

Página 183

REFLEXIONA Y RESUELVE

Diagonal de un ortoedro

- Halla la diagonal de los ortoedros cuyas dimensiones son las siguientes:

I) $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$ II) $a = 4$, $b = 12$, $c = 3$ III) $a = 7$, $b = 4$, $c = 5$

I) $\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

II) $\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$

III) $\sqrt{7^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{90} \approx 9,49$

Distancia entre dos puntos

- Halla la distancia de $P(1, 3, 6)$ a $Q(5, 5, 7)$.

$$\overrightarrow{PQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21} \approx 4,58$$

Distancia de un punto a una recta

- Siguiendo el proceso anterior, halla la distancia del punto $P(8, 6, 12)$ a la recta r :

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$

- Ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a r :

$$0 \cdot (x - 8) - 1 \cdot (y - 6) + 2 \cdot (z - 12) = 0; \text{ es decir, } \pi: -y + 2z - 18 = 0$$

- Punto, Q , de corte de r y π :

$$-(1 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 18 = 0$$

$$-1 + \lambda + 14 + 4\lambda - 18 = 0$$

$$5\lambda - 5 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

El punto es $Q(2, 0, 9)$.

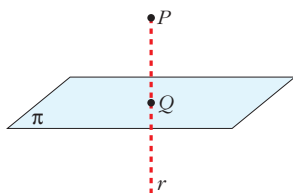
- Calculamos la distancia:

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-6, -6, -3)| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$$

Distancia de un punto a un plano

- **Halla, paso a paso, la distancia del punto $P(4, 35, 70)$ al plano π :**

$$\pi: 5y + 12z - 1 = 0$$



— Hallamos la ecuación de la recta, r , que pasa por P y es perpendicular a π .

— Obtenemos el punto, Q , de intersección de r y π .

— La distancia de P a π es igual a la distancia entre P y Q .

Para el punto y el plano dados:

- Recta, r , que pasa por P y es perpendicular a π :

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 35 + 5\lambda \\ z = 70 + 12\lambda \end{cases}$$

- Punto, Q , de intersección de r y π :

$$5(35 + 5\lambda) + 12(70 + 12\lambda) - 1 = 0$$

$$175 + 25\lambda + 840 + 144\lambda - 1 = 0$$

$$169\lambda + 1014 = 0 \rightarrow \lambda = -6$$

El punto es $Q(4, 5, -2)$.

- Calculamos la distancia:

$$\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, Q) = |\vec{PQ}| = |(0, -30, -72)| = \sqrt{900 + 5184} = \sqrt{6084} = 78$$

Página 184

- 1. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(1, 0, 7)$ y es perpendicular al plano $5x - 3z + 4 = 0$.**

El vector normal al plano, $\vec{n}(5, 0, -3)$, es un vector dirección de la recta r que buscamos. Por tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 0 \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$$

- 2. Halla la ecuación implícita del plano que pasa por $(1, -3, 5)$ y es perpendicular a la recta $\frac{x-2}{5} = \frac{y+7}{-6} = \frac{z}{1}$.**

Si el plano que buscamos, π , es perpendicular a la recta dada, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: $(5, -6, 1)$. Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x-1) - 6(y+3) + 1(z-5) = 0 \rightarrow 5x - 6y + z - 28 = 0$$

3. Halla la ecuación del plano paralelo a $5x - y + 4 = 0$ que pasa por $(1, 0, -3)$.

Si son paralelos, el vector normal es el mismo, $(5, -1, 0)$. Por tanto, la ecuación del plano que buscamos es:

$$5(x - 1) - y + 0(z + 3) = 0 \rightarrow 5x - y - 5 = 0$$

4. Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por $(5, -7, -2)$.

$$r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 4 - 6\lambda \end{cases}$$

Si el plano que buscamos, π , es perpendicular a r , un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: $(5, 2, -6)$

Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x - 5) + 2(y + 7) - 6(z + 2) = 0 \rightarrow 5x + 2y - 6z - 23 = 0$$

Página 185**5. Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s :**

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

El plano pasa por $(5, -1, 8)$ y es paralelo a $(1, 0, 2)$ y a $(3, -1, 4)$. Un vector normal al plano es:

$$(1, 0, 2) \times (3, -1, 4) = (2, 2, -1)$$

La ecuación del plano es:

$$2(x - 5) + 2(y + 1) - 1(z - 8) = 0; \text{ es decir: } 2x + 2y - z = 0$$

6. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a r que pasa por $P(0, -1, -3)$:

$$r: \begin{cases} 3x - 5y + 7z - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de la recta es: $(3, -5, 7) \times (1, -2, 1) = (9, 4, -1)$

Las ecuaciones paramétricas son:
$$\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

Página 187

1. Halla el ángulo entre las rectas r y s :

$$r: \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

El vector dirección de r es $\vec{d}_r = (-5, 3, 0) = \vec{u}$

El vector dirección de s es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\vec{d}_s = (1, -2, 3) \times (2, -1, 0) = (3, 6, 3) // (1, 2, 1) = \vec{v}$$

Por tanto:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|(-5, 3, 0) \cdot (1, 2, 1)|}{\sqrt{25 + 9 + 0} \sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{34} \sqrt{6}} = 0,070014 \rightarrow \alpha = 85^\circ 59' 7''$$

2. Calcula el ángulo que forma la recta $r: \frac{x-3}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ con el plano $\pi: x + 3y - z + 1 = 0$.

