1. [**1 punto**] Estudia si las siguientes funciones presentan simetría par (respecto del eje de ordenadas) o impar (respecto al origen de coordenadas).
   a) f(x) = x(x-1)(x+1)
   b) g(x) = $\cos\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$
   c) h(x) = $\frac{x^2+x}{2x-1}$

2. [**1 punto**] Una parábola corta al eje de abscisas en x = 1 y en x = 3. La ordenada del vértice es y = -4. ¿Cuál es la ecuación de esa parábola? (Toma y = k(x-a)(x-b)).

3. [**2 puntos**] Sea f la función dada por f (x) = $\frac{x^3}{x^2-1}$ para $|x| \neq 1$, determina su gráfica.

4. [**1 punto**] A partir de la gráfica de *f*(*x*) = $\frac{1}{x}$, representa:
   a) *g* (*x*) = *f*(*x*) – 2
   b) *h* (*x*) = *f*(*x* – 3)
   c) *i*(*x*) = –*f*(*x*)
   d) *j*(*x*) = |*f*(*x*)|

5. [**1 punto**] Calcula las siguientes integrales indefinidas:
   a) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx$
   b) $\int \operatorname{sen} 2x\,dx$
   c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$
   d) $\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx$

6. [**1 punto**] Calcula las siguientes integrales indefinidas:
   a) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$
   b) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

7. [**1,5 puntos**] Determina el área limitada por la gráfica de la función f(x) = x^2-1 y el eje X en el intervalo [−2, 2].

8. [**1,5 puntos**] Halla el área de la región limitada por las funciones y = $\frac{10}{x}$, y = $\frac{3}{2}x + 2$ e y =2.

Solución del examen

1. **Estudia si las siguientes funciones presentan simetría par (respecto del eje de ordenadas) o impar (respecto al origen de coordenadas).**
   a) f(x) = x(x-1)(x+1)
   b) g(x) = $\cos\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$
   c) h(x) = $\frac{x^2+x}{2x-1}$

   Solución:
   a) f(-x) = -x(-x -1)(-x+1) = -x(x +1) (x -1) = -f(x)
   la función es Impar, es decir, simétrica respecto del origen de coordenadas.

   b) f(-x) = $\cos\left(\frac{x^2+1}{-x}\right) = \cos\left(-\frac{x^2+1}{x}\right) = \cos\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ = f(x)
   la función es par, es decir, simétrica respecto eje de ordenadas.

   c) f(-x) = $\frac{x^2+x}{-2x-1} = -\frac{x^2+x}{2x+1}$
   la función no coincide con f(x) ni con -f(x). la función no es par ni impar.

2. **Una parábola corta al eje de abscisas en x = 1 y en x = 3. La ordenada del vértice es y = -4. ¿Cuál es la ecuación de esa parábola?**

   Solución:
   Como corta al eje de abscisas en x = 1 y en x = 3 la ecuación de una parábola es de la forma
   y = K(x-1).(x-3)

   Que desarrollando la expresión obtenemos:
   y = k(x–1)(x–3) = k(x^2-4x+3)

   El vértice se alcanza en $\frac{-(-4)}{2.1}$ = 2
   Con un valor de f(2) = k(2^2-4.2+3) = -k
   Por lo tanto k = 4 y la ecuación pedida es:
   y = k(x^2-4x+3) = **$4x^2$-16*x*+12**

3. **Sea f la función dada por f (x) = $\frac{x^3}{x^2-1}$ para |x| ≠ 1, determina su gráfica.**

   Solución:
   - El dominio de definición es **R**-{-1,1}, ya que es un cociente de polinomios, y el denominador se anula en x^2 - 1 = 0 ⇒ x^2 = 1 ⇒ x = ±1

   - Cortes con los ejes: Corta a ambos en el punto (0,0)

   - Asíntotas:
     - Asíntotas verticales: Son rectas verticales en las que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores que anulan el denominador:
       $\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3}{x^2-1}$ = -∞, $\lim_{x\to -1^+}\frac{x^3}{x^2-1}$ = +∞
       $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{x^2-1}$ = -∞, $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3}{x^2-1}$ = +∞
       La asíntotas verticales son: **x = -1** y **x = 1**.

     - Asíntotas horizontales: Son rectas de ecuación y = b, tales que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.
       $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2}$ = +∞, $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{x^2}$ = -∞
       No tiene asíntotas horizontales sino ramas parabólicas.

- Asíntotas oblicuas: Son rectas de ecuación y = mx+n que obtenemos dividiendo numerador y denominador.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ \hline -x^3\ +x & x \\ \hline x & \end{array}$$

Aplicando que $\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$ obtenemos $\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$ y por lo tanto:

La recta **y = x** es asíntota oblicua a izquierda y derecha. Se acerca a ella por arriba a izquierda y por debajo a derecha.

- Crecimiento y decrecimiento. Como es derivable estudiamos el signo de su primera derivada $f'(x) = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$. Igualamos a cero la primera derivada para hallar los puntos críticos:

$$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^4-3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2-3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Es positiva y por tanto creciente en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$

Es negativa y por tanto decreciente en $(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3})$

- Máximos y mínimos: Hay un máximo en $\left(-\sqrt{3},\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ ya que la función f pasa de creciente a decreciente y es un máximo relativo. Hay un mínimo en $\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ya que la función f pasa de decreciente a creciente y es un mínimo relativo.

