

Opción A (3ª evaluación)

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Estudia las características de la función $y = -x \cdot \ln x$; con los datos obtenidos representa su gráfica.

Solución:

$$f(x) = -x \cdot \ln x$$

$$\text{Dom } f = (0, +\infty)$$

$f(x)$ es continua y derivable en $(0, +\infty)$ por ser producto de funciones continuas y derivables.

$$\text{Cortes (con eje } OX): f(x) = 0 \Rightarrow -x \cdot \ln x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{porque } 0 \notin \text{Dom } f \\ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0) \end{cases}$$

Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x \cdot \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{(L' \text{ H\^o}pital)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

$f(x)$ no tiene asíntotas.

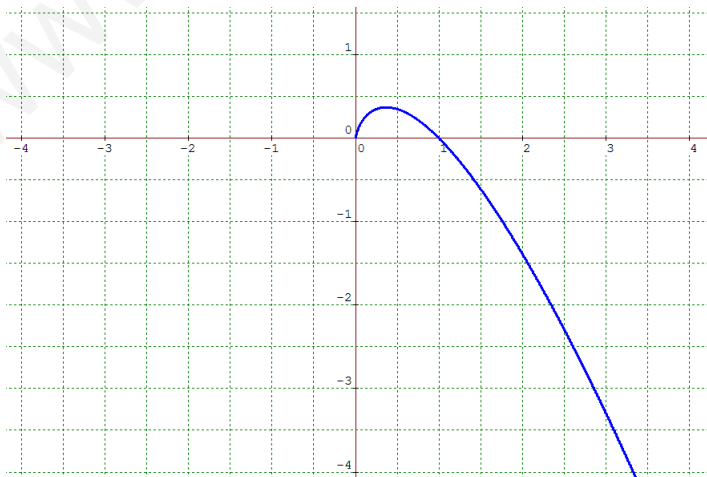
$$f'(x) = -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -1 - \ln x ; \quad f''(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = -e < 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{1}{e}, f(x) \text{ tiene un m\^a}x\text{imo}; f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \cdot (-1) = \frac{1}{e} \Rightarrow \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right) \text{ m\^a}x\text{imo local.}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow f(x) \text{ no presenta puntos de inflexi\^o}n \Rightarrow \text{no hay cambios de curvatura.}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow -1 - \ln x > 0 \Rightarrow \ln x < -1 \Rightarrow x < \frac{1}{e}; f(x) \text{ es creciente en } \left(0, \frac{1}{e}\right) \text{ y es decreciente en } \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$



Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{x}{\ln x}$ en su punto de inflexión.

Solución:

$$y = \frac{x}{\ln x} \Rightarrow \text{la función está definida en } (0, +\infty)$$

$$y' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \Rightarrow y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{1}{x} \cdot (\ln x)^2 - (\ln x - 1) \cdot (2 \ln x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{(\ln x)^2 - (\ln x - 1) \cdot (2 \ln x)}{(\ln x)^4} \Rightarrow y'' = \frac{2 - \ln x}{(\ln x)^3}$$

$$\text{puntos de inflexión: } f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 - \ln x}{(\ln x)^3} \Rightarrow 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2; \quad f(e^2) = \frac{e^2}{\ln e^2} = \frac{e^2}{2}$$

$$\text{punto de tangencia: } \left(e^2, \frac{e^2}{2} \right)$$

$$\text{pendiente: } m = f'(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{(\ln e^2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow r_{\text{tg}} \equiv y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow r_{\text{tg}} \equiv y - \frac{e^2}{2} = \frac{1}{4}(x - e^2) \Rightarrow r_{\text{tg}} \equiv y = \frac{x + e^2}{4}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$$b) \int \frac{x^3}{x^2 + 4x - 5} dx$$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} \left(\text{indeterminación } \frac{0}{0}, \text{ aplicamos la regla del L'Hôpital } \hat{=} \text{, dos veces} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} \hat{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot e^{x^2}}{-\sin x} \hat{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2}}{-\cos x} = \frac{2 \cdot 1 + 0}{-1} = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} = -2$$

$$b) \int \frac{x^3}{x^2 + 4x - 5} dx \text{ (como el grado del numerador es mayor que el del denominador tenemos que dividir)}$$

$$\frac{x^3}{-x^3 - 4x^2 + 5x} \quad \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 4} \Rightarrow \frac{x^3}{x^2 + 4x - 5} = x - 4 + \frac{21x - 20}{x^2 + 4x - 5} \text{ entonces tenemos:}$$

$$-4x^2 + 5x$$

$$\frac{4x^2 + 16x - 20}{21x - 20}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 4x - 5} dx = \int \left(x - 4 + \frac{21x - 20}{x^2 + 4x - 5} \right) dx = \int x dx - 4 \int dx + \int \frac{21x - 20}{x^2 + 4x - 5} dx$$