Llamamos $90^\circ - \alpha$ al ángulo formado por las direcciones de \vec{d} y \vec{n} sin tener en cuenta sus sentidos.

$$\vec{d}(7, -1, 3) // r \quad \vec{n}(1, 3, -1) \perp \pi$$

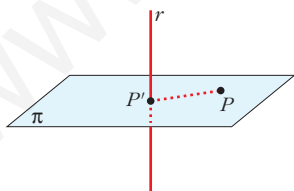
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0,039$$

$$90^\circ - \alpha = 87^\circ 45' 1'' \rightarrow \alpha = 2^\circ 14' 59''$$

Página 189

1. Halla razonadamente la distancia de $P(5, 6, 6)$ a la recta $r: (5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$. Hazlo por cada uno de los tres métodos que has aprendido.

— Solución, obteniendo previamente el punto P' :



• Plano, π , que pasa por P y es perpendicular a r :

$$5(x - 5) - 1(y - 6) + 1(z - 6) = 0$$

$$\text{es decir: } \pi: 5x - y + z - 25 = 0$$

• Intersección, P' , de π y r :

$$5(5\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda - 25 = 0$$

$$25\lambda - 2 + \lambda + \lambda - 25 = 0$$

$$27\lambda - 27 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

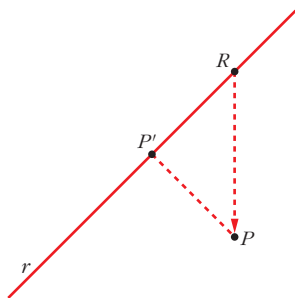
El punto es $P'(5, 1, 1)$.

- Distancia entre P y r :

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(0, -5, -5)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$$

— Segundo método:

$R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$ es un punto genérico de la recta r .



El vector $\overrightarrow{RP}(5 - 5\lambda, 4 + \lambda, 6 - \lambda)$ es variable.

El vector que nos interesa es perpendicular a la recta. Por tanto, cumple:

$$(5, -1, 1) \cdot \overrightarrow{RP} = 0; \text{ es decir:}$$

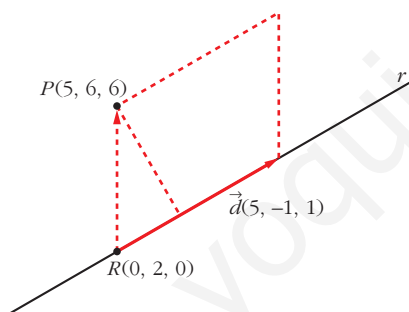
$$5(5 - 5\lambda) - 1(4 + \lambda) + 1(6 - \lambda) = 0$$

$$25 - 25\lambda - 4 - \lambda + 6 - \lambda = 0$$

$$-27\lambda + 27 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

El resto, es igual que con el método anterior.

— Solución directa a partir del producto vectorial:



$$\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

$$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 4, 6) \times (5, -1, 1) = (10, 25, -25)$$

$$|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}| = \sqrt{100 + 625 + 625} = \sqrt{1350}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27}$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{\sqrt{1350}}{\sqrt{27}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$$

Página 190

- 2. Halla la distancia del punto $P(8, 5, -6)$ al plano $\pi: x + 2y - 2z + 3 = 0$.**

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|8 + 10 + 12 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{33}{3} = 11 \text{ u}$$

- 3. Halla la distancia de los puntos $Q(3, 0, 3)$ y $R(0, 0, 0)$ al plano del ejercicio anterior.**

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|3 - 6 + 3|}{3} = 0 \quad (Q \in \pi)$$

$$\text{dist}(R, \pi) = \frac{3}{3} = 1$$

Página 191

4. Calcula la distancia entre la recta y el plano:

$$r: (1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 1 - \lambda) \quad \pi: x + 3y = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d}(-3, 1, -1) // r \\ \vec{n}(1, 3, 0) \perp \pi \end{array} \right\} \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \Rightarrow \vec{d} \perp \vec{n} \Rightarrow r // \pi$$

Puesto que la recta es paralela al plano (o, acaso, contenida en él), la distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de cualquier punto de r a π :

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}[(1, 2, 1), \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2,21$$

5. Calcula la distancia entre estos planos:

$$\pi: y - 5z + 4 = 0 \quad \pi': 2y - 10z = 0$$

Los planos son paralelos, pues sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro:

$P(0, 5, 1)$ es un punto de π' . Por tanto:

$$\text{dist}(\pi, \pi') = \text{dist}(P, \pi) = \frac{|5 - 5 + 4|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{26}} \approx 0,78$$

Página 193

6. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante cada uno de los tres métodos aprendidos:

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

- Primer método:

Hallamos el plano, π , que contiene a r y es paralelo a s :

$$\left. \begin{array}{l} (12, 0, 5) // r \\ (0, 1, 0) // s \end{array} \right\} (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

El punto $(13, 2, 8)$ es de r , y, por tanto, de π .

