Problema 1 Sean las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \quad s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

se pide:

1. Estudiar la posición de ambas rectas.
2. Distancia que las separa.
3. Encontrar una recta perpendicular a ambas y que las corta.
4. Encontrar una recta que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$ y corta a ambas rectas.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1) \\ P_s(1, 2, 1) \end{cases}$$

1. Construimos el vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (0, 2, 0)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

2.

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$$

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

3.

$$\pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, 1, -1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y+z-1 = 0$$

$$\pi_2: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 0, 1) \\ P_s(1, 2, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+2y+z-6 = 0$$

$$t: \begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

4.

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PP_r}=(0,-1,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,1,-1)\\ P_r(1,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\left|\begin{array}{rrr}0 & 2 & x-1\\ -1 & 1 & y-1\\ 1 & -1 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow y+z-1=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PP_s}=(0,1,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,0,1)\\ P_s(1,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\left|\begin{array}{rrr}0 & -1 & x-1\\ 1 & 0 & y-1\\ 1 & 1 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow x-y+z=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}y+z-1=0\\ x-y+z=0\end{array}\right.$$

Problema 2 Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$ respecto a la recta r de ecuación

$$r: x-1=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{2}$$

Solución:

Se sigue el siguiente procedimiento:

- Se calcula un planoπ perpendicular a r que contenga al punto A:

  $$x+2y+2z+\lambda=0\Longrightarrow -3+2+12+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-11$$

  El plano es $\pi: x+2y+2z-11=0$

- Calculamos el punto de corte entre π y r:

  $$\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=-3+2\lambda\\ z=-1+2\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow (1+\lambda)+2(-3+2\lambda)+2(-1+2\lambda)-11=0\Longrightarrow \lambda=2$$

  luego el punto $A'(3,1,3)$.

- Tenemos:

  $$\frac{A+A''}{2}=A'\Longrightarrow A''=2A'-A=2(3,1,3)-(-3,1,6)=(9,1,0)$$

Problema 3 Dada la recta

$$r:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

encontrar los puntos de la recta que se encuentran a distancia 3 del punto $P(2,0,1)$

Solución:

Construimos la esfera de centro P y radio $r = 3$:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$$

Los puntos que buscamos serán los puntos de corte de esta esfera con la recta

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Luego:

$$(2\lambda - 2)^2 + (1+\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2 = 9 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3}, \ \ \lambda = 0$$

Si $\lambda = 0 \Longrightarrow P_1(0, 1, -1)$.

Si $\lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow P_2\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.