Ahora tenemos que hacer la integral $\int \frac{21x-20}{x^2+4x-5} dx$, para ello separamos en fracciones simples:

$$x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$$

$$\frac{21x-20}{x^2+4x-5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-1)}{(x-1)(x+5)} = \frac{(A+B)x+(5A-B)}{(x-1)(x+5)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=21 \\ 5A-B=-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=\frac{125}{6} \end{cases}$$

$$\int \frac{21x-20}{x^2+4x-5} dx = \int \left(\frac{1/6}{x-1} + \frac{125/6}{x+5} \right) dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{125}{6} \int \frac{1}{x+5} dx, \text{ entonces queda:}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+4x-5} dx = \int x dx - 4 \int dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{125}{6} \int \frac{1}{x+5} dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{1}{6} \ln|x-1| + \frac{125}{6} \ln|x+5| + C$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Obtén la función $f(x)$, cuya derivada es $f'(x) = (x-1) \cdot e^x$ y de manera que tiene un extremo relativo en un punto del eje de abscisas. Razona si dicho punto es máximo o mínimo.

Solución:

$$\text{Como } f(x) \text{ tiene un extremo relativo} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot e^x = 0 \Rightarrow x = 1$$

entonces, el extremo relativo está en $x=1$ y como nos dice que se encuentra en el eje de abscisas, será el punto $(1,0)$

$$\text{Veamos si es un máximo o un mínimo, } f''(x) = e^x + (x-1) \cdot e^x \Rightarrow f''(x) = x \cdot e^x; \quad f''(1) = e > 0$$

por tanto, en el punto $(1,0)$ la función $f(x)$ presenta un mínimo relativo.

Buscamos ahora $f(x)$, sabiendo que el punto $(1,0)$ pertenece a $f(x)$, es decir, $f(1) = 0$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x-1) \cdot e^x dx; \text{ esta integral debemos hacerla por partes: } \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

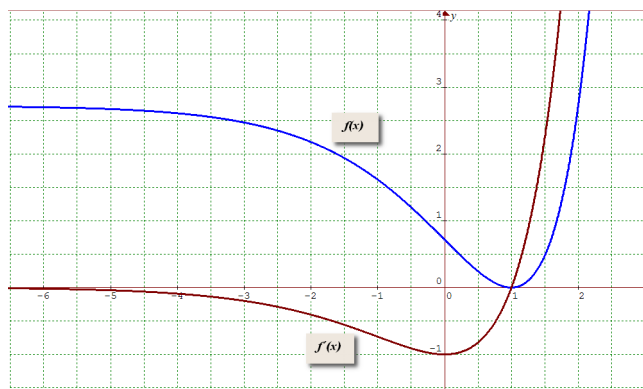
$$\int \underbrace{(x-1)}_u \cdot \underbrace{e^x}_{dv} dx = (x-1) \cdot e^x - \int e^x dx = (x-1) \cdot e^x - e^x + C = (x-2) \cdot e^x + C$$

$$\begin{cases} u = (x-1) \Rightarrow du = d(x-1) = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$\int dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\text{entonces } f(x) = (x-2) \cdot e^x + C, \text{ pero como } f(1) = 0 \Rightarrow (1-2) \cdot e + C = 0 \Rightarrow -e + C = 0 \Rightarrow C = e$$