Ecuación de π : $-5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0$, es decir:

$$-5x + 12z - 31 = 0$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi) = \text{dist}[(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13$$

- Segundo método:

Punto genérico de r : $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$

Punto genérico de s : $S(6, 6 + \mu, -9)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\vec{RS} = (-7 - 12\lambda, 4 + \mu, -17 - 5\lambda)$$

De todos los posibles vectores \vec{RS} , buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \vec{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 \rightarrow -169\lambda - 169 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \\ \vec{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 \rightarrow 4 + \mu = 0 \rightarrow \mu = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s , obtenemos los puntos R y S : $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

- Tercer método:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$$R(13, 2, 8) \quad \vec{d}(12, 0, 5)$$

$$S(6, 6, -9) \quad \vec{d}'(0, 1, 0)$$

$$\vec{RS}(-7, 4, -17)$$

$$[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}'] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \rightarrow \text{Volumen} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d}'| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\text{Por tanto: } \text{dist}(r, s) = \frac{169}{13} = 13$$

7. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante tres métodos distintos:

$$r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5 + 7\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 1 - 5\mu \end{cases}$$

- Primer método:

Hallamos el plano, π , que contiene a r y es paralelo a s :

$$\left. \begin{array}{l} (5, -1, 1) // r \\ (7, -5, -5) // s \end{array} \right\} (5, -1, 1) \times (7, -5, -5) = (10, 32, -18) // (5, 16, -9) \perp \pi$$

El punto $(0, 2, 0)$ es de r , y, por tanto, de π .

Ecuación de π : $5(x - 0) + 16(y - 2) - 9(z - 0) = 0$, es decir:

$$5x + 16y - 9z - 32 = 0$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi) = \text{dist}[(5, 1, 1), \pi] = \frac{|25 + 16 - 9 - 32|}{\sqrt{25 + 256 + 81}} = 0$$

(Las rectas r y s se cortan).

- Segundo método:

Punto genérico de r : $R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$

Punto genérico de s : $S(5 + 7\mu, 1 - 5\mu, 1 - 5\mu)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\vec{RS} = (5 + 7\mu - 5\lambda, -1 - 5\mu + \lambda, 1 - 5\mu - \lambda)$$

De todos los posibles vectores \vec{RS} , buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \vec{RS} \cdot (5, -1, 1) = 0 \rightarrow 27 + 35\mu - 27\lambda = 0 \rightarrow \mu = 0 \\ \vec{RS} \cdot (7, -5, -5) = 0 \rightarrow 35 + 99\mu - 35\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s , obtenemos los puntos R y S : $R(5, 1, 1)$, $S(5, 1, 1)$.

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(R, S) = 0$$

- Tercer método:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$$R(0, 2, 0) \quad \vec{d}(5, -1, 1)$$

$$S(5, 1, 1) \quad \vec{d}'(7, -5, -5)$$

$$\vec{RS}(5, -1, 1)$$

$$[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}'] = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{las dos primeras filas son iguales}).$$

Por tanto: $\text{dist}(r, s) = 0$

Página 195

1. Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en estos puntos:

$$A(1, 3, 5), B(2, 5, 8) \text{ y } C(5, 1, -11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB}(1, 2, 3) \\ \vec{AC}(4, -2, -16) \end{array} \right\} \vec{AB} \times \vec{AC} = (-26, 28, -10)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{26^2 + 28^2 + 10^2} = \sqrt{1560}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1560}}{2} \approx 19,75 \text{ u}^2$$

2. Calcula el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $A(2, 1, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(4, 3, 2)$ y $D(1, 5, 6)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB}(-1, -1, -2) \\ \vec{AC}(2, 2, -2) \\ \vec{AD}(-1, 4, 2) \end{array} \right\} [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volumen} = \frac{30}{6} = 5 \text{ u}^3$$

Página 196

1. Halla el L.G. de los puntos que equidistan de:

a) $A(4, -1, 7)$ y $B(-2, 5, 1)$

b) $\pi: x + y + z - 2 = 0$ y $\pi': x - y + z - 2 = 0$

c) $\pi: x - 3y + 2z - 8 = 0$ y $\pi': x - 3y + 2z = 0$

a) $\text{dist}(X, A) = \text{dist}(X, B)$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 14z + 49 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 2z + 1$$

$$-12x + 12y - 12z + 36 = 0 \rightarrow x - y + z - 3 = 0$$

Es un plano: el plano mediador del segmento AB .

b) $\text{dist}(X, \pi) = \text{dist}(X, \pi')$

$$\frac{|x + y + z - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{|x - y + z - 2|}{\sqrt{3}} \quad \text{Dos posibilidades:}$$

- $x + y + z - 2 = x - y + z - 2 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0$

- $x + y + z - 2 = -x + y - z + 2 \rightarrow 2x + 2z - 4 = 0 \rightarrow x + z - 2 = 0$

Son dos planos: los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y π' . Los dos planos obtenidos se cortan en la recta r determinada por los puntos $(1, 0, 1)$ y $(0, 0, 2)$, al igual que π y π' .

Además, son perpendiculares, pues $(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0$.

c) $\text{dist}(X, \pi) = \text{dist}(X, \pi')$

$$\frac{|x - 3y + 2z - 8|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{|x - 3y + 2z|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} \quad \text{Dos posibilidades:}$$

- $x - 3y + 2z - 8 = x - 3y + 2z \rightarrow -8 = 0 \rightarrow \text{Imposible.}$

- $x - 3y + 2z - 8 = -x + 3y - 2z \rightarrow 2x - 6y + 4z - 8 = 0 \rightarrow x - 3y + 2z - 4 = 0$

Los planos π y π' son paralelos. El plano obtenido es también paralelo a ellos.

Página 197

2. Averigua si $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 25 = 0$ corresponde a la ecuación de una esfera, y halla su centro y su radio.

