

Problema 1 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 2z = 2 \end{cases} \quad s : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$$

1. Comprobar que se cruzan.
2. Calcular la distancia que las separa.
3. Encontrar la recta t que es perpendicular a ambas.
4. Encontrar un plano π que pase por el origen, y otro π' que pase por el punto $A(2, 0, 1)$.
5. Encontrar el punto P' simétrico de $P(2, 2, 2)$ respecto al plano π' calculado anteriormente.
6. El plano π' corta a los ejes coordenados en tres puntos que junto con el origen forman un tetraedro. Calcular su volumen.

Solución:

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2, 5, 1), \quad P_r(0, -2, -1)$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 5, 1) \\ P_r(0, -2, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, 2) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

1. Calculamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 2, 2)$ y tenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Luego las dos rectas se cruzan.

- 2.

$$|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |-8 + 3| = 5$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |(9, -5, 7)| = \sqrt{155}$$

$$d = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{5}{\sqrt{155}} = 0,4016096644u$$

3.

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (9, -5, 7)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 5, 1) \\ \overrightarrow{u_t} = (9, -5, 7) \\ P_r(0, -2, -1) \end{cases} \quad \pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, 2) \\ \overrightarrow{u_t} = (9, -5, 7) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 9 & x \\ 5 & -5 & y+2 \\ 1 & 7 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 9 & x+1 \\ 1 & -5 & y \\ 2 & 7 & z-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi_1 : 8x - y - 11z - 13 = 0, \quad \pi_2 : 17x + 25y - 4z + 21 = 0$$

$$t : \begin{cases} 8x - y - 11z - 13 = 0 \\ 17x + 25y - 4z + 21 = 0 \end{cases}$$

4.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 5, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 5 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 9x - 5y + 7z = 0$$

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 5, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, 2) \\ A(2, 0, 1) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x-2 \\ 5 & 1 & y \\ 1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 9x - 5y + 7z - 25 = 0$$

5. Vamos a seguir tres pasos:

- (a) Vamos a calcular una recta perpendicular al plano π' y que pase por el punto $P(2, 2, 2)$

$$h : \begin{cases} \overrightarrow{u_h} = (9, -5, 7) \\ P_h(2, 2, 2) \end{cases} \implies h : \begin{cases} x = 2 + 9\lambda \\ y = 2 - 5\lambda \\ z = 2 + 7\lambda \end{cases}$$

- (b) Calculamos el punto de corte entre h y π

$$9(2 + 9\lambda) - 5(2 - 5\lambda) + 7(2 + 7\lambda) - 25 = 0 \implies \lambda = \frac{3}{155}$$

y sustituyendo:

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{27}{155} = \frac{337}{155} \\ y = 2 - \frac{15}{155} = \frac{295}{155} \\ z = 2 + \frac{21}{155} = \frac{331}{155} \end{cases} \implies M \left(\frac{337}{155}, \frac{295}{155}, \frac{331}{155} \right)$$

(c) M será el punto medio entre P y su simétrico P' :

$$M = \frac{P' + P}{2} \implies P' = 2M + P = \left(\frac{984}{155}, \frac{900}{155}, \frac{972}{155} \right)$$

6. Tenemos el plano $\pi' : 9x - 5y + 7z - 25 = 0$ que cortará a los ejes en los puntos:

Corte con el eje OX : $y = 0, z = 0 \implies A(25/9, 0, 0)$

Corte con el eje OY : $x = 0, z = 0 \implies B(0, -5, 0)$

Corte con el eje OZ : $x = 0, y = 0 \implies C(0, 0, 25/7)$

Tenemos, por tanto, los vectores:

$$\vec{OA} = (25/9, 0, 0), \vec{OB} = (0, -5, 0), \vec{OC} = (0, 0, 25/7)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 25/9 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 25/7 \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} | -49,60317460 | = 8,267195767 \text{ u}^3 \end{aligned}$$