Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.
8. Área encerrada entre la función, el eje de abcisas y las rectas $x = 1/2$ y $x = 3$.

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^3 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
- $Dom(f) = R - \{0\}$

2. $f(-x) \neq f(x) \Longrightarrow$ No es PAR.

   $f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ No es IMPAR.

3. Asíntotas:

   - **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^3-1}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^3-1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^3-1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3-1}{x^2}=\infty$$

- **Oblicuas:** $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3-1}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^2}-x\right)=0$$

$$y=x$$

4.

$$f'(x)=\frac{x^3+2}{x^3}=0\Longrightarrow x=-\sqrt[3]{2}$$

	$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$	$(-\sqrt[3]{2},0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

Crece: $(-\infty,-\sqrt[3]{2})\cup(0,\infty)$

Decrece: $(-\sqrt[3]{2},0)$

5. La función tiene un máximo en el punto $(-1.259921049,-1.889881574)$ donde pasa de crecer a decrecer, en el punto donde $x=0$ la función pasa de decrecer a crecer, pero no es ni máximo ni mínimo, ya que la recta $x=0$ es una asíntota.
6.

$$f''(x)=\frac{-6}{x^4}\neq 0$$

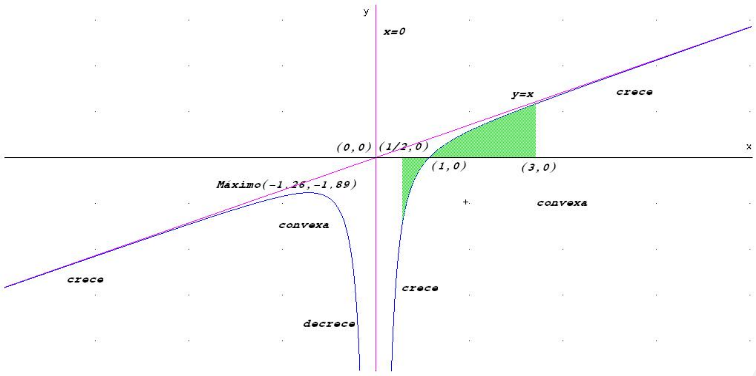
Luego no hay puntos de inflexión.

Como el numerador es siempre negativo, y el denominador es siempre positivo, la segunda derivada es siempre negativa. En conclusión, la función es convexa en todo su dominio.

Convexa: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

7. Representación

www.yoquieroaprobar.es



8. La función tiene un cero en el intervalo de integración, esto quiere decir que, tendremos que integrar entre $1/2$ y 1, y posteriormente entre 1 y 3. Según se puede observar en la gráfica en el intervalo $(1/2, 1)$ el área será negativa, mientras que en el intervalo $(1, 3)$ será positiva. El área total será la suma de los valores absolutos de las áreas obtenidas.

   Calculamos la primitiva:

$$F(x) = \int \frac{x^3 - 1}{x^2}\, dx = \int \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{8}, \qquad F(1) = \frac{3}{2}, \qquad F(3) = \frac{29}{6}$$

$$S_1 = \int_{1/2}^{1} \frac{x^3 - 1}{x^2}\, dx = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{17}{8} = -\frac{5}{8}$$

$$S_2 = \int_{1}^{3} \frac{x^3 - 1}{x^2}\, dx = F(3) - F(1) = \frac{29}{6} - \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$$

$$\acute{A}rea = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{8} + \frac{10}{3} = \frac{95}{24} = 3.958\ u^2$$

www.yoquieroaprobar.es