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D} = \sqrt{1 + 25 + 0 - 25} = 1$$

Es una esfera de radio 1. Su centro es $(-1, 5, 0)$.

3. Halla el radio de la circunferencia en la que el plano $4x - 3z - 33 = 0$ corta a la esfera $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 169$.

La esfera tiene el centro en $Q(2, -5, 0)$ y su radio es $R = 13$.

$$\text{La distancia de } Q \text{ al plano es: } d = \frac{|8 - 0 - 33|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\text{Por tanto: } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

El radio de la circunferencia es 12.

4. Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a $O(0, 0, 0)$ y $Q(10, 0, 0)$ es 68. Tras efectuar los cálculos, comprueba que la superficie resulta ser una esfera de centro $(5, 0, 0)$ y radio 3.

$$(x^2 + y^2 + z^2) + [(x - 10)^2 + y^2 + z^2] = 68$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 20x + 100 + y^2 + z^2 = 68$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20x + 32 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Es una esfera de centro $(5, 0, 0)$ y radio 3.

Página 198

5. Halla el L.G. de los puntos cuya suma de distancias a $F(0, 0, 5)$ y $F'(0, 0, -5)$ es 26.

$$\text{dist}(X, F) + \text{dist}(X, F') = 26$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 26$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} = 26 - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$$

$$x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 676 + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{(z + 5)^2} - 52 \sqrt{\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{(z + 5)^2}}$$

$$52 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 676 + x^2 + y^2 + z^2 + 25 + 10z - x^2 - y^2 - z^2 - 25 + 10z$$

$$52 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 20z + 676$$

$$13 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 5z + 169$$

$$169 [x^2 + y^2 + (z + 5)^2] = 25z^2 + 1690z + 28561$$

$$169 [x^2 + y^2 + z^2 + 10z + 25] = 25z^2 + 1690z + 28561$$

$$169x^2 + 169y^2 + 169z^2 + \cancel{1690z} + 4225 = 25z^2 + \cancel{1690z} + 28561$$

$$169x^2 + 169y^2 + 144z^2 = 24336$$

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{169} = 1$$

Es un elipsoide.

- 6. Halla el L.G. de los puntos cuya diferencia de distancias a $F(5, 0, 0)$ y $F'(-5, 0, 0)$ es 6.**

$$| \text{dist}(X, F) - \text{dist}(X, F') | = 6$$

$$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6$$

$$\sqrt{(x - 5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6 + \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 = 36 + (x + 5)^2 + y^2 + z^2 \pm 12 \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cancel{x^2} - 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} = 36 + \cancel{x^2} + 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} \pm 12 \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\pm 12 \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2} = 20x + 36$$

$$\pm 3 \sqrt{(x + 5)^2 + y^2 + z^2} = 5x + 9$$

$$9[x^2 + 10x + 25 + y^2 + z^2] = 25x^2 + 90x + 81$$

$$9x^2 + \cancel{90x} + 225 + 9y^2 + 9z^2 = 25x^2 + \cancel{90x} + 81$$

$$-16x^2 + 9y^2 + 9z^2 = -144$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Es un hiperboloide.

- 7. Halla el L.G. de los puntos que equidistan del plano $x + \frac{1}{4} = 0$ y del punto $(\frac{1}{4}, 0, 0)$. ¿A qué se parece la ecuación obtenida?**

$$\text{dist}(X, F) = \text{dist}(X, \pi), \text{ donde } \pi: x + \frac{1}{4} = 0 \text{ y } F\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right).$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 + z^2} = \left|x + \frac{1}{4}\right|$$

$$\cancel{x^2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + y^2 + z^2 = \cancel{x^2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$$

$$x = y^2 + z^2$$

Es un paraboloide. Su ecuación es muy similar a la de una parábola.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Ángulos

- 1 Halla el ángulo que forman las rectas r y s en cada caso. Comprueba, previamente, que las rectas se cortan:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{b) } r: \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 15 + 5\lambda \end{cases}$$

a) $\vec{d}_r(-2, 3, -2)$; $P(5, 4, 0)$

$\vec{d}_s(-1, 5, 1)$; $P'(5, 4, 0)$

Como $P = P'$ y \vec{d}_s no es proporcional a \vec{d}_r , entonces sabemos que se cortan en el punto P .

Para ver el ángulo que forman, hacemos el producto escalar de \vec{d}_r y \vec{d}_s :

$$|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s| = |(-2, 3, -2) \cdot (-1, 5, 1)| = |2 + 15 - 2| = |15|$$

$$|\vec{d}_r| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}; \quad |\vec{d}_s| = \sqrt{1 + 25 + 1} = \sqrt{27}$$

$$\cos \alpha = \frac{|15|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{27}} = 0,7 \rightarrow \alpha = 45^\circ 33' 42''$$

- b) Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - \lambda \end{cases}$$

Por lo tanto:

$\vec{d}_r(1, 1, -1)$; $P(3, 0, 15)$

$\vec{d}_s(3, 2, 5)$; $P'(3, 0, 15)$

Como $P = P'$ y \vec{d}_s no es proporcional a \vec{d}_r , entonces sabemos que r y s se cortan en el punto P .

$$|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s| = |(1, 1, -1) \cdot (3, 2, 5)| = 3 + 2 - 5 = 0$$

Como su producto escalar es 0, sabemos que son perpendiculares, por lo que $\alpha = 90^\circ$.