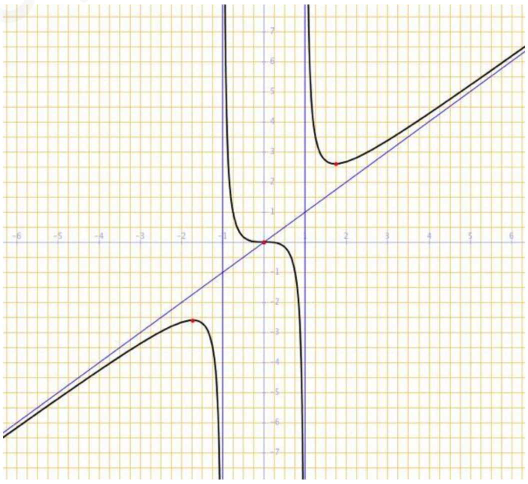
- Concavidad y convexidad. Como la 1ª derivada es derivable estudiamos el signo de su 2ª derivada $f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$. La igualamos a cero para hallar los puntos de inflexión:

$$\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3+6x = 0 \Rightarrow 2x(x^2+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2+3 = 0, \text{sin solución} \end{cases}$$

Sin embargo debemos recordar que la curvatura puede cambiar en las asíntotas verticales x = -1 y x = 1. Tomando valores en los distintos intervalos encontramos que

Es positiva y por tanto convexa (cóncava hacia arriba) en $(-1, 0)\cup(1, \infty)$.

Es negativa y por tanto cóncava (cóncava hacia abajo) en $(-\infty,-1)\cup(0, 1)$



- Puntos de inflexión: Hay un P. I. (0,0) ya que la función f pasa de convexa a cóncava.

La gráfica es la de la figura adjunta

4. **A partir de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 2$

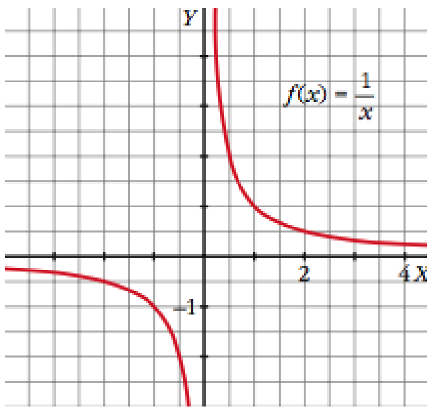
b) $h(x) = f(x-3)$

c) $i(x) = -f(x)$

d) $j(x) = |f(x)|$

Solución:

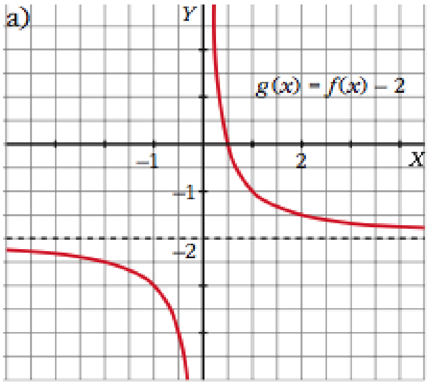
Como ya sabemos la representación gráfica de f(x) es la siguiente:

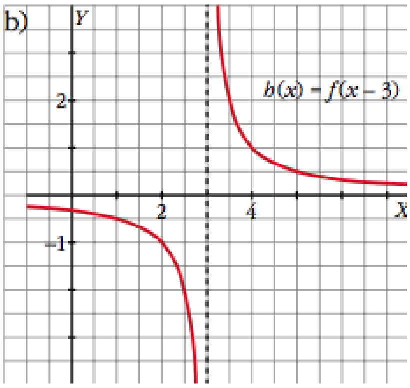


Sabemos que

a) $g(x) = f(x)-2$ tiene la misma gráfica que f desplazada 2 unidades hacia abajo.

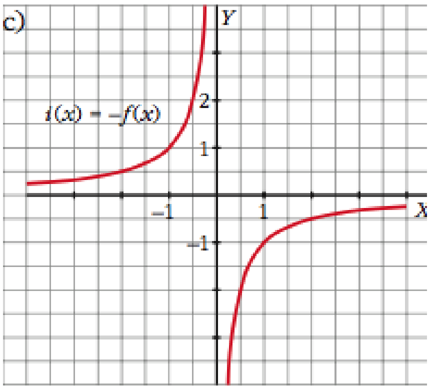
b) $h(x) = f(x-3)$ tiene la misma gráfica que f desplazada 2 unidades hacia la derecha.

