Problema 1 *(2 puntos).* Se pide:

1. ¿Son coplanarios los puntos $A(1,0,0)$, $B(3,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(3,0,-1)$? En caso afirmativo, calcula la distancia del origen de coordenadas al plano que los contiene.

2. Calcula el punto simétrico del punto $P(0,0,1)$ respecto del plano $\pi : x-2y+2z-1=0$

Solución:

1. Construimos los vectores $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,1,1)$, estos dos vectores con A determinan el plano $\pi : x-2y+2z-1=0$. Ahora comprobamos si el punto D pertenece al plano $\pi \Longrightarrow 3-0-2-1=0$

$$\pi : \begin{vmatrix} 2 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x-2y-2z-1=0$$

   Otra manera de ver si son coplanarios es construyendo el vector $\overrightarrow{AD} = (2,0,-1)$ y tenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{linealmente dependientes}$$

$$d(O,\pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\ u$$

2. Seguimos el siguiente procedimiento:

   - Calculamos una recta t perpendicular a π que pase por P:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,-2,2) \\ P_t(0,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ y = 1+2\lambda \end{array} \right.$$

   - Calculamos el punto P' de corte de t con π:

$$\lambda + 4\lambda + 2(1+2\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{9} \Longrightarrow P'\left(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P'' (el simétrico que buscamos) y P:

$$\frac{P+P''}{2}=P'\Longrightarrow P''=2P'-P=2\left(-\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right)-(0,0,1)=\left(-\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right)$$

Galicia (Junio 2008)

Problema 2 *(3 puntos).* Se consideran las rectas

$$r:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{1}\quad s:\frac{x+1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-3}$$

1. Demostrar que se cruzan y calcular la distancia mínima entre ellas.
2. Hallar un vector director de la recta perpendicular a ambas.
3. Encontrar una recta perpendicular a ambas rectas y que las corte.

Solución:

1.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(3,3,1)\\ P_r(1,-2,2)\end{array}\right.\quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(3,4,-3)\\ P_s(-1,0,1)\end{array}\right.\quad \overrightarrow{P_sP_r}=(2,-2,1)$$

$$\left|\begin{array}{ccc}3&3&1\\3&4&-3\\2&-2&1\end{array}\right|=-47\neq 0\Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\3&3&1\\3&4&-3\end{array}\right||=|(-13,12,3)|=\sqrt{322}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_sP_r}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{47}{\sqrt{322}}=\frac{47\sqrt{322}}{322}\ u$$

2.

$$u_t:\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\3&3&1\\3&4&-3\end{array}\right|=(-13,12,3)$$

3. Como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(3,3,1)\\ \overrightarrow{u_t}=(-13,12,3)\\ P_r(1,-2,2)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi_1:\left|\begin{array}{ccc}3&-13&x-1\\3&12&y+2\\1&3&z-2\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$\pi_1:3x+22y-75z+191=0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3,4,-3) \\ \overrightarrow{u_t} = (-13,12,3) \\ P_s(-1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{lll} 3 & -13 & x+1 \\ 4 & 12 & y \\ -3 & 3 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi_2 : 24x + 15y + 44z - 20 = 0$$

La recta t que buscamos es la definida como corte de dos planos:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 3x + 22y - 75z + 191 = 0 \\ 24x + 15y + 44z - 20 = 0 \end{array} \right.$$

Islas Baleares (Junio 2008)

Problema 3 *(2 puntos).* Se consideran la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{array} \right.$, el plano $\pi : 2x - 4y - 2z = 0$ y el punto $P(1,1,1)$. Se pide:

1. Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo a π.

2. Determinar la ecuación general del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

Solución:

1. $\pi_1 : 2x - 4y - 2z + \lambda = 0$ y como contiene a $P \Longrightarrow 2 - 4 - 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 4$, luego $\pi_1 : 2x - 4y - 2z + 4 = 0$

2. $$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{PP_r} = (1,1,2) \\ P(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{lll} 1 & 1 & x-1 \\ 2 & 1 & y-1 \\ 3 & 2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$$

Islas Canarias (Junio 2008)

Problema 4 *(3 puntos).* Halla la ecuación del plano π que pasa por el punto $P(3,-1,4)$ y es paralelo a las rectas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{array} \right. \qquad r_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-3) \\ P_r(1,1,0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,2,-3) \\ P_s(-1,2,-2) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, -3) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 2, -3) \\ P(3, -1, 4) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & x-3 \\ 1 & 2 & y+1 \\ -3 & -3 & z-4 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi_2 : x + y + z - 6 = 0$$

Navarra (Junio 2008)