

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{9x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x}$$

(Asturias Junio 2011)

Solución:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{9x} = \frac{1}{27}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x} = 1$$

Problema 2 Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{-x} - x}{x \sin x}$$

(Castilla-León Junio 2011)

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

(Madrid Junio 2011)

Solución:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{-x} - x}{x \sin x} = -\frac{5}{2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} = 1$$

Problema 3 Calcular:

1. el valor del límite según los valores del parámetro α

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x + 8}{\alpha x^2 - 2x + 1} \right)^{x+2}$$

2. el valor de n que cumple que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x} \right)^{nx} = 2$$

Solución:

- 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x + 8}{\alpha x^2 - 2x + 1} \right)^{x+2} = \begin{cases} e^{-\frac{3}{\alpha}} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ e^{-\infty} = 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

- 2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x} \right)^{nx} = 2 \implies n = 3 \ln 2$$

Problema 4 Calcular las siguientes integrales:

- 1.

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$$

- 2.

$$\int_0^1 \frac{2}{3 + \sqrt{x}} dx \quad (\text{sugerencia: hacer } x = t^2)$$

(Islas Baleares Junio 2011)

Solución:

- 1.

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} dx = \left. \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{2} \right|_0^1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

- 2.

$$x = t^2 \implies dx = 2t dt, \quad t = \sqrt{x}$$

Los límites de integración serán si $x = 0 \implies t = 0$ y si $x = 1 \implies t =$

- 1:

$$\int_0^1 \frac{2}{3 + \sqrt{x}} dx = 4 \int_0^1 \frac{t}{t + 3} dt = 4 \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{t + 3} \right) dt =$$
$$4t - 12 \ln |t + 3| \Big|_0^1 = 4 - 12 \ln 4 + 12 \ln 3$$

Problema 5 Calcular las siguientes integrales:

1.
$$\int x \ln x \, dx$$

(Islas Canarias Junio 2011)

2.
$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, dx$$

(Comunidad Valenciana Junio 2011)

Solución:

1.
$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

2.
$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \, dx = -\ln|x - 1| + 2\ln|x - 2| + C$$