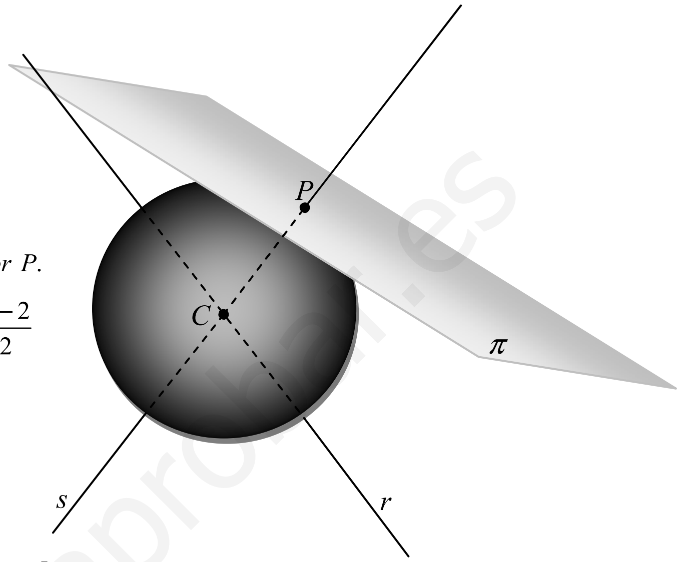
Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula la ecuación de una esfera que tiene su centro en la recta $r \equiv x-3=y=\frac{z}{2}$, y es tangente al plano $\pi \equiv 2x-y+2z-4=0$ en el punto $P(1,2,2)$.

Solución:



$$r \equiv x-3=y=\frac{z}{2} \quad , \quad P(1,2,2) \quad , \quad \pi \equiv 2x-y+2z-4=0$$

Calculamos la recta s perpendicular al plano π y que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector normal al plano, } \vec{\eta}=(2,-1,2) \\ \text{Punto } P(1,2,2) \end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{2}$$

El centro C de la esfera será el punto de corte entre r y s

$$r \equiv x-3=y=\frac{z}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-3=y \\ y=\frac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1} \\ \frac{x-1}{2}=\frac{z-2}{2} \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases}$$

$$r \cap s \Rightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ 2y-z=0 \\ x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases} \quad , \quad |\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{\substack{F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -2+4-12 \neq 0$$

Entonces $Rang\ \overline{A}=4>Rang\ A \Rightarrow$ *Sistema incompatible* $\Rightarrow$ *r y s no se cortan y el problema no tiene solución.*

Nota

Si la recta r hubiera tenido por ecuación $r \equiv x-3=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$

$$r \equiv x-3=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-3=\frac{y-2}{-1} \\ x-3=\frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y=5 \\ 3x-z=9 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases}$$

$$r \cap s \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ 3x-z=9 \\ x+2y=5 \\ x-z=-1 \end{cases} \quad , \quad |\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{F_2=F_2-F_4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad y \quad Rang\ A=3 \text{ puesto que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces $Rang\ \overline{A}=3=Rang\ A \Rightarrow$ *Sistema compatible determinado.* $C=\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-z=9 \\ x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow C=(5,0,6)$

Ahora el radio de la esfera será $|\overrightarrow{PC}|$, $\overrightarrow{PC}=(4,-2,4) \Rightarrow R=|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{16+4+16}=6$

y la ecuación de la esfera es $S \equiv (x-5)^2+y^2+(z-6)^2=36$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dados los puntos $A(1,-1,1)$, $B(1,2,2)$, $C(2,1,1)$, se pide:

- Encuentra la ecuación del plano π que contiene a A, B, y C.
- Calcula el área del triángulo que forman las intersecciones de π con los ejes de coordenadas.
- Halla las coordenadas del punto P que equidista de los puntos A, B y C y es coplanario con ellos.

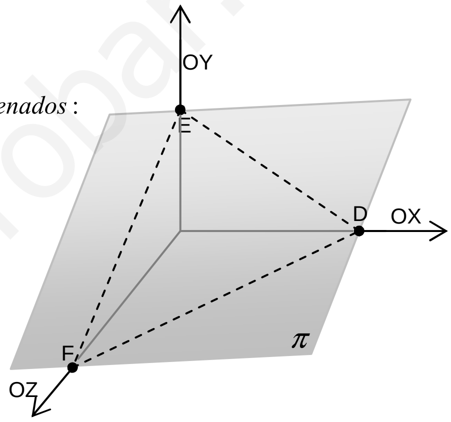
Solución:

