**Problema 1** *(4 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-\alpha}{-1}$$
$$s: \frac{x+1}{3} = y-2 = z$$

1. Analizar en función de $\alpha$ la posición relativa de las dos rectas.
2. Para $\alpha = 14$ escribir la ecuación del plano $\pi$ que contiene a ambas rectas.
3. Hallar la perpendicular común a las rectas $s$ y $t$ siendo $t$ la siguiente recta:

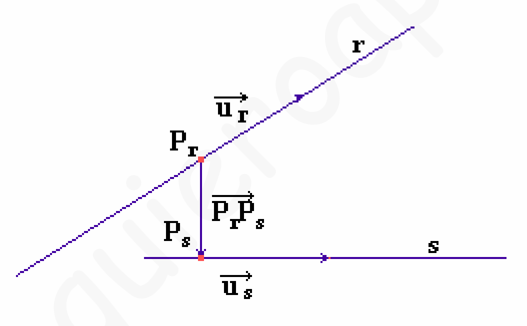
$$t: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$$

**Solución:**

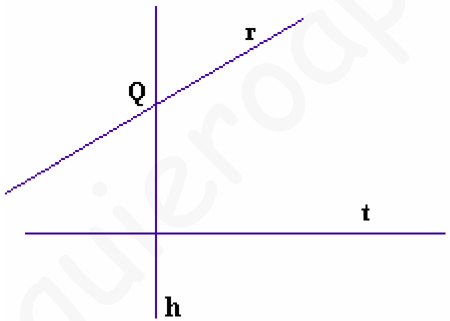
$$r: \left\{ \begin{array}{l} P_r(1,0,\alpha) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,1,-1) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} P_s(-1,2,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (3,1,1) \end{array} \right.$$

1. Vamos a ver para que valores de $\alpha$ los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$ son linealmente independientes.

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -\alpha \end{array} \right| = \alpha - 14 = 0 \Longrightarrow \alpha = 14$$



r
$\overrightarrow{u_r}$
$P_r$
$\overrightarrow{P_rP_s}$
$P_s$
s
$\overrightarrow{u_s}$


r
Q
t
h

Si $\alpha \neq 14$ el determinante es distinto de cero, lo que quiere decir que los tres vectores son linealmente independientes, y por tanto, las dos rectas se cruzan.

Si $\alpha = 14$ el determinante es cero y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ esto quiere decir que $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes, y por tanto, $\overrightarrow{P_rP_s}$ depende linealmente de $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, en conclusión las rectas $r$ y $s$ se cortan.

2. Replanteamos datos:

$$t: \left\{ \begin{array}{l} P_t(0,0,0) \\ \overrightarrow{v_t} = (1,2,-2) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} P_s(-1,2,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (3,1,1) \end{array} \right. \implies \overrightarrow{P_sP_t} = (1,-2,0)$$

Veamos que posición relativa tienen $s$ y $t$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \implies \text{las dos rectas se cruzan.}$$

Tenemos que calcular la recta $h$ perpendicular común a $s$ y $t$, es decir, una recta cuyo vector director vendría determinado por:

$\overrightarrow{v_h} = \overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{v_t}$

$$\overrightarrow{v_h} = \overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{v_t} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4,7,5)$$

Ahora hallamos el plano $\pi$, que conteniendo a $t$ es perpendicular a la recta $s$. Este plano y la recta $s$ se cortarán en un punto $Q$.

Para construir $\pi$ tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_h} = (-4,7,5) \\ \overrightarrow{v_t} = (1,2,-2) \\ P_t(0,0,0) \end{array} \right. \implies \pi \equiv \begin{vmatrix} -4 & 1 & x-0 \\ 7 & 2 & y-0 \\ 5 & -2 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 8x + y + 5z = 0; \quad s : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora buscamos el punto de corte:

$8(-1 + 3\lambda) + (2 + \lambda) + 5\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{5}$

Luego el punto $Q$ será: $\begin{cases} x = -1 + 3 \cdot \frac{1}{5} \\ y = 2 + \frac{1}{5} \\ z = \frac{1}{5} \end{cases}$ Es decir: $Q(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}, \frac{1}{5})$

Tenemos por tanto: $h = \begin{cases} Q(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}, \frac{1}{5}) \\ \overrightarrow{v_h} = (-4, 7, 5) \end{cases}$

