

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discutir el sistema $\begin{cases} mx + 3y + z = 1 \\ x + my + 3z = 1 \\ x + y + mz = 3 \\ 3x + y + z = m \end{cases}$ según los valores del parámetro, y resolverlo en los casos de compatibilidad.

Solución:

Como es un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas comenzamos analizando el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{cccc} m & 3 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{array} \right); \quad \left| \begin{array}{cccc} m & 3 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{array} \right|_{F_1=F_1+F_2+F_3+F_4} = \left| \begin{array}{cccc} m+5 & m+5 & m+5 & m+5 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{array} \right| = (m+5) \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 3 & 1 & 1 & m \end{array} \right|_{\substack{C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1 \\ C_4=C_4-C_1}} = \\ &= (m+5) \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & m-3 \end{array} \right| = (m+5) \left| \begin{array}{ccc} m-1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 \\ -2 & -2 & m-3 \end{array} \right|_{F_1=F_1+F_3} = (m+5) \left| \begin{array}{ccc} m-3 & 0 & m-3 \\ 0 & m-1 & 2 \\ -2 & -2 & m-3 \end{array} \right|_{C_3=C_3-C_1} = (m+5) \left| \begin{array}{ccc} m-3 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 2 \\ -2 & -2 & m-1 \end{array} \right| = \\ &= (m+5)(m-3) \left| \begin{array}{cc} m-1 & 2 \\ -2 & m-1 \end{array} \right| = (m+5)(m-3)(m^2-2m+5) \Rightarrow (m+5)(m-3)(m^2-2m+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-5 \\ m=3 \end{cases} \end{aligned}$$

El determinante se anula para $m=-5$ y $m=3 \Rightarrow$ si $m \neq -5$ y $m \neq 3$, $\text{Rang}(\bar{A})=4 > \text{Rang}(A) \Rightarrow$ sistema incompatible

Para $m=-5$, $\text{Rang}(\bar{A}) < 4$

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccc} -5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{array} \right| \neq 0; \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right| = 80 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(\bar{A}) = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado} \\ \begin{cases} x-5y+3z=1 \\ x+y-5z=3 \\ 3x+y+z=-5 \end{cases} &\Rightarrow x = \frac{\left| \begin{array}{cc} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 1 \end{array} \right|}{80} = -1; \quad y = \frac{\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{array} \right|}{80} = -1; \quad z = \frac{\left| \begin{array}{cc} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{array} \right|}{80} = -1 \end{aligned}$$

Para $m=3$, $\text{Rang}(\bar{A}) < 4$

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{array} \right| \neq 0; \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right| = 16 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(\bar{A}) = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado} \\ \begin{cases} x+3y+3z=1 \\ x+y+3z=3 \\ 3x+y+z=3 \end{cases} &\Rightarrow x = \frac{\left| \begin{array}{cc} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right|}{16} = 1; \quad y = \frac{\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{array} \right|}{16} = -1; \quad z = \frac{\left| \begin{array}{cc} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{array} \right|}{16} = 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Si A es cualquier matriz con n filas y n columnas tal que $A^3 + A - I = 0$, probar que $\det(A) \neq 0$.

Suponiendo que $\det(A^2) = 9$, calcular el valor de $\det(A^2 + I)$.

Solución:

$$\text{Como } A^3 + A - I = 0 \Rightarrow A^3 + A = I ; \quad A \cdot (A^2 + I) = I \Rightarrow A^{-1} = A^2 + I$$

entonces, existe A^{-1} , con lo que $|A| \neq 0$.

$$\text{Sabemos que } |A^2| = 9 \Rightarrow |A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 \Rightarrow |A| = 3 \text{ o } |A| = -3$$

$$A^2 + I = A^{-1} \Rightarrow |A^2 + I| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, \text{ entonces tenemos que } |A^2 + I| = \frac{1}{3} \text{ o } |A^2 + I| = -\frac{1}{3}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determinar todos los valores de m para los que el siguiente sistema no tenga solución

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx+1 \\ mx-1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Lo primero es ordenar el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx+1 \\ mx-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ -3x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx+1 \\ mx-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=mx+1 \\ -3x-2y=mx-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-m)x+y=1 \\ (m+3)x+2y=1 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ m+3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(\bar{A}) = 2, \text{ para que el sistema no tenga solución } \text{Rang}(A) < 2 \Rightarrow |A| = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ m+3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2m - m - 3 = 1 - 3m ; \quad |A| = 0 \Rightarrow 1 - 3m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Resolver la ecuación matricial $A \cdot (X + C)B' = D$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{Hay que resolver la ecuación } A \cdot (X + C) \cdot B' = D \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot (X + C) \cdot B' \cdot (B')^{-1} = A^{-1} \cdot D \cdot (B')^{-1} ;$$

$$(X + C) = A^{-1} \cdot D \cdot (B')^{-1} ; \text{ entonces, la matriz } X \text{ pedida será } X = A^{-1} \cdot D \cdot (B')^{-1} - C$$

Calculemos A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = -3$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Ahora buscamos $(B')^{-1}$

$$B' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad |B'| = -2 ; \quad B_{11} = -2 \quad B_{21} = -4 \quad \Rightarrow (B')^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot D \cdot (B')^{-1} - C = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro λ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Estudiamos el rango de A según los valores de λ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 - \lambda - 2\lambda + (1+\lambda) + \lambda^2 - 2(1+\lambda) = 2\lambda^2 - 2\lambda$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=1 \end{cases}$$

si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, $Rang(A) = Rang(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema compatible determinado \Rightarrow solución única.

$$\boxed{\text{si } \lambda=0}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad y \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1=3 \neq 0$$

entonces tenemos que $Rang(A) = 2 \neq Rang(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ sistema incompatible.