$A(1,-1,1)$, $B(1,2,2)$, $C(2,1,1)$

Para encontrar la ecuación del plano que determinan A, B y C necesitamos un punto y dos vectores con direcciones diferentes:

$$\pi \equiv \begin{cases} punto\ \ A(1,-1,1) \\ vector\ \ \overrightarrow{AB}=(0,3,1) \\ vector\ \ \overrightarrow{AC}=(1,2,0) \end{cases} \Rightarrow \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv -2x+y-3z+6=0$$

Vamos a calcular los cortes del plano $\pi \equiv -2x+y-3z+6=0$ con los ejes coordenados:



$$Eje\ \ OX \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow D=\pi \cap OX \quad \begin{cases} -2x+y-3z+6=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow D(3,0,0)$$

$$Eje\ \ OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow E=\pi \cap OY \quad \begin{cases} -2x+y-3z+6=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow E(0,-6,0)$$

$$Eje\ \ OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow F=\pi \cap OZ \quad \begin{cases} -2x+y-3z+6=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow F(0,0,2)$$

$$Área\ del\ triángulo\ DEF = \frac{\left|\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DF}\right|}{2} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DE}=(-3,-6,0) \\ \overrightarrow{DF}=(-3,0,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DF} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12\vec{e}_1+6\vec{e}_2-18\vec{e}_3$$

$$Área = \frac{\sqrt{(-12)^2+6^2+(-18)^2}}{2} = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}\ u^2$$

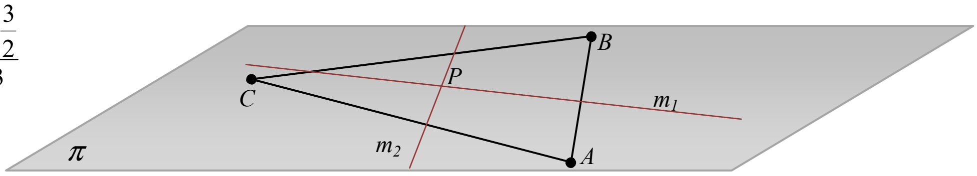
Para calcular P, punto que equidista de A, B, C tenemos más de un camino:

podemos obtener P como el punto de corte de las mediatrices, contenidas en π, de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

$$m_1\left(mediatriz\ de\ \overline{AB}\right) \equiv \begin{cases} punto\ M_1,\ punto\ medio\ de\ A\ y\ B \ \Rightarrow\ M_1\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) \\ vector\ \vec{v}\ perpendicular\ a\ \overrightarrow{AB}\ y\ al\ vector\ normal\ al\ plano\ \pi,\ \vec{\eta}=(-2,1,-3) \end{cases}$$

$$\vec{v}' = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\eta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10\vec{e}_1-2\vec{e}_2+6\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{v}'=(-10,-2,3)\ ,\ \vec{v}=(5,1,-3)\ tiene\ la\ misma\ dirección.$$

$$m_1 \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} = \frac{z-\frac{3}{2}}{-3}$$



$$m_2\left(\text{mediatriz de } \overline{AC}\right) \equiv \begin{cases} \text{punto } M_2, \text{ punto medio de } A \text{ y } C \;\Rightarrow\; M_2\left(\dfrac{3}{2}, 0, 1\right) \\ \text{vector } \vec{u} \text{ perpendicular a } \overrightarrow{AC} \text{ y al vector normal al plano } \pi, \; \vec{\eta} = (-2, 1, -3) \end{cases}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{\eta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \;\Rightarrow\; \vec{u} = (-6, 3, 5) \;,\; m_2 \equiv \frac{x - \frac{3}{2}}{-6} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{5}$$

Ahora $P = m_1 \cap m_2$; *para cortar las rectas podemos ponerlas en parámetricas e igualar:*

$$m_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} + \lambda \\ z = \dfrac{3}{2} - 3\lambda \end{cases} \;,\; m_2 \equiv \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - 6\mu \\ y = 3\mu \\ z = 1 + 5\mu \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 1 + 5\lambda = \dfrac{3}{2} - 6\mu \\ \dfrac{1}{2} + \lambda = 3\mu \\ \dfrac{3}{2} - 3\lambda = 1 + 5\mu \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 5\lambda + 6\mu = \dfrac{1}{2} \\ \lambda - 3\mu = -\dfrac{1}{2} \\ 3\lambda + 5\mu = \dfrac{1}{2} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{de las dos primeras} \\ \text{ecuaciones obtenemos:} \\ \lambda = -\dfrac{1}{14} \;,\; \mu = \dfrac{2}{14} \end{cases}$$

sustituímos el valor de λ *en* m_1 *o el valor de* μ *en* m_2 *y obtenemos las coordenadas de* P.

