o}}$ de incógnitas y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado, si comparamos, en este caso, los planos dos a dos tenemos:

$$\pi_1 \cap \pi_2 : \frac{3}{10} \neq \frac{-2}{-1} \Longrightarrow \text{ Se cortan}$$

$$\pi_1 \cap \pi_3 : \frac{3}{4} \neq \frac{-2}{3} \Longrightarrow \text{ Se cortan}$$

$$\pi_2 \cap \pi_3 : \frac{10}{4} \neq \frac{-1}{3} \Longrightarrow \text{ Se cortan}$$

Luego los tres planos se cortan en una recta.

2.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -2, -2) \\ A(0, 1, 2) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & -2 & y-1 \\ 1 & -2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x + y - 1 = 0$$

Problema 2 Sea el punto $A(1, 0, 0)$ y el plano $\pi : 2x + y - z = 1$. Halla:

1. La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a π.
2. La ecuación del plano π' que pasa por A y no corta a π.
3. La distancia entre los dos planos.

(Oviedo: Selectividad Junio 2005)

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ P_r = A(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

2. π' es, por tanto, un plano paralelo a π que contiene al punto A.

$$2x+y-z+\lambda = 0 \Longrightarrow 2+0+0+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow \pi' : 2x+y-z-2 = 0$$

3. Bastará con calcular la distancia desde el punto A al plano π

$$d(A, \pi) = \frac{|2 + 0 - 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\, u$$