

Problema 1 (5 puntos). Dadas las rectas

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}, \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

1. (1 punto). Estudiar su posición relativa.
2. (1 punto). Calcular la distancia que las separa.
3. (1,5 puntos). Encontrar una recta perpendicular a ellas y que las corte.
4. (1,5 puntos). Encontrar una recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a ambas rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 2, 3) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, -1, 1) \\ P_s(0, 1, 0) \end{cases}$$

1. Construimos el vector $\overrightarrow{P_s P_r} = (1, -1, 1)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

- 2.

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (5, 7, -3)$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_s P_r} \cdot \vec{u}_t|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{|-5|}{\sqrt{83}} = \frac{5}{\sqrt{83}} u$$

- 3.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (5, 7, -3) \\ \vec{u}_r = (-1, 2, 3) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 5 & -1 & x-1 \\ 7 & 2 & y \\ -3 & 3 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 27x - 12y + 17z - 44 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (5, 7, -3) \\ \vec{u}_s = (2, -1, 1) \\ P_s(0, 1, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 5 & 2 & x \\ 7 & -1 & y-1 \\ -3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 4x - 11y - 19z + 11 = 0$$

$$t : \begin{cases} 27x - 12y + 17z - 44 = 0 \\ 4x - 11y - 19z + 11 = 0 \end{cases}$$

4.

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (1, 0, 1) \\ \vec{u}_r = (-1, 2, 3) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 3 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x+2y-z=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_sP} = (0, 1, 0) \\ \vec{u}_s = (2, -1, 1) \\ P_s(0, 1, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 2 & x \\ 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies x-2z=0$$

$$t : \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos). Dado el plano $\pi : x - 3y + 2z - 1 = 0$ y la recta

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$$

se pide:

- (1 punto). Estudiar su posición relativa y ángulos que forman.
- (1 punto). Encontrar un plano perpendicular a π que contenga a r .
- (1 punto). Calcular la proyección ortogonal de r sobre π .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 3) \\ P_r(-1, 1, 0) \end{cases} \quad \vec{u}_\pi = (1, -3, 2)$$

1.

$$r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \implies (-1 + \lambda) - 3(1 + 2\lambda) + 2(3\lambda) - 1 = 0 \implies \lambda = 5$$

Luego la recta r y el plano π se cortan en el punto $(4, 11, 15)$.

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_\pi|} = \frac{1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{14} \implies \alpha = 4^\circ 5' 46''$$

2. Sea el plano π' el plano que buscamos:

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 3) \\ \vec{u}_\pi = (1, -3, 2) \\ P_r(-1, 1, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+1 \\ 2 & -3 & y-1 \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 13x+y-5z+12=0$$

3. La proyección ortogonal de r sobre π se encuentra como intersección de dos planos:

$$t : \begin{cases} 13x + y - 5z + 12 = 0 \\ x - 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos). Dado el plano $\pi : x + y - 2z + 2 = 0$, se pide:

- (1 punto). Calcular una recta perpendicular a π que pase por el punto $P(1, 1, 2)$.
- (1 punto). Calcular un plano paralelo a π contenga a P .

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 1, -2) \\ P_r(1, 1, 2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

2.

$$x + y - 2z + \lambda = 0 \implies 1 + 1 - 4 + \lambda = 0 \implies \lambda = 2$$

El plano buscado es él mismo, dado que el punto P está contenido en el plano.