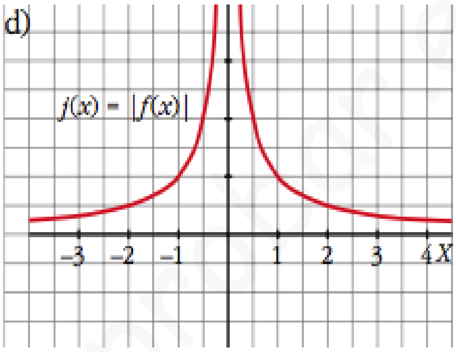




c) $i(x) = -f(x)$ efectúa una simetría de la gráfica de f respecto del eje de abscisas.

d) $j(x) = |f(x)|$ no transforma la gráfica de f en el primer cuadrante y efectúa una simetría de la gráfica respecto del eje de abscisas.





5. **Calcula las siguientes integrales indefinidas:**

a) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx$ b) $\int \text{sen } 2x\,dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$ d) $\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx$

Solución:

a) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3^{5x-1}}{\ln 3} + K = \frac{3^{5x-1}}{10\,\ln 3} + K$

b) $\int \text{sen } 2x\,dx = -\frac{1}{2}.\cos 2x + K$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\,dx = \frac{1}{5}.\text{arc sen } 5x + K$

d) $\int \frac{x}{1+9x^2}\,dx = \frac{1}{6}.\int \frac{d(3x^2)}{1+(3x^2)^2}\,dx = \frac{1}{6}.\text{arc tg } 3x^2 + K$

6. **Calcula las siguientes integrales indefinidas:**

a) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$ b) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

Solución:

a) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{2\sqrt[3]{x}}{x^2}\right)dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,dx - 2\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx = \int x^{-3/2}\,dx - 2\int x^{-5/3}\,dx =$

$= \frac{x^{-1/2}}{-1/2} - 2\,\frac{x^{-2/3}}{-2/3} + K = \frac{-2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + K = -\frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} + K$

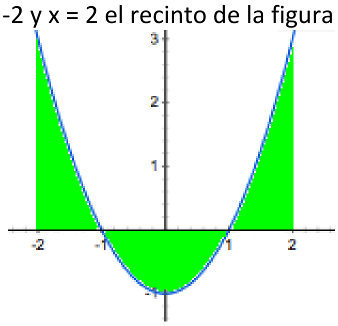
b) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}\right)dx = \int \ln^{-2}x\; d(\ln x) = -\ln^{-1}x + K = -\frac{1}{\ln x} + K$

7. Determina el área limitada por la gráfica de la función f(x) = x^2-1 y el eje X en el intervalo [−2, 2].

Solución:

Hallamos los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas igualando ambas ecuaciones:
$f(x) = 0 \Rightarrow x^2-1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Obteniéndose junto con las rectas x = -2 y x = 2 el recinto de la figura adjunta:



Para hallar el área pedida dividimos dicho recinto en tres determinados por el corte con el eje de ordenadas de la función, tomamos en valor absoluto el segundo que está por debajo del eje de abscisas y finalmente calculamos las integrales definidas mediante la Regla de Barrow:

$$A = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \left|\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx\right| + \int_{1}^{2}(x^2-1)dx = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-2}^{-1} + \left|\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}\right| + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2} =$$

$$= \left[\left(\frac{-1}{3}-(-1)\right)-\left(\frac{-8}{3}-(-2)\right)\right] + \left|\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{-1}{3}-(-1)\right)\right| + \left[\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right] = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3} = 4\ u^2$$

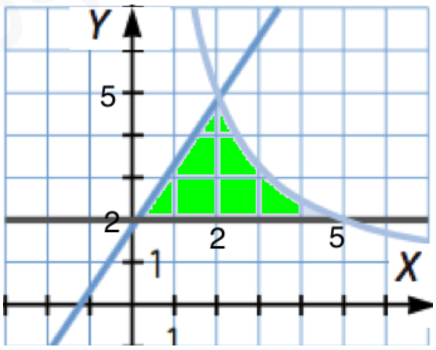
8. Halla el área de la región limitada por las funciones $y = \frac{10}{x}$, $y = \frac{3}{2}x + 2$ e y = 2.

Solución:

Representamos el recinto cuya área nos piden calculando sus puntos de corte.

- Hipérbola $y = \frac{10}{x}$ y recta y = 2: $\frac{10}{x} = 2 \Rightarrow x = 5$
- Hipérbola $y = \frac{10}{x}$ y recta $y = \frac{3}{2}x$: $\frac{10}{x} = \frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow 3x^2+4x-20 \Rightarrow x = -5$ (no válida) y x = 2
- recta $y = \frac{3}{2}x + 2$ y recta y = 2: $\frac{3}{2}x + 2 = 2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0$

Obteniéndose el recinto de la figura adjunta:



Para hallar el área pedida dividimos dicho recinto en dos determinados por los cortes con la recta y = 2 y el corte de la hipérbola $y = \frac{10}{x}$ y recta $y = \frac{3}{2}x$ y finalmente calculamos las integrales definidas mediante la Regla de Barrow:

$$A = \int_0^2\left(\frac{3}{2}x+2-2\right)dx + \int_2^5\left(\frac{10}{x}-2\right)dx = \left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^2 + [10\ln|x| - 2x]_2^5 =$$

$$= \left[\frac{3.4}{4} - 0\right] + |(10\ln 5 - 10) - (10\ln 2 - 4)| = 10\ln\frac{5}{2} - 3\ u^2$$