2 Halla el valor de m para que r y s formen un ángulo de 90° :

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = m\lambda \end{cases}$$

$$\vec{d}_r(-5, 1, -1); \vec{d}_s(1, 2, m)$$

Para que r y s formen 90° , el producto escalar de \vec{d}_r y \vec{d}_s tiene que ser 0:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = (-5, 1, -1) \cdot (1, 2, m) = -5 + 2 - m = 0 \rightarrow m = -3$$

s3 Halla, en cada caso, el ángulo que forman la recta y el plano:

$$a) r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{2} \quad \pi: x - 2y - z + 1 = 0$$

$$b) r: x = \lambda, y = 1 + 2\lambda, z = -2 \quad \pi: 2x - y + z = 0$$

$$c) r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \quad \pi: x + z = 17$$

$$a) \vec{d}(-2, 4, 2); \vec{n}(1, -2, -1)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|-2 - 8 - 2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \rightarrow 90^\circ - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Observación: Los vectores \vec{d} y \vec{n} tienen la misma dirección; luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90^\circ$.

$$b) \vec{d}(1, 2, 0); \vec{n}(2, -1, 1)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \rightarrow 90^\circ - \alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 0^\circ$$

$$c) \vec{d}(2, 1, 1); \vec{n}(1, 0, 1)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 90^\circ - \alpha = 30^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

s4 Calcula el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\alpha: z = 3 \quad \beta: x - y + 2z + 4 = 0$$

$$\vec{n}_\alpha(0, 0, 1); \vec{n}_\beta(1, -1, 2)$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0,816 \rightarrow \varphi = 35^\circ 15' 52''$$

5 Halla los tres ángulos de los triángulos cuyos vértices son:

a) $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, 1, 1)$

b) $A(2, 7, 3)$, $B(1, 2, 5)$, $C(-1, -2, 5)$

a) $\vec{AB} = (1, 2, 1)$

$$\vec{AC} = (3, 1, 1)$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} = 0,73855 \rightarrow \hat{A} = 42^\circ 23' 31''$$

$$\vec{BA} = (-1, -2, -1)$$

$$\vec{BC} = (2, -1, 0)$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = 0 \rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 47^\circ 36' 29''$$

b) $\vec{AB} = (-1, -5, 2)$

$$\vec{AC} = (-3, -9, 2)$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{52}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{94}} = 0,97922 \rightarrow \hat{A} = 11^\circ 42' 6''$$

$$\vec{BA} = (1, 5, -2)$$

$$\vec{BC} = (-2, -4, 0)$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{-22}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{20}} = -0,898 \rightarrow \hat{B} = 153^\circ 54' 56''$$

$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 14^\circ 22' 58''$$

6 Calcula el ángulo que forma el plano siguiente con cada uno de los ejes coordenados:

$$\pi: x - 2y + z = 0$$

El ángulo entre una recta y un plano es complementario del que forma dicha recta con la dirección normal al plano.

El vector normal a π es $\vec{n}(1, -2, 1)$

- El ángulo que forma π con el eje X , de vector director $(1, 0, 0)$, es:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(1, 0, 0)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{6}} = 0,408 \rightarrow$$

$$\rightarrow 90^\circ - \alpha = 65^\circ 54' 19'' \rightarrow \alpha = 24^\circ 5' 41''$$

- El ángulo que forma π con el eje Y , de vector director $(0, 1, 0)$, es:

$$\cos(90^\circ - \beta) = \frac{|(0, 1, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(0, 1, 0)| |(1, -2, 1)|} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = 0,8165 \rightarrow$$

$$\rightarrow 90^\circ - \beta = 35^\circ 15' 52'' \rightarrow \beta = 54^\circ 44' 8''$$

- El ángulo que forma π con el eje Z , de vector director $(0, 0, 1)$, es:

$$\cos(90^\circ - \gamma) = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (1, -2, 1)|}{|(0, 0, 1)| |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,408 \rightarrow$$

$$\rightarrow 90^\circ - \gamma = 65^\circ 54' 19'' \rightarrow \gamma = 24^\circ 5' 41''$$

Distancias

- 7** Calcula la distancia que hay entre los siguientes pares de puntos:

a) $A(2, 5, -2)$, $B(-1, 1, -2)$

b) $A(-1, 7, 4)$, $B(-1, 2, 16)$

a) $\text{dist}(A, B) = |\vec{AB}| = |(-3, -4, 0)| = 5 \text{ u}$

b) $\text{dist}(A, B) = |\vec{AB}| = |(0, -5, 12)| = 13 \text{ u}$

- 8** Considera la recta r y el plano π siguientes:

$$r: \begin{cases} x - y = -3 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad \pi: x + y - 2z = 1$$

- a) Halla las coordenadas del punto S donde se cortan r y π .

- b) Calcula la distancia del punto $P(4, 0, 1)$ al punto S del apartado anterior.

- a) Para hallar el punto S donde se intersecan r y π , resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \rightarrow S(0, 3, 1)$$

b) $\text{dist}(P, S) = |\vec{PS}| = |(-4, 3, 0)| = 5 \text{ u}$

- 9** Tenemos la recta r y los planos π y σ siguientes:

$$r: \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases} \quad \begin{aligned} \pi: x + 2y - z &= 1 \\ \sigma: x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

- a) Halla el punto P donde se cortan la recta r y el plano π .