$$f(x) = (x-2) \cdot e^x + e$$

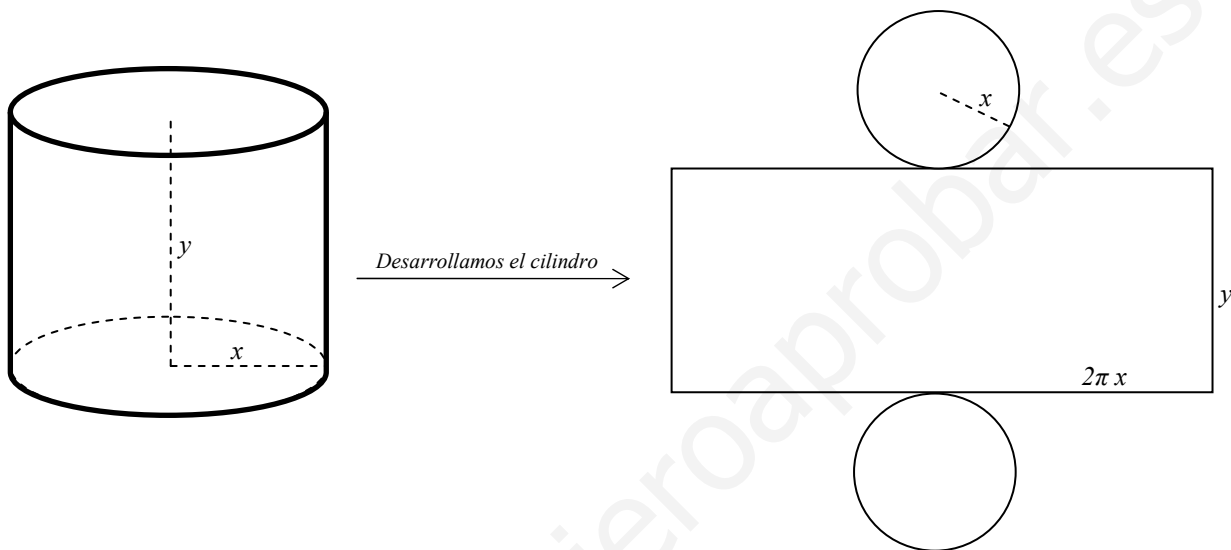


Opción B (3ª evaluación)

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total igual a 54 m^2 . Determinar el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo, y calcular dicho volumen.

Solución:



El volumen del cilindro es $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, en nuestro caso $V = \pi x^2 y$

como el área total del cilindro es $54 \text{ m}^2 \Rightarrow 2\pi x^2 + 2\pi xy = 54 \Rightarrow y = \frac{54 - 2\pi x^2}{2\pi x} \Rightarrow y = \frac{27 - \pi x^2}{\pi x}$

entonces tenemos que el volumen es una función de x , $V(x) = \pi x^2 \cdot \frac{27 - \pi x^2}{\pi x} \Rightarrow V(x) = 27x - \pi x^3$

ahora buscamos el máximo de la función $V(x)$:

$$V'(x) = 27 - 3\pi x^2 ; V'(x) = 0 \Rightarrow 27 - 3\pi x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \\ x = -\frac{3}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

$$V''(x) = -6\pi x \Rightarrow V''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) = -\frac{18\pi}{\sqrt{\pi}} < 0 \Rightarrow \text{para } x = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ el volumen es máximo, } y = \frac{18}{3\sqrt{\pi}} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{dimensiones: } \begin{cases} \text{radio } x = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ m.} \\ \text{altura } y = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \text{ m.} \end{cases} \Rightarrow \text{volumen } V\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) = 27 \cdot \frac{3}{\sqrt{\pi}} - \pi \cdot \frac{27}{\pi \sqrt{\pi}} = \frac{54}{\sqrt{\pi}} \text{ m}^3$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Encuentra los valores de a y b para que la función $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, e^2]$. Para los valores obtenidos de los parámetros, halla el punto o puntos garantizados por el teorema.

Solución:

Para que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio (de Lagrange) en el intervalo $[-1, e^2]$, $f(x)$ debe ser continua en $[-1, e^2]$ y derivable en $(-1, e^2)$.