$\boxed{\text{si } \lambda=1}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ y $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, como $C_2 = C_4$ no hay menores de orden 3 distintos de cero
 $\Rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado.}$

Resolvemos para $\lambda=1$ $\begin{cases} x+2y=2+z \\ x+y=1-2z \end{cases}$, $1^a - 2^a \Rightarrow y = 1+3z \Rightarrow x = -5z \Rightarrow \text{solución: } \begin{cases} x = -5\mu \\ y = 1+3\mu \\ z = \mu \end{cases}$

Resolvamos el sistema para el caso compatible determinado:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2\lambda & 1+\lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(1+\lambda)^2 - 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda + 2\lambda^2 - 4\lambda(1+\lambda)}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{-2\lambda^2 - \lambda + 3}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{(\lambda-1)(-2\lambda-3)}{2\lambda(\lambda-1)} = -\frac{2\lambda+3}{2\lambda}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2\lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2\lambda(1+\lambda) - 1 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda - 2(1+\lambda)}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{2\lambda^2 + \lambda - 3}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{(\lambda-1)(2\lambda+3)}{2\lambda(\lambda-1)} = \frac{2\lambda+3}{2\lambda}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1+\lambda & 2\lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(1+\lambda) + 2\lambda + 4\lambda - 2(1+\lambda) - 2\lambda - 2}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{3\lambda - 3}{2\lambda^2 - 2\lambda} = \frac{3(\lambda-1)}{2\lambda(\lambda-1)} = \frac{3}{2\lambda}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dados los vectores de \mathbb{R}^3 , $a_1 = (1, 2, 3)$; $a_2 = (2, -1, 1)$; $a_3 = (1, -1, -1)$ se pide:

- Comprobar si son linealmente independientes.
- Dado $a_4 \in \mathbb{R}^3$, $a_4 = (3, -1, 2)$, ¿depende linealmente de a_1, a_2 y a_3 ?
- Encontrar una combinación lineal nula de los vectores a_1, a_2, a_3 y a_4 .

Solución:

- a) Veamos si los tres vectores son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{al ser distinto de cero, las tres filas (consideradas como vectores fila) y las tres columnas}$$

(consideradas como vectores columna) son linealmente independientes \Rightarrow los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes.

- b) Como a_1, a_2, a_3 son tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial de dimensión 3 \Rightarrow son base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ cualquier otro vector de \mathbb{R}^3 se puede poner como combinación lineal de $\{a_1, a_2, a_3\} \Rightarrow$ en particular, $a_4 = (3, -1, 2)$ depende linealmente de $\{a_1, a_2, a_3\}$.

$$\begin{aligned}
c) \quad & a_4 = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 \Rightarrow (3, -1, 2) = \alpha_1 \cdot (1, 2, 3) + \alpha_2 \cdot (2, -1, 1) + \alpha_3 \cdot (1, -1, -1) \Rightarrow \\
& (3, -1, 2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = -1 \quad (1^a) + (2^a) - (3^a) \Rightarrow [\alpha_3 = 0] \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{1}{5}}, \quad \boxed{\alpha_2 = \frac{7}{5}}
\end{aligned}$$

También podemos resolver el sistema por la regla de Cramer:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}; \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{5}; \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\text{Entonces } a_4 = \frac{1}{5} \cdot a_1 + \frac{7}{5} \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \Rightarrow 5 \cdot a_4 = 1 \cdot a_1 + 7 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \Rightarrow [a_1 + 7 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 5 \cdot a_4 = 0]$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

$$\text{Resolver la ecuación: } \begin{vmatrix} 2x & 2 & 3 & x-1 \\ 1 & -x & 1 & -2 \\ x & 5 & x & 4 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2x & 2 & 3 & x-1 \\ 1 & -x & 1 & -2 \\ x & 5 & x & 4 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}_{C_1=C_1-C_3} = \begin{vmatrix} 2x-3 & 2 & 3 & x-1 \\ 0 & -x & 1 & -2 \\ 0 & 5 & x & 4 \\ 0 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = (2x-3) \begin{vmatrix} -x & 1 & -2 \\ 5 & x & 4 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} = (2x-3)(-x^3+3x-2)$$

$$(2x-3)(-x^3+3x-2)=0 \Rightarrow (2x-3)(x-1)^2(-x-2)=0 \Rightarrow \left\{ x=\frac{3}{2}, \quad x=1, \quad x=-2 \right\}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

$$\text{Dada la matriz } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ calcular } A^{-1} \text{ y } A^n; (a \neq 0).$$

Solución:

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 \neq 0 \text{ puesto que } a \neq 0 \Rightarrow \text{existe la matriz } A^{-1}, \text{ calculémosla:}$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a & A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
A &= \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad |A| = a^3 & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0 & A_{22} &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -a \\
&& A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & A_{33} &= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 \\
\Rightarrow A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calculemos ahora A^n

$$\begin{aligned}
A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} ; \quad A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \\
A^4 &= A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix} ; \quad A^5 = A \cdot A^4 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 6a^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4 & 10a^3 \\ 0 & a^5 & 5a^4 \\ 0 & 0 & a^5 \end{pmatrix} \\
\text{entonces tenemos que } A^n &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{(n^2-n)a^{n-2}}{2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} = a^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & na & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & a^2 & na \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$