- b) Calcula las coordenadas del punto Q donde se cortan r y σ .

- c) Obtén la distancia que separa a los puntos P y Q de los apartados anteriores.

a) La intersección de r con π la podemos hallar sustituyendo las coordenadas de r en π :

$$8\lambda + 2(2) - (3 - 6\lambda) = 1 \rightarrow \lambda = 0$$

Por lo que el punto es $P = (0, 2, 3)$

b) De la misma forma hallamos Q :

$$8\lambda - 2 + 3 - 6\lambda = 3 \rightarrow \lambda = 1$$

Así, $Q = (8, 2, -3)$.

c) $dist(P, Q) = |\vec{PQ}| = |(8, 0, -6)| = 10$ u

10 Calcula, en cada caso, la distancia entre el punto P y el plano π :

a) $P(2, -3, 1)$, $\pi: 3x - 4z = 3$

b) $P(0, 1, 3)$, $\pi: x - y - 2z + 3 = 0$

c) $P(2, 0, 1)$, $\pi: x + y - 2z = 0$

a) $P(2, -3, 1)$; $\pi: 3x - 4z - 3 = 0$

$$dist(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ u}$$

b) $P(0, 1, 3)$; $\pi: x - y - 2z + 3 = 0$

$$dist(P, \pi) = \frac{|0 - 1 - 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \approx 1,633 \text{ u}$$

c) $P(2, 0, 1)$; $\pi: x + y - 2z = 0$

$$dist(P, \pi) = \frac{|2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = 0 \text{ u}$$

11 Calcula la distancia entre el punto $(3, -4, 1)$ y el plano $y = 3$.

$P(3, -4, 1)$; $\pi: y - 3 = 0$

$$dist(P, \pi) = \frac{|-4 - 3|}{\sqrt{1}} = 7 \text{ u}$$

12 Calcula la distancia entre el punto $Q(2, -1, 0)$ y el plano que contiene a

$$P(2, 0, 4) \text{ y a } s: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

El plano π , que contiene a P y a s , tiene como vectores dirección \vec{d}_s y \vec{PP}' , siendo P' un punto de s como $P'(3, 2, 4)$.

Hallamos el vector normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{d}_s \times \vec{PP'} = (-2, 3, 0) \times (1, 2, 0) = (0, 0, -7)$$

Tomamos un vector proporcional a \vec{n} : $(0, 0, 1)$

Por tanto, el plano es $\pi: z = 4$

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{1}} = 4 \text{ u}$$

13 Halla la distancia entre los siguientes pares de planos:

a) $\pi_1: x - 2y + 3 = 0$; $\pi_2: 2x - 4y + 1 = 0$

b) $\pi_1: 3x - 2y + z - 2 = 0$; $\pi_2: 2x - y + z = -5$

a) Vemos claramente que los dos planos son paralelos. Por tanto, tomamos un punto P de π_1 y hallamos la distancia del punto P al plano π_2 .

$$P(-3, 0, 0) \in \pi_1$$

$$\text{dist}(P, \pi_2) = \frac{|2 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = 1,12 \text{ u}$$

b) Los vectores normales a los dos planos no son proporcionales, por lo que los planos se cortan. La distancia es, por tanto, cero.

Página 205

14 Halla la distancia de la recta r al plano π en cada caso:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + 7\lambda \end{cases} \quad \pi: 3x - 4y - 3 = 0$$

$$\text{b) } r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \quad \pi: 7x - 2y - z + 1 = 0$$

Lo primero que tenemos que ver es si el plano y la recta se cortan: si el vector normal al plano es perpendicular al vector dirección de la recta, entonces, o son paralelos, o la recta está contenida en el plano.

a) $\vec{d}_r(4, 3, 7)$; $\vec{n}(3, -4, 0)$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 12 - 12 = 0 \rightarrow \text{son perpendiculares}$$

Como el punto $P(2, 0, -1) \in r$ no está contenido en el plano, r y π son paralelos, por lo que la distancia de r a π es igual a la distancia de cualquier punto de r a π . Tomamos P como punto de r .

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ u}$$

b) $\vec{d}_r(2, 0, 1); \quad \vec{n}(7, -2, -1)$
 $\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 14 - 1 = 13 \neq 0 \rightarrow$ no son perpendiculares $\rightarrow r$ y π se cortan \rightarrow
 $\rightarrow dist(r, \pi) = 0$

15 Calcula la distancia que hay entre el punto $P(3, 1, 6)$ y la recta

$$r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \text{ mediante los siguientes pasos:}$$

a) Halla un plano, π , perpendicular a r que contenga a P .

b) Obtén la intersección de π con r . Llama a ese punto Q .

c) Calcula la distancia de P a Q .

a) El vector normal al plano π es el vector dirección de la recta r .

$$\text{La ecuación de } \pi \text{ es: } 4(x - 3) + (y - 1) - 3(z - 6) = 0$$

$$\pi: 4x + y - 3z + 5 = 0$$

b) Para hallar la intersección de π con r , sustituimos las coordenadas genéricas de r en la ecuación de π :

$$4(4 + 4\lambda) + (2 + \lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

Sustituimos λ en las ecuaciones paramétricas de $r \rightarrow Q(0, 1, 2)$

$$c) dist(P, r) = dist(P, Q) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (1 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

16 Halla la distancia entre el punto $P(2, 2, -11)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$

siguiendo los pasos del ejercicio anterior.

