Problema 1 Dadas las retas:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1} \text{ y } s: \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Estudiar la posición que ocupan.
2. Calcular la distancia mínima que las separa, si procede.
3. Encontrar una recta que las corte y sea perpendicular a ambas.
4. Si $P(2,3,1)$ encontrar una recta que pasando por P corte a las dos rectas.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ P_r(-1,1,-2) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,1,2) \\ P_s(1,0,0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (-2,1,-2)$$

1.

$$\left| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{array} \right| = -13 \neq 0 \Longrightarrow \text{ se cruzan}$$

2.

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]| = 13; \quad |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right| | = |(3,-5,1)| = \sqrt{35}$$

$$d = \frac{13}{\sqrt{35}} = \frac{13\sqrt{35}}{35} \ u$$

3. $\overrightarrow{u_t} = (3,-5,1)$

$$\pi_1: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1: \left| \begin{array}{rrr} 2 & 3 & x+1 \\ 1 & -5 & y-1 \\ -1 & 1 & z+2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 4x+5y+13z+25 = 0$$

$$\pi_2: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2: \left| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 2 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 3x-5y+z-3 = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + 5y + 13z + 25 = 0 \\ 3x - 5y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

4. Tenemos $P(2,3,1)$, $\overrightarrow{P_rP} = (3,2,3)$ y $\overrightarrow{P_sP} = (1,3,1)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_rP} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & 2 & x-2 \\ 2 & 1 & y-3 \\ 3 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 5x - 9y + z + 16 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_sP} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 5x - y - 2z - 5 = 0$$

$$h : \begin{cases} 5x - 9y + z + 16 = 0 \\ 5x - y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,1,3)$ y $C(3,2,2)$. Se pide:

1. Calcular la ecuación del plano π que los contiene.
2. ¿El punto $D(2,1,3)$ es coplanario con los puntos A, B y C?
3. Encontrar un recta r perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C y que pase por $O(0,0,0)$. Expresarla en su forma continua.

Solución:

1.
$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,0,2) \\ \overrightarrow{AC} = (2,1,1) \\ A(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - 3y - z + 2 = 0$$

2. Sustituyendo el punto D en el plano π comprobamos:

   $4 - 3 - 3 + 2 = 0 \Longrightarrow D$ es un punto del plano π y, por tanto, coplanario con A, B y C.

3.
$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,-3,-1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow r : \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 2, -m)$, $\overrightarrow{v} = (-m, 1, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (0, 3, m)$. Calcular el párametro m de manera que los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente dependientes.
Si $m = -1$ encontrar una combinación lineal de vectores con los anteriores

vectores que nos proporcione el vector $\overrightarrow{t} = (3, 1, -2)$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -m \\ -m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & m \end{vmatrix} = 6m(m-1) = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 1$$

Los tres vectores son linealmente dependientes cuando $m = 0$ o $m = 1$.

Cuando $m = -1$ los tres vectores son linealmente independientes y $\overrightarrow{u} = (-1, 2, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 1, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (0, 3, -1)$:

$$(3, 1, -2) = a(-1, 2, 1)+b(1, 1, 2)+c(0, 3, -1) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} -a+ & b & = & 3 \\ 2a+ & b+ & 3c = & 1 \\ a+ & 2b- & c = & -2 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -13/6 \\ b = 5/6 \\ c = 3/2 \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{t} = -\frac{13}{6}\overrightarrow{u} + \frac{5}{6}\overrightarrow{v} + \frac{3}{2}\overrightarrow{w}$$