Problema 1 Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{x\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}=\dfrac{4}{3}$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{x\sin x}=-\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=0$

f) $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-1}=e^{-1}$

Problema 2 Hallar el área del recinto limitado por las curvas $y=6x-x^2$ e $y=x^2-2x$

Solución:

$$6x-x^2=x^2-2x \Longrightarrow 2x^2-8x=0 \Longrightarrow x=0 \text{ y } x=4$$

$$S=\left|\int_0^4(6x-x^2-x^2+2x)\,dx\right|=\left|\int_0^4(-2x^2+8x)\,dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right]_0^4\right|=\frac{64}{3}\,u^2$$

Problema 3 Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ (Emplead el cambio de variable $x = t^2$)

b) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}\,dx$

c) $\displaystyle\int x^2 \ln(x-1)\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln\left[(x-1)(x+2)\right] + C$

c) $\displaystyle\int x^2 \ln(x-1)\,dx = \frac{(x^3-1)\ln(x-1)}{3} - \frac{x(2x^2+3x+6)}{18} + C$