

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = cx^3$, siendo $c > 0$, se cortan en los puntos $(0,0)$ y en

$\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{c^2}\right)$. Determinar c de manera que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo

$\left[0, \frac{1}{c}\right]$ tenga área $\frac{2}{3}$.

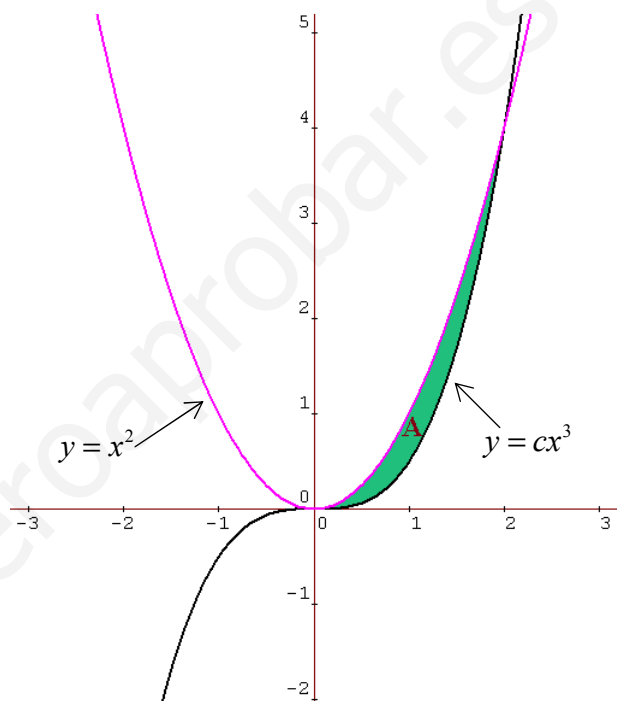
Solución:

$$A = \frac{2}{3}$$

$$A = \int_0^{1/c} x^2 dx - \int_0^{1/c} cx^3 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{1/c} - \left[\frac{cx^4}{4} \right]_0^{1/c} =$$

$$= \frac{1}{3c^3} - \frac{c}{4c^4} = \frac{1}{3c^3} - \frac{1}{4c^3} = \frac{1}{12c^3}$$

$$\frac{1}{12c^3} = \frac{2}{3} \Rightarrow c^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$



Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{5x+4}{x^2-4x+13} dx$

b) $\int x \cdot 7^{x^2} dx$

Solución:

$$\int \frac{5x+4}{x^2-4x+13} dx = 5 \int \frac{x}{x^2-4x+13} dx + 4 \int \frac{1}{x^2-4x+13} dx = 5 \int \frac{x-2+2}{x^2-4x+13} dx + 4 \int \frac{1}{x^2-4x+13} dx = 5 \int \frac{x-2}{x^2-4x+9} dx + 14 \int \frac{1}{x^2-4x+13} dx =$$

$$\frac{5}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+13} dx + 14 \int \frac{1}{x^2-4x+4+9} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2-4x+13) + 14 \int \frac{dx}{9+(x-2)^2} = \frac{5}{2} \ln(x^2-4x+13) + \frac{14}{9} \int \frac{dx}{1+\frac{(x-2)^2}{9}} =$$

$$\frac{5}{2} \ln(x^2-4x+13) + \frac{14}{3} \int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2-4x+13) + \frac{14}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C$$

$$\int x \cdot 7^{x^2} dx = \frac{1}{2 \ln 7} \int (2x \ln 7) \cdot 7^{x^2} dx = \frac{1}{2 \ln 7} \cdot 7^{x^2} + C \quad \text{puesto que si } y = 7^{x^2} \Rightarrow y' = 7^{x^2} \cdot 2x \ln 7$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Esbozar la gráfica de $f(x) = (x^2 - x)e^x$ y calcular el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX.