- $\vec{d}_r(12, -3, 5); P(2, 2, -11)$

$$12(x - 2) - 3(y - 2) + 5(z + 11) = 0$$

$$\pi: 12x - 3y + 5z + 37 = 0$$

- Sustituimos las coordenadas de r en π para hallar la intersección de r y π :

$$12 \cdot (9 + 12\lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5(6 + 5\lambda) + 37 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

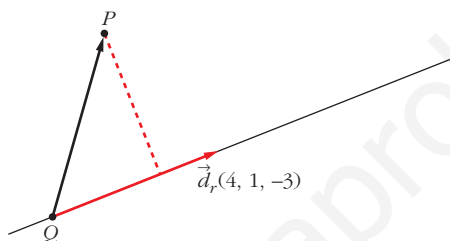
El punto de intersección es $Q(-3, 2, 1)$.

- $dist(P, Q) = |\vec{PQ}| = |(-5, 0, 12)| = 13$ u

17 Calcula la distancia que hay entre el punto $P(3, 1, 6)$ y la recta

$$r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \text{ mediante los siguientes pasos:}$$

- a) Halla el vector \vec{PQ} , siendo Q un punto de la recta r .
- b) Halla el área del paralelogramo descrito por el vector \vec{PQ} y el vector dirección de r .
- c) Divide dicha área entre el módulo del vector dirección de r .



a) $P(3, 1, 6)$, $Q(4, 2, -1) \in r$

$$\vec{PQ} = (1, 1, -7)$$

b) $\vec{PQ} \times \vec{d}_r = (4, -25, -3)$

$$\text{Área del paralelogramo} = |\vec{PQ} \times \vec{d}_r| = \sqrt{4^2 + 25^2 + 3^2} = \sqrt{650}$$

c) $\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Longitud de la base}} = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = 5$

18 Halla la distancia entre el punto $P(2, 2, -11)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$

siguiendo los pasos del ejercicio anterior.

• $Q(9, -1, 6)$

$$\vec{PQ} = (7, -3, 17)$$

• $\vec{d}_r = (12, -3, 5)$

$$\text{Área paralelogramo} = |\vec{PQ} \times \vec{d}_r| = |(36, 169, 15)| = \sqrt{30082}$$

• $|\vec{d}_r| = \sqrt{178}$

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{\frac{30082}{178}} = 13 \text{ u}$$

19 Calcula la distancia que hay entre estas rectas:

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = 9 + 5\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + 9\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, sigue estos pasos:

a) Halla el plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a la recta s .

b) Halla la distancia de un punto (el que quieras) de s al plano π .

$$r: R(0, -10, 9), \vec{d}_r(4, -3, 5)$$

$$s: S(2, 1, 4), \vec{d}_s(-12, 9, 1)$$

$$a) \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (4, -3, 5) \times (-12, 9, 1) = (-48, -64, 0) // (3, 4, 0) \perp \pi$$

π está definido por un punto, $R(0, -10, 9)$, y un vector normal, $(3, 4, 0)$.

$$\pi: 3(x - 0) + 4(y + 10) + 0(z - 9) = 0 \rightarrow \pi: 3x + 4y + 40 = 0$$

$$b) \text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi) = \text{dist}(S, \pi) = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 40}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{50}{5} = 10$$

20 Halla la distancia que hay entre estas rectas siguiendo los pasos del ejercicio anterior:

$$r: \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 19 + 12\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 10 - 10\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 26 - 24\lambda \end{cases}$$

$$\bullet \text{ El vector normal a } \pi \text{ será } \vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (5, 1, 12) \times (-10, 5, -24) = (-84, 0, 35)$$

$$-84(x + 7) + 35(z - 19) = 0$$

$$\pi: -84x + 35z - 1253 = 0$$

$$\bullet Q(10, -2, 26) \in s$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(Q, \pi) = \frac{|-84 \cdot 10 + 35 \cdot 26 - 1253|}{\sqrt{84^2 + 35^2}} = \frac{1183}{91} = 13 \text{ u}$$

21 Calcula la distancia que hay entre estas rectas:

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = 9 + 5\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + 9\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, haz lo siguiente:

a) Halla el vector \vec{PQ} , siendo P y Q puntos de las rectas r y s , respectivamente.

b) Halla el volumen, V , del paralelepípedo descrito por \vec{PQ} y los vectores dirección de r y s .

c) Halla el área, A , del paralelogramo descrito por los vectores dirección de r y s .

d) La distancia de r a s coincide con el resultado de dividir V entre A .

$$P(0, -10, 9) \in r, \vec{d}_r(4, -3, 5)$$

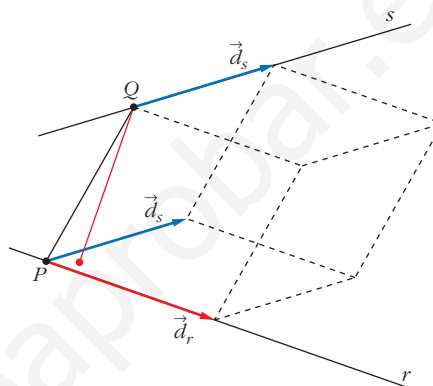
$$Q(2, 1, 4) \in s, \vec{d}_s(-12, 9, 1)$$

a) $\vec{PQ}(2, 11, -5)$

b)

$$[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -12 & 9 & 1 \\ 2 & 11 & -5 \end{vmatrix} = -800$$

$$V = |-800| = 800 \text{ u}^3$$



c) $A = |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |(4, -3, 5) \times (-12, 9, 1)| = |(-48, -64, 0)| = 80 \text{ u}^2$

d) $\text{dist}(r, s) = \frac{V}{A} = \frac{800}{80} = 10 \text{ u}$

22 Halla la distancia que hay entre estas rectas siguiendo los pasos del ejercicio anterior:

$$r: \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 19 + 12\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 10 - 10\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 26 - 24\lambda \end{cases}$$