-. $f(x)$ será continua en $[-1, e^2]$ cuando lo sea en el punto $x=1$, puesto que $y=2x^2+ax+b$ es continua en \mathbb{R} por ser polinómica, con lo que $f(x)$ es continua en $(-\infty, 1)$, e $y=\ln x-1$ es continua en $(0, +\infty)$, con lo que $f(x)$ también es continua en $(1, +\infty)$.

$$f(x) \text{ será continua en } x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \ ; \ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + ax + b) = 2 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x - 1) = -1 \end{cases} \ ; \ f(1) = 2 + a + b$$

entonces, para que $f(x)$ sea continua en $[-1, e^2]$, debe cumplirse $2 + a + b = -1$

-. Por la misma razón que para el caso de la continuidad, $f(x)$ será derivable en $(-1, e^2)$ cuando lo sea en $x=1$

$$f(x) \text{ es derivable en } x=1 \Leftrightarrow f'_-(1) = f'_+(1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x + a) = 4 + a \\ f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 + a = 1$$

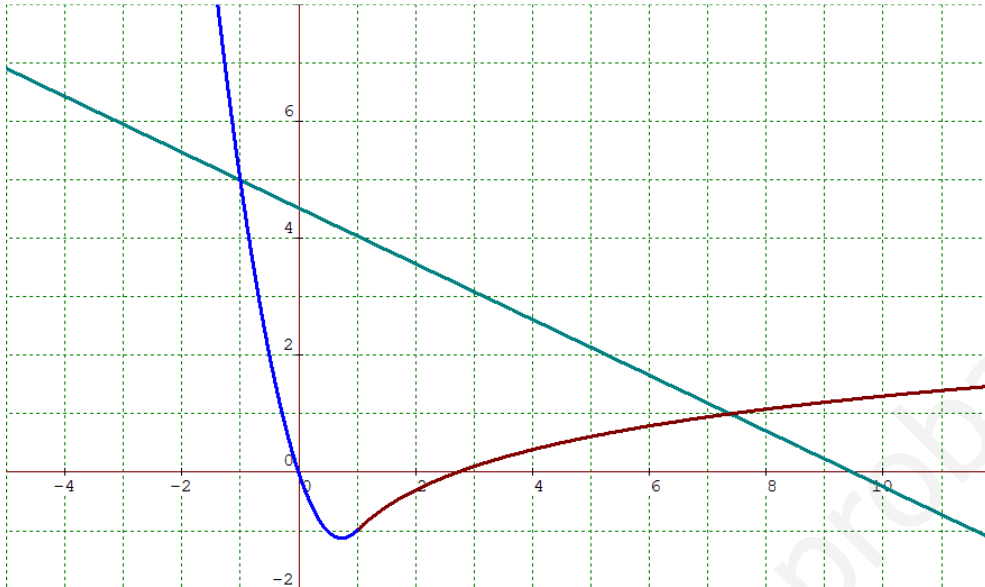
$$f(x) \text{ cumplirá las condiciones del teorema de Lagrange} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + a + b = -1 \\ 4 + a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}; \text{ busquemos ahora el valor o valores garantizados por}$$

$$\text{el teorema: debe existir } c \in (-1, e^2), \quad f'(c) = \frac{f(e^2) - f(-1)}{e^2 - (-1)} = \frac{1 - 5}{e^2 + 1} = \frac{-4}{e^2 + 1}$$

$$\begin{cases} 4x - 3 = \frac{-4}{e^2 + 1} \Rightarrow 4x = \frac{-4}{e^2 + 1} + 3 \Rightarrow x = \frac{-1}{e^2 + 1} + \frac{3}{4} \text{ es válido porque } \frac{-1}{e^2 + 1} + \frac{3}{4} < 1 \text{ y } \frac{-1}{e^2 + 1} + \frac{3}{4} \in (-1, e^2) \\ \frac{1}{x} = \frac{-4}{e^2 + 1} \Rightarrow x = -\frac{e^2 + 1}{4} \text{ no es válido porque } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x > 1 \text{ y } -\frac{e^2 + 1}{4} < 0 \end{cases}$$

Esto quiere decir que la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = \frac{3}{4} - \frac{1}{e^2 + 1} = \frac{3e^2 - 1}{4e^2 + 4}$ es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(-1, f(-1))$ y $(e^2, f(e^2))$.



Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x\sqrt{1+4x^2} dx$

b) $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$

Solución:

a) $\int x \cdot \sqrt{1+4x^2} dx$, esta integral es del tipo $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int x \cdot \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{8} \int (1+4x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 8x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{(1+4x^2)\sqrt{1+4x^2}}{12} + C$$

b) $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$, esta integral es del mismo tipo que la anterior. Podemos usar el cambio $\begin{cases} \operatorname{sen} x = t \\ d(\operatorname{sen} x) = \cos x dx = dt \end{cases}$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x dx = \int \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x dx \xrightarrow{\text{cambio}} \int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt = \int t^{-2} dt - \int dt = \frac{t^{-1}}{-1} - t = -\frac{1}{t} - t = -\frac{1+t^2}{t}$$

$$\xrightarrow{\text{deshacemos el cambio}} -\frac{1+t^2}{t} = -\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} + C$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

- Encontrar sus puntos singulares (máximos, mínimos y puntos de inflexión), y calcular el valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - f(x)]$.
- Hallar la primitiva de la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ cuya gráfica pasa por el punto $(0, -2)$.

Solución:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}; \text{ veamos cuando } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

en el punto $x = 0$ $f(x)$ tendrá, posiblemente, un máximo o un mínimo local. Para determinarlo usamos $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}; f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{en } x = 0 \text{ } f(x) \text{ presenta un mínimo local.}$$

Como $f(0) = 0 \Rightarrow$ el mínimo está en el punto $(0, 0)$

$$\text{Para buscar los puntos de inflexión resolvemos la ecuación } f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Los puntos de inflexión de la curva están en $(1, \ln 2)$ y $(-1, \ln 2)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(x^2 + 1)] = (\text{indeterminación } \infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x - \ln(x^2 + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^x}{x^2 + 1} \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} \right] = \\ &= \left(\text{indeterminación } \frac{\infty}{\infty}, \text{ aplicamos la regla de L'Hôpital} \right) \hat{=} \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \right] \hat{=} \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} \right] = \ln(+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Ahora tenemos que encontrar la primitiva de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ que pasa por el punto $(0, -2)$, es decir, buscamos:

$F(x) = \int \ln(x^2 + 1) dx$, tal que cumpla $F(0) = -2$. La integral la resolveremos por partes.

$$\int \underbrace{\ln(x^2 + 1)}_u \underbrace{dx}_{dv} = x \cdot \ln(x^2 + 1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \left[\int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \right] =$$

$$\begin{cases} u = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} x^2 & \frac{x^2 + 1}{1} \\ -x^2 - 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctg x + C$$

$$\text{Entonces } F(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctg x + C \text{ y } F(0) = -2 \Rightarrow 0 - 0 + 0 + C = -2 \Rightarrow C = -2$$

$$F(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctg x - 2$$

1ª evaluación

Ejercicio 1.

Sean A , B y X tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican la relación $A \cdot X \cdot B = I$, siendo I la matriz unidad. Se pide:

- Si el determinante de A es igual a -3 y el determinante de B es igual a 4 , calcula, razonadamente, el determinante de la matriz X .
- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, calcula, de forma razonada, la matriz X .

Ejercicio 2.

Discutir y resolver el siguiente sistema según los valores del parámetro k .

$$\begin{cases} ky + (k+1)z = k \\ kx + z = k \\ x + kz = k \end{cases}$$

Ejercicio 3.

Encuentra los valores de a para que vectores de \mathbb{R}^4 , $e_1 = (a, -a, 1, 1)$, $e_2 = (-1, a, -1, -1)$, $e_3 = (-1, -1, a, 0)$, $e_4 = (0, 1, 1, a)$ sean linealmente dependientes y determina una combinación lineal de ellos no nula.

2ª evaluación

Ejercicio 1.

Hallar la ecuación de la recta s que pasa por el punto $P(-2, 0, -7)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.

Se consideran los puntos $A(1, -2, 3)$ y $B(0, 2, 1)$, se pide:

- Ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por A y por B .
- La ecuación del plano π que está a igual distancia de A y de B .
- La distancia al origen de la recta que obtenemos al cortar el plano π , del apartado anterior, con el plano $\pi' \equiv 2y - z = 0$.

Ejercicio 3.

Sea el tetraedro limitado por los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 3$, $\pi_2 \equiv x - z = 0$, $\pi_3 \equiv y - z = 0$, $\pi_4 \equiv z = 0$. Se pide:

- Obtener el área de la cara situada sobre el plano π_4 .
- Calcular la ecuación de la altura sobre la cara que está en el plano π_4 .
- Hallar el volumen del tetraedro.