Solución:

$$f(x) = (x^2 - x)e^x$$

$$\text{Dom}f = \mathbb{R}$$

Cortes con los ejes \Rightarrow OX : (0,0) y (1,0) ; OY : (0,0)

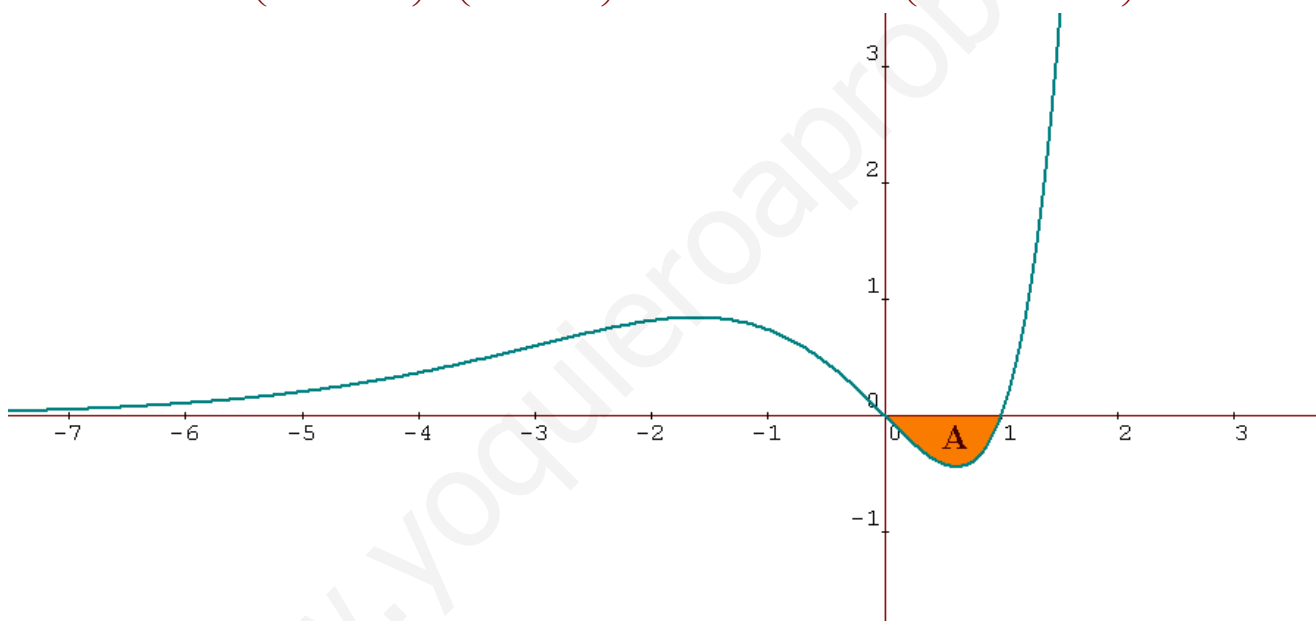
No es simétrica.

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

$$y' = (x^2 + x - 1)e^x ; \quad y'' = (x^2 + 3x)e^x$$

En $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ hay un máximo, en $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ hay un mínimo, en $x = 0$ y en $x = -3$ hay puntos de inflexión.

$f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \infty\right)$. $f(x)$ es decreciente en $\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$



$$A = -\int_0^1 (x^2 - x)e^x dx = -\left[(x^2 - 3x + 3)e^x\right]_0^1 = -[e - 3] = e - 3$$

$$\int (x^2 - x)e^x dx = (x^2 - x)e^x - \int (2x - 1)e^x dx = (x^2 - x)e^x - \left[(2x - 1)e^x - \int 2e^x dx\right] = (x^2 - x)e^x - (2x - 1)e^x + 2e^x = (x^2 - 3x + 3)e^x$$

$$\left. \begin{array}{l} \int u = x^2 - x, \quad du = (2x - 1) dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right\} \int \left. \begin{array}{l} u = 2x - 1, \quad du = 2 dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right\}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x) = -2x + \int_0^{2x} e^{(t^2 - 10t + 24)} dt$.

Solución:

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral obtenemos:

$$f'(x) = -2 + 2e^{(4x^2 - 20x + 24)} \Rightarrow -2 + 2e^{(4x^2 - 20x + 24)} = 0 \Rightarrow e^{(4x^2 - 20x + 24)} = 1 \Rightarrow 4x^2 - 20x + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula el valor de la integral $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx$

Solución:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \left[\sqrt{(1+x^2)^3} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} [\sqrt{4^3} - 1] = \frac{7}{3}$$

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Esbozar la gráfica de $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ y calcular el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

Solución:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\text{Dom}f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

