Problema 1 (5 puntos). Sea el punto $P(-1,3,-1)$, el plano $\pi : 2x - y + z + 2 = 0$ y la recta

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$$

se pide:

1. (2,5 puntos). Calcular el punto simétrico de P respecto de π.
2. (2,5 puntos). Calcular el punto simétrico de P con respecto de r.

Solución:

1. Se sigue el siguiente procedimiento:
   - Se calcula una recta t perpendicular a π que pase por el punto P:
     $$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2,-1,1) \\ P_t(-1,3,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right.$$
   - Se encuentra el punto de corte P' de la recta t con el plano π:
     $$2(-1+2\lambda) - (3-\lambda) + (-1+\lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$
     luego el punto $P'\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
   - Tenemos:
     $$\frac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = \left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (-1,3,-1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
2. Se sigue el siguiente procedimiento:
   - Se calcula un planoπ perpendicular a r que contenga al punto P:
     $$x + y + 5z + \lambda = 0 \Longrightarrow -1 + 3 - 5 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 3$$
     El plano es $\pi : x + y + 5z + 3 = 0$
   - Calculamos el punto de corte entre π y r:
     $$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 5\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow (-1+\lambda)+(\lambda)+5(1+5\lambda)+3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{7}{27}$$
     luego el punto $P'\left(-\frac{34}{27}, -\frac{7}{27}, -\frac{8}{27}\right)$.

- Tenemos:

$$\frac{P+P''}{2}=P'\Longrightarrow P''=2P'-P=\left(-\frac{64}{27},-\frac{14}{27},-\frac{16}{27}\right)-(-1,3,-1)=\left(-\frac{37}{27},-\frac{95}{27},\frac{11}{27}\right)$$

Problema 2 (3 puntos). Sea el plano $\pi: 2x+3y-2z-6=0$. Este plano corta a los ejes coordenados en tres puntos formando un tetraedro con el origen. Se pide:

1. (1 punto). Los puntos de corte de π con los ejes coordenados.
2. (1 punto). Volumen del tetraedro.
3. (1 punto). Altura del tetraedro sobre la base formada por los tres puntos calculados en el primer apartado.

Solución:

1. Corte con el eje OX: Hacemos $y=0$ y $z=0\Longrightarrow A(3,0,0)$

   Corte con el eje OY: Hacemos $x=0$ y $z=0\Longrightarrow B(0,2,0)$

   Corte con el eje OZ: Hacemos $x=0$ y $y=0\Longrightarrow A(0,0,-3)$

   Tendremos los vectores con el origen de coordenadas:

   $$\overrightarrow{OA}=(3,0,0),\quad \overrightarrow{OB}=(0,2,0),\quad \overrightarrow{OC}=(0,0,-3)$$

2. El volumen será:

   $$V=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}|=\frac{1}{6}|-18|=3\ u^3$$

3. $$\text{altura}=d(O,\pi)=\frac{|-6|}{\sqrt{17}}=\frac{6}{\sqrt{17}}\ u$$

Problema 3 (2 puntos). Dados el punto $P(1,-2,1)$ y la recta

$$r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$$

se pide:

1. (1 punto). Calcular la distancia de P a r.
2. (1 punto). Calcular una recta paralela a r contenga a P.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 2) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{P_rP} = (2, -2, 2)$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{12}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}| = | \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} | = |(6, 6, 0)| = 6\sqrt{2}$$

2.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 2) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, 2) \\ P_s(1, -2, 1) \end{cases}$$

La recta buscada será:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$$