

Problema 1 (6 puntos). Sean las rectas

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

se pide:

1. Estudiar la posición de ambas rectas.
2. Distancia que las separa.
3. Encontrar una recta perpendicular a ambas y que las corta.
4. Encontrar una recta que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y corta a ambas rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 0, -1) \\ P_s(1, 3, 1) \end{cases}$$

1. Construimos el vector $\overrightarrow{P_s P_r} = (0, -3, 0)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

- 2.

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2(1, -1, 1)$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{|-6|}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} u$$

- 3.

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, -1, 1) \\ \vec{u}_r = (1, 2, 1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x - z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, -1, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 0, -1) \\ P_s(1, 3, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-3 \\ 1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x+2y+z-8=0$$

$$t : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

4.

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P} = (0, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x-z+1=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_s P} = (0, -2, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 0, -1) \\ P_s(1, 3, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ -2 & 0 & y-3 \\ 0 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies x+z-2=0$$

$$t : \begin{cases} x-z+1=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$$

Problema 2 (4 puntos). Se pide:

1. Dado el punto $P(1, 1, 1)$, encontrar su punto simétrico respecto al plano $\pi : 2x - y - 3z - 1 = 0$
2. Calcular el punto simétrico del origen de coordenadas respecto de la recta

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}$$

Solución:

1. Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta t perpendicular a π que pase por P :

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (2, -1, -3) \\ P_t(1, 1, 1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto P' de corte de t con π :

$$2(1+2\lambda) - (1-\lambda) + 3(1-3\lambda) - 1 = 0 \implies \lambda = \frac{3}{14} \implies P' \left(\frac{10}{7}, \frac{11}{14}, \frac{5}{14} \right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P'' (el simétrico que buscamos) y P :

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = 2 \left(\frac{10}{7}, \frac{11}{14}, \frac{5}{14} \right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{13}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{2}{7} \right)$$

2. Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano π perpendicular a r que pase por $O(0, 0, 0)$:

$$\pi : 2x + z + \lambda = 0 \implies \lambda = 0 \implies \pi : 2x - z = 0$$

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 0, 1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto P' de corte de r con π :

$$2(-1 + 2\lambda) + 1 + \lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{5} \implies \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P'' (el simétrico que buscamos) y P :

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = 2\left(-\frac{6}{5}, 0, \frac{12}{5}\right) - (0, 0, 0) = \left(-\frac{6}{5}, 0, \frac{12}{5}\right)$$