Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2ax^2 + bx + 2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 3]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - 2bx + 1) = 4a - 4b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (2ax^2 + bx + 2) = 8a + 2b + 2 \end{array} \right. \Longrightarrow 4a + 6b = -1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 2b & \text{si} \quad x < 2 \\ \\ 4ax + b & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(2^-) = 4a - 2b \\ f'(2^+) = 8a + b \end{cases} \Longrightarrow 4a + 3b = 0$$

3. $$\begin{cases} 4a + 6b = -1 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/3 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} & \text{si} \quad x < 2 \\ x - \frac{1}{3} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 3]$ y derivable en el $(0, 3)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 3)$ que cumple

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{9/2}{3} = \frac{3}{2}.$$

Si cogemos la primera rama $x < 3$:

$$f'(c) = 1/2c + 2/3 = 3/2 \Longrightarrow c = 5/3 \in (0, 3)$$

Si cogemos la segunda rama $x \geq 3$:

$$f'(c) = c - 1/3 = 3/2 \Longrightarrow c = 11/6 \in (0, 3)$$

Los puntos $c \in (0, 3)$ a los que hace referencia el teorema será $c = 5/3$ y $c = 11/6$.

Problema 2 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0, 1)$, tenga un extremo relativo en $(1, 2)$ y un punto de inflexión en $x = 2$

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

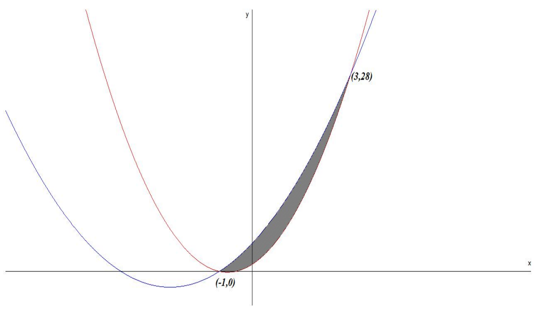
$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow d = 1 \\ f(1) = 2 \Longrightarrow a + b + c + d = 2 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f''(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/4 \\ b = -3/2 \\ c = 9/4 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + 1,$$

$f''(1) = 6a + 2b = 3/2 - 3 = -3/2 < 0 \Longrightarrow$ el extremo en el punto $(1, 2)$ es un máximo.

Problema 3 Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = x^2 + 5x + 4$.

Solución:



$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 5x + 4 \Longrightarrow x = -1, \ \ x = 3$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - 2x - 3)\, dx = \frac{x^2}{2} - x - 3x$$

$$S = \int_{-1}^{3} (f(x) - g(x))\, dx = H(3) - H(-1) = -\frac{32}{3}$$

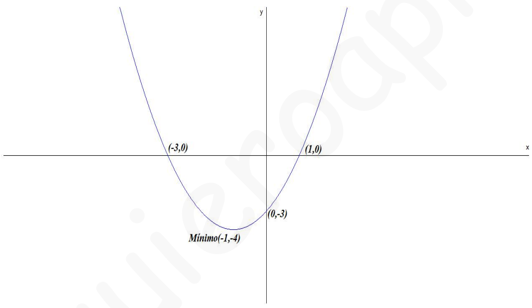
$$S = |S| = \frac{32}{3}\, u^2$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ se pide:

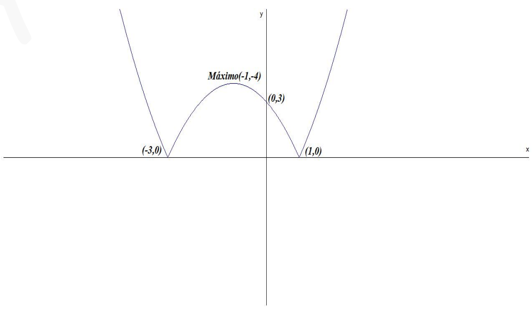
1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

Solución:

1. LLamamos $g(x) = x^2 + 2x - 3$ y la representamos gráficamente:



La función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abcisas. Esta función sería:



Luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si} \quad x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si} \quad -3 \le x < 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo R pero no sería derivable en los puntos $x = -3$ y $x = 1$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f.