

Problema 1 Sean los vectores $\vec{u} = (m, 3, -1)$, $\vec{v} = (2, m, 2)$ y $\vec{w} = (m, -7, 7)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 3 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ m & -7 & 7 \end{vmatrix} = 4(2m^2 + 5m - 7) = 0 \implies m = 1, m = -\frac{7}{2}$$

Si $m = 1$ o $m = -7/2$ los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

1. Calcular m para que los vectores $\vec{u} = (1, m, -1)$ y $\vec{v} = (2m, -2, 2m - 1)$ sean perpendiculares.
2. Encontrar un vector perpendicular $\vec{u} = (2, -1, 3)$ y a $\vec{v} = (1, 2, 0)$ que tenga módulo 5.
3. Decidir si los vectores $\vec{u} = (2, -1, -1)$ y $\vec{v} = (2, -3, 7)$ son perpendiculares.

Solución:

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 2m - 2m - 2m + 1 = 0 \implies m = 1/2$$

2.

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-6, 3, 5) \implies |\vec{w}| = \sqrt{70}$$

$$\vec{t} = \frac{5}{\sqrt{70}}(-6, 3, 5) = \left(\frac{-3\sqrt{70}}{7}, \frac{3\sqrt{70}}{14}, \frac{25\sqrt{70}}{70}\right)$$

$$3. \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 + 3 - 7 = 0 \implies \vec{u} \perp \vec{v}$$

Problema 3 Sean los vectores $\vec{u} = (2, -2, 1)$, $\vec{v} = (3, 5, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 4)$. Calcular:

1. Volumen de paralelepípedo que determinan.

2. Área de la base determinada por los vectores \vec{u} y \vec{v} , y la altura del paralelogramo sobre el vector \vec{v} .
3. Altura del paralelepípedo.
4. Volumen del tetraedro que determinan.
5. Área de la base del tetraedro determinada por los vectores \vec{u} y \vec{v} , y la altura del triángulo sobre el vector \vec{v} .
6. Altura del tetredro.

Solución:

1.

$$V_p = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 67 u^3$$

2.

$$S_p = |\vec{u} \times \vec{v}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = |(-5, 3, 16)| = \sqrt{290} u^2$$

$$S_p = |\vec{v}| \cdot h_p \implies h_p = \sqrt{\frac{290}{34}} u$$

3.

$$V_p = S_p \cdot H_p \implies H_p = \frac{67\sqrt{290}}{290} u$$

4.

$$V_t = \frac{67}{6} u^3$$

5.

$$S_t = \frac{\sqrt{290}}{2} u^2, \quad h_t = h_p = \sqrt{\frac{290}{34}} u$$

6.

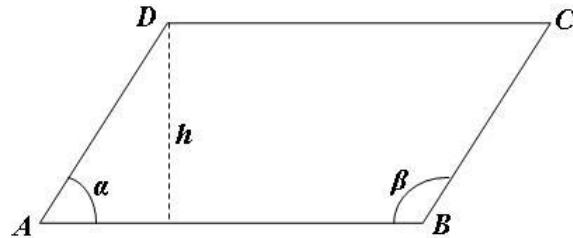
$$H_t = H_p = \frac{67\sqrt{290}}{290} u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(1, -2, 0)$, $B(3, -1, 2)$ y $C(8, 3, 10)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Encontrar el 4º vértice D .
2. Calcular la longitud de sus lados.
3. Calcular sus ángulos y su centro.

4. Calcular el punto simétrico de A respecto de C .
5. Dividir el segmento \overline{AC} en tres partes iguales.

Solución



1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (1, -2, 0) + (5, 4, 8) = (6, 2, 8)$.

2. $|\overrightarrow{AB}| = |(2, 1, 2)| = 3$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(5, 4, 8)| = \sqrt{105}$

- 3.

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{30}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{105}} \implies \alpha = 12^\circ 36' 15'' \text{ y } \beta = 167^\circ 23' 45''$$

$$\text{El centro es } M \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 5 \right)$$

4. $C = \frac{A + A'}{2} \implies A' = 2C - A = (15, 8, 20)$

- 5.

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3} \right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (1, -2, 0) + \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3} \right) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{10}{3} \right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{10}{3} \right) + \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3} \right) = \left(\frac{17}{3}, \frac{4}{3}, \frac{20}{3} \right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{17}{3}, \frac{4}{3}, \frac{20}{3} \right) + \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3} \right) = (8, 3, 10)$$