$$\text{Si } \mu = \frac{2}{14} \;\Rightarrow\; P\left(\frac{3}{2} - 6\cdot\frac{2}{14}, 3\cdot\frac{2}{14}, 1 + 5\cdot\frac{2}{14}\right) \;\Rightarrow\; P\left(\frac{9}{14}, \frac{6}{14}, \frac{24}{14}\right) \;\Rightarrow\; P\left(\frac{9}{14}, \frac{3}{7}, \frac{12}{7}\right)$$

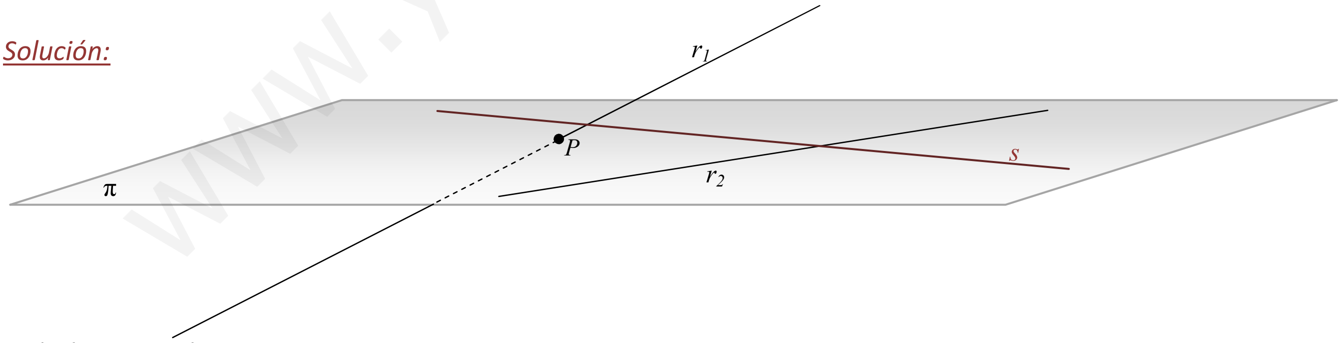
Otro camino sería imponer a P *que esté contenido en el plano* π *(poniendo* π *en paramétricas), calcular los vectores* $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ *y* $\overrightarrow{CP}$ *y resolver el sistema* $\begin{cases} \left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right| \\ \left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{CP}\right| \end{cases}$

En cualquier caso el punto P *será el circuncentro del triángulo* ABC.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Hallar las coordenadas de un punto P que está en la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$, y que determina con la recta $r_2 \equiv \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ un plano que contiene a la recta $s \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

__*Solución:*__



Calculamos un plano π *que contiene a* r_2 *y a* s:

$$r_2 \equiv \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} Q(0, 0, -2) \text{ es un punto de } r_2 \\ \vec{u} = (1, -1, -2) \text{ es un vector con la dirección de } r_2 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = z \end{cases} \;\Rightarrow\; s \equiv \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \;\Rightarrow\; \vec{v} = (0, 1, 1) \text{ es un vector con la dirección de } s$$

$$\begin{cases} \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow \\ \pi \equiv x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Ahora P será el punto de intersección entre la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=-1 \end{cases}$ *y el plano* $\pi \equiv x-y+z+2=0$

$$P \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=-1 \\ x-y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow x=-1 \ , \ y=0 \ , \ z=-1 \quad \Rightarrow P(-1,0,-1)$$

– P es un punto de r_1 *porque es la intersección de la recta y el plano.*
– El plano que determina P con r_2 *es* π*.*
– La recta s está contenida en el plano π*.*

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se consideran las rectas $r \equiv \dfrac{x-4}{2} = y-4 = z \ , \ s \equiv \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=3 \\ z=1+\lambda \end{cases}$.

- Determinar la posición relativa de las dos rectas.
- Calcular la distancia entre ambas rectas.
- Hallar la ecuación de la perpendicular común a r y s.