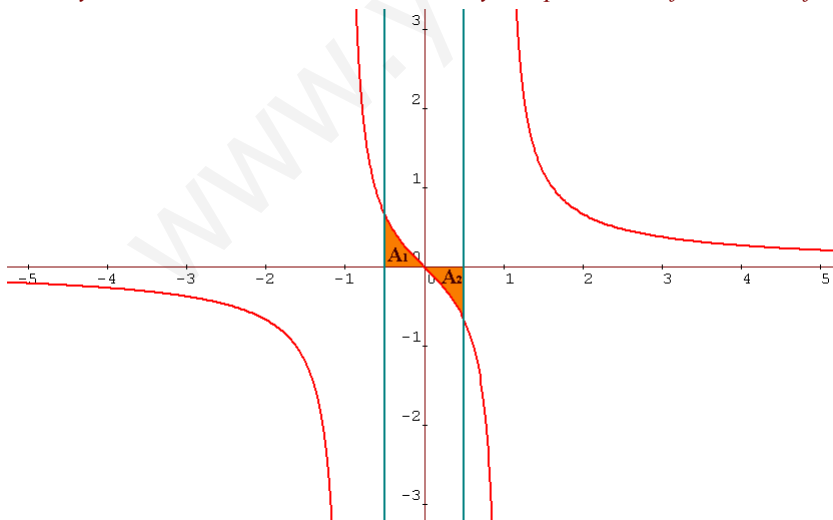
Cortes con los ejes. OX, OY en (0,0)

$f(x)$ es simétrica con respecto al origen de coordenadas, función impar.

Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$. Asíntota horizontal $x = 0$

$$y' = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2}, \quad y'' = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

No hay máximos ni mínimos. En $x = 0$ hay un punto de inflexión. La función es siempre decreciente.



$$A_1 = A_2 \Rightarrow A = 2A_1$$

$$A = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x}{x^2-1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{2x}{x^2-1} dx = \left[\ln|x^2-1| \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = 0 - \ln \frac{3}{4} = -(\ln 3 - \ln 4) = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (\ln x)^2 dx$

b) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x} dx$

Solución:

$$\int (\ln x)^2 dx = x \cdot (\ln x)^2 - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot (\ln x)^2 - 2 \int \ln x \cdot dx = x \cdot (\ln x)^2 - 2 \left[x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right] = x \cdot (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

↑

$$\left\{ \begin{array}{l} u = (\ln x)^2, \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right\}$$

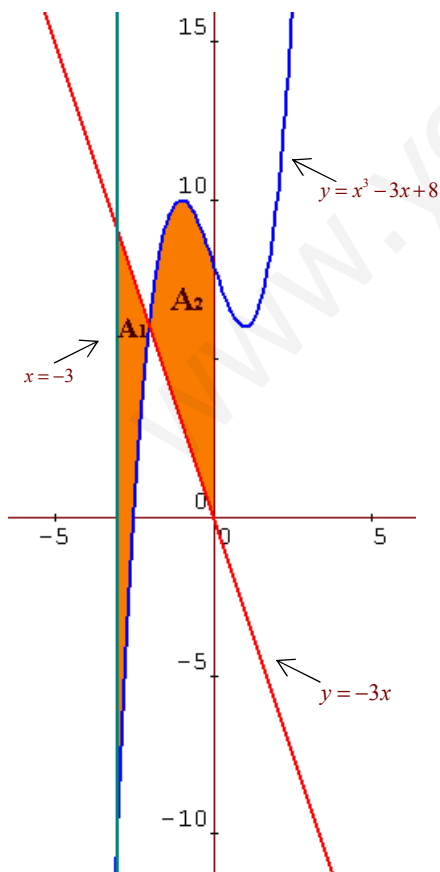
↑

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right\}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos^2 x + 2 \cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = - \int \frac{1}{1 + t^2} dt = -\operatorname{arctg} t = -\operatorname{arctg}(\cos x) + C$$

↑

$$\cos x = t \Rightarrow -\operatorname{sen} x \cdot dx = dt \Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot dx = -dt$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^3 - 3x + 8$, $y = -3x$, y las verticales $x = -3$, $x = 0$.Solución:Las curvas $y = x^3 - 3x + 8$, $y = -3x$ se cortan en $x = -2$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_{-3}^{-2} (-3x - x^3 + 3x - 8) dx + \int_{-2}^0 (x^3 - 3x + 8 + 3x) dx =$$

$$= \int_{-3}^{-2} (-x^3 - 8) dx + \int_{-2}^0 (x^3 + 8) dx = \left[-\frac{x^4}{4} - 8x \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^4}{4} + 8x \right]_{-2}^0 =$$

$$\left[-4 + 16 - \left(-\frac{81}{4} + 24 \right) \right] + [0 - (4 - 16)] = \frac{81}{4}$$