Por lo que concluiremos:

$$h : \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 4 \cdot \lambda \\ y = \frac{11}{5} + 7 \cdot \lambda \\ z = \frac{1}{5} + 5 \cdot \lambda \end{cases}$$

**Problema 2** *(4 puntos)* Se considera la recta $r$ cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r : \begin{cases} \text{x=} & 2\text{t} \\ \text{y=} & \text{t} \\ \text{z=} & 0 \end{cases} \quad \text{y el plano } \pi : \ x + y + z - 1 = 0$$

Determinar las coordenadas de un punto $P$ perteneciente a la recta y cuya distancia al plano $\pi$ sea igual que su distancia al origen de coordenadas. ¿Es único este punto?. Contestar razonadamente.

**Solución:**
LLamaríamos $O(0,0,0)$ al origen de coordenadas, y $P(x,y,z)$ a un punto que por estar sobre la recta $r$ tendría de coordenadas $P(2t,t,0)$; aplicando las fórmulas de distancia a un plano, y distancia a otro punto tendremos:

$$d(O,P) = \sqrt{(2t)^2 + t^2} = \sqrt{4t^2 + t^2} = t\sqrt{5}$$

$$d(P,\pi) = \frac{|2t \cdot 1 + t \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|2t + t - 1|}{\sqrt{3}}$$

Como $d(O,P) = d(P,\pi) \Longrightarrow t\sqrt{5} = \frac{|3t-1|}{\sqrt{3}} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} t\sqrt{5} = & \frac{3t-1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow t = \frac{1}{3-\sqrt{15}} \\ t\sqrt{5} = & -\frac{3t-1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow t = \frac{1}{3+\sqrt{15}} \end{cases}$$

Sustituyendo $t$ en $r$ se obtienen los puntos pedidos:

$$P(\frac{2}{3-\sqrt{15}}, \frac{1}{3-\sqrt{15}}, 0) \text{ y } P'(\frac{2}{3+\sqrt{15}}, \frac{1}{3+\sqrt{15}}, 0)$$

Esta claro que el punto no es único, ya que como hemos visto son dos los que cumplen la condición del problema.

**Problema 3** *(2 puntos)* Se consideran las rectas $r_1$ y $r_2$ dadas por:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & 3y+ & z = & 1 \end{array} \right. \quad r_2 =: \left\{ \begin{array}{rrr} x = & & 3t \\ y = & 1- & 2t \\ z = & 2+ & t \end{array} \right.$$

Encontrar la ecuación del plano que contiene a $r_1$ y al punto de intersección de $r_2$ con el plano $\pi = x - 3y - 2z + 7 = 0$

**Solución**

Hallamos el punto de corte entre $\pi$ y $r_2$ por simple sustitución, es decir, $3t - 3(1-2t) - 2(2+t) + 7 = 0 \Longrightarrow t = 0$ y sustituyendo ahora este valor en $r_2$ obtendríamos el punto $P(0, 1, 2)$.

Ahora vamos a pasar la recta $r_1$ a paramétricas:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rrr} x+ & y- & 2z = 0 \\ 2x- & 3y+ & z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} x+ & y = & 2t \\ 2x- & 3y = & 1-t \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rr} 2x + 2y = & 4t \\ 2x - 3y = & 1-t \end{array} \right. \Longrightarrow 5y = 5t - 1 \Longrightarrow y = \frac{5t-1}{5}$$

$$x = 2t - \frac{5t-1}{5} = \frac{5t+1}{5}$$

Nos quedaría:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rrr} x = & \frac{1}{5} & +t \\ y = & -\frac{1}{5} & +t \\ z = & & t \end{array} \right. \quad r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (1, 1, 1) \\ P_r(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0) \end{array} \right.$$

Calculamos ahora $\overrightarrow{P_rP} = (0 - \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5}, 2 - 0) = (-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, 2)$.

El plano buscado lo obtendríamos con los siguientes datos:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0, 1, 2) \\ \overrightarrow{u} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_rP} = (-\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, 2) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & -\frac{1}{5} & x - 0 \\ 1 & \frac{6}{5} & y - 1 \\ 1 & 2 & z - 2 \end{array} \right| = 4x - 11y + 7z - 3 = 0$$