Solución:

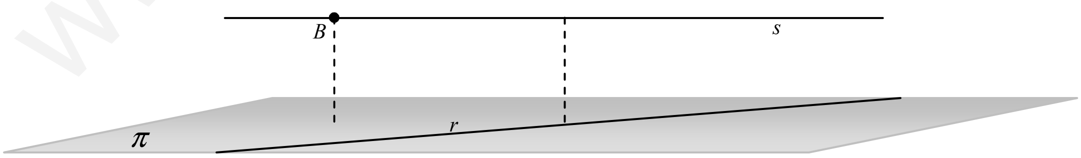
$$r \equiv \frac{x-4}{2} = y-4 = z \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } r, \ A(4,4,0) \\ \text{vector de } r, \ \vec{u}=(2,1,1) \end{cases} \ ; \quad s \equiv \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=3 \\ z=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{punto de } s, \ B(-2,3,1) \\ \text{vector de } s, \ \vec{v}=(3,0,1) \end{cases}$$

como $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *no son proporcionales* $\Rightarrow$ *r y s no son rectas paralelas.*

Si el vector $\overrightarrow{AB}$*, determinado por los puntos* $A \in r$ *y* $B \in s$*, es combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*, las dos rectas son coplanarias y se cortan en un punto. Pero si* $\overrightarrow{AB}$ *es linealmente independiente con* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*, las rectas están en distinto plano y se cruzan.*

$$\overrightarrow{AB}=(-6,-1,1) \ ; \ \begin{vmatrix} -6 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son linealmente independientes} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ están en distinto plano.}$$

Para calcular la distancia entre r y s, hallamos la ecuación de un plano π *que contenga a una de las dos rectas (p. ej. a r) y sea paralelo a la otra (s)*

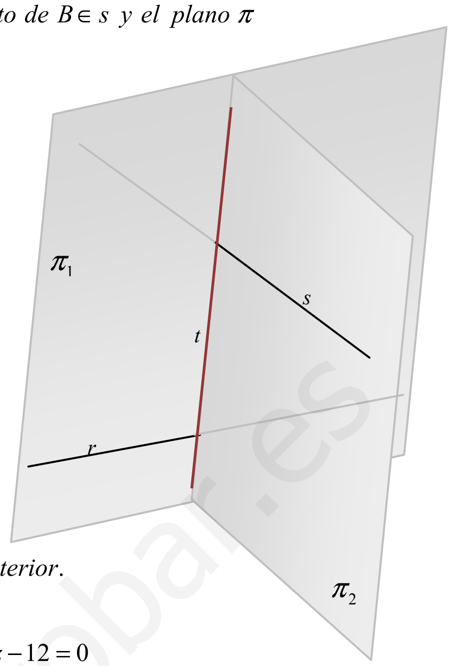


$$\pi \equiv \begin{cases} \text{contiene a la recta } r \Rightarrow \begin{cases} \text{contiene al punto } A(4,4,0) \\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{u}=(2,1,1) \end{cases} \\ \text{es paralelo a la recta } s \Rightarrow \text{tiene la dirección del vector } \vec{v}=(3,0,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv x+y-3z-8=0$$

Ahora la distancia entre las dos rectas será igual a la distancia entre un punto de $B\in s$ *y el plano* π

$$d(s,r)=d(B,\pi)=\frac{\left|1\cdot(-2)+1\cdot 3-3\cdot 1-8\right|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{11}}u$$



Para calcular la perpendicular común a las dos rectas vamos a construir dos planos, π_1 *y* π_2*, de tal forma que:* $\pi_1\equiv\begin{cases}\text{contiene a la recta } r\\ \text{contiene al vector } \vec{u}\wedge\vec{v}\end{cases}$ *y*

$$\pi_2\equiv\begin{cases}\text{contiene a la recta } s\\ \text{contiene al vector } \vec{u}\wedge\vec{v}\end{cases}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3 \;\Rightarrow\; \vec{u}\wedge\vec{v}=(1,1,-3)\,,$$

como vemos $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{\eta}$ *vector normal al plano* π *calculado en el apartado anterior.*

$$\pi_1\equiv\begin{cases}A(4,4,0)\\ \vec{u}=(2,1,1)\\ \vec{u}\wedge\vec{v}=(1,1,-3)\end{cases}\;\Rightarrow\;\pi_1\equiv\begin{vmatrix}x-4 & y-4 & z\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=0\;\Rightarrow\;\pi_1\equiv -4x+7y+z-12=0$$

$$\pi_2\equiv\begin{cases}B(-2,3,1)\\ \vec{v}=(3,0,1)\\ \vec{u}\wedge\vec{v}=(1,1,-3)\end{cases}\;\Rightarrow\;\pi_2\equiv\begin{vmatrix}x+2 & y-3 & z-1\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=0\;\Rightarrow\;\pi_2\equiv -x+10y+3z-35=0$$

Ahora la recta t*, perpendicular común a* r *y* s*, se obtiene como* $t=\pi_1\cap\pi_2 \;\Rightarrow\; t\equiv\begin{cases}-4x+7y+z+12=0\\ -x+10y+3z-35=0\end{cases}$