Problema 1 *(7 puntos).* Sean las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2 \end{array}\right. \quad , \quad s:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$$

se pide:

a) Estudiar la posición de ambas rectas.

b) La distancia que las separa.

c) Encontrar una recta vertical a ambas que pase por el punto $P(2,1,1)$.

d) Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.

e) Encontrar una recta que pasando por el punto P corte a ambas.

f) Encontrar un plano paralelo a r y a s que contenga a P.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,0) \\ P_r(0,1,2) \end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-1,2,1) \\ P_s(0,-1,1) \end{array}\right. \quad , \quad \overrightarrow{P_rP_s}=(0,-2,-1)$$

a)

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right|=1\neq 0\Longrightarrow \text{se cruzan}$$

b)

$$|\overrightarrow{u_t}|=|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right||=|(-1,-1,1)|=\sqrt{3}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ u$$

c)

$$h:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_h}=\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=(-1,-1,1) \\ P_h=P(2,1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right.$$

d)

$$\pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-1,0) \\ P_r(0,1,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ -1 & -1 & y-1 \\ 1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+y+2z-5=0$$

$$\pi_2: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,2,1) \\ P_s(0,-1,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} -1 & -1 & x \\ -1 & 2 & y+1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+z-1=0$$

$$t: \begin{cases} x+y+2z-5=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$$

e)

$$\pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{P_rP} = (2,0,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-1,0) \\ P_r(0,1,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-1 \\ -1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+y+2z-5=0$$

$$\pi_2: \begin{cases} \overrightarrow{P_sP} = (2,2,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,2,1) \\ P_s(0,-1,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 2 & 2 & y+1 \\ 0 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x-y+3z-4=0$$

$$l: \begin{cases} x+y+2z-5=0 \\ x-y+3z-4=0 \end{cases}$$

f) $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (-1,-1,1)$:

$$-x-y+z+\lambda=0 \Longrightarrow -2-1+1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=2$$

$$\pi': x+y-z-2=0$$

Problema 2 *(3 puntos).* Sea el punto $P(3,-1,2)$. Se pide

a) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi: x+y+3z-5=0$.

b) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Solución:

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $r \perp \pi / P \in r$:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,3) \\ P_r = P(3,-1,2) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 2+3\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π:

$$(3+\lambda)+(-1+\lambda)+3(2+3\lambda)-5=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{3}{11}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=3-3/11=30/11 \\ y=-1-3/11=-14/11 \\ z=2-9/11=13/11 \end{array}\right. \Longrightarrow P'\left(\frac{30}{11},-\frac{14}{11},\frac{13}{11}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P''+P}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-P=$$

$$\left(\frac{60}{11},-\frac{28}{11},\frac{26}{11}\right)-(3,-1,2)=\left(\frac{27}{11},-\frac{17}{11},\frac{4}{11}\right)$$

b) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r/P \in \pi$:

$$2x+y+z+\lambda=0 \Longrightarrow 6-1+2+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-7$$

$$\pi: 2x+y+z-7=0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,1) \\ P_r(-1,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$$2(-1+2\lambda)+(\lambda)+(\lambda)-7=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{3}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1+3 \\ y=3/2 \\ z=3/2 \end{array}\right. \Longrightarrow P'\left(2,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P''+P}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-P=$$

$$(4,3,3)-(3,-1,2)=(1,4,1)$$