• $P(-7, 4, 19); Q(10, -2, 26)$

$$\vec{PQ}(17, -6, 7)$$

• $\vec{d}_r(5, 1, 12)$

$$\vec{d}_s(-10, 5, -24)$$

$$V = |[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{PQ}]| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 12 \\ -10 & 5 & -24 \\ 17 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 1183 \text{ u}^3$$

• $A = |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |(-84, 0, 35)| = 91 \text{ u}^2$

• $\text{dist}(r, s) = \frac{V}{A} = \frac{1183}{91} = 13 \text{ u}$

Áreas y volúmenes

23 Halla el área de cada uno de los triángulos:

a) $A(2, 7, 3)$, $B(1, -5, 4)$, $C(7, 0, 11)$

b) $A(3, -7, 4)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(-5, 11, 6)$

Justifica la solución del segundo.

a) $\vec{AB}(-1, -12, 1)$; $\vec{AC}(5, -7, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{|(-89, 13, 67)|}{2} = \frac{\sqrt{12579}}{2} \approx 56,08 \text{ u}^2$$

b) $\vec{AB}(-4, 9, 1)$; $\vec{AC}(-8, 18, 2)$

Las coordenadas son proporcionales, luego los puntos están alineados:

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 0$$

Página 206

24 Calcula, en cada caso, el volumen del tetraedro con vértices:

a) $(2, 1, 4)$; $(1, 0, 2)$; $(4, 3, 2)$; $(1, 5, 6)$

b) $(4, 1, 2)$; $(2, 0, 1)$; $(2, 3, 4)$; $(6, 5, 1)$

a) $A(2, 1, 4)$; $B(1, 0, 2)$; $C(4, 3, 2)$; $D(1, 5, 6)$

$$\vec{AB}(-1, -1, -2); \vec{AC}(2, 2, -2); \vec{AD}(-1, 4, 2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

b) $A(4, 1, 2)$; $B(2, 0, 1)$; $C(2, 3, 4)$; $D(6, 5, 1)$

$$\vec{AB}(-2, -1, -1); \vec{AC}(-2, 2, 2); \vec{AD}(2, 4, -1)$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

25 Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:

$A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$

• Área del triángulo ABC :

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ABD :

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2058}}{2} \approx 22,68 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ACD :

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7448}}{2} \approx 43,15 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo BCD :

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{BC} \times \vec{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14490}}{2} \approx 60,19 \text{ u}^2$$

- Área total = $14 + 22,68 + 43,15 + 60,19 = 140,02 \text{ u}^2$

- Volumen: $\vec{AB}(2, -2, -3)$; $\vec{AC}(4, 0, 6)$; $\vec{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{306}{6} \approx 51,33 \text{ u}^3$$

s26 Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano:

$$6x - 5y + 3z - 30 = 0$$

• Recuerda que $V = (1/3) \cdot \text{área base} \times \text{altura}$. En este caso es muy sencillo obtener ambas por ser un tetraedro con tres aristas perpendiculares entre sí. Hazlo, también, utilizando el producto mixto, y comprueba que obtienes el mismo resultado.

- Hallamos los vértices:

$$x = 0, y = 0 \rightarrow z = 10 \rightarrow A(0, 0, 10)$$

$$y = 0, z = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow B(5, 0, 0)$$

$$x = 0, z = 0 \rightarrow y = -6 \rightarrow C(0, -6, 0)$$

$$O(0, 0, 0)$$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (10 \cdot 5 \cdot 6) = 50 \text{ u}^3$$

- Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 50 \text{ u}^3$$

- s27** Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$ y que pasa por el punto $(-1, 1, 0)$, y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x+1) + 3(y-1) + 4(z-0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{4} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow C\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$O(0, 0, 0)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144} \text{ u}^3$$

Esfera

- 28** Justifica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a esferas y di su centro y su radio:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

b) $2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 3 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 30 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 3/2 = 0$

a) No tiene término en z^2 . No es una esfera.

b) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

c) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 0 - (-8) = 9 \rightarrow \text{radio} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 0)$$

d) Los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

e) Los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 1 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-1) = 6 \rightarrow \text{radio} = \sqrt{6}$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

f) Los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 10 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-10) = 15 \rightarrow \text{radio} = \sqrt{15}$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

g) Los coeficientes de x^2 , y^2 , z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + \frac{9}{4} + 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \rightarrow \text{radio} = 2$$

$$\text{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

29 Halla la ecuación de las siguientes esferas:

a) Centro $(1, 0, -5)$ y radio 1.

b) Diámetro $A(3, -4, 2)$, $B(5, 2, 0)$.

c) Centro $(4, -2, 3)$ y tangente al plano $x - z = 0$.

d) Centro $(3, -1, 2)$ y tangente al plano YZ .

a) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 5)^2 = 1$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10z + 25 = 0$

b) El centro es el punto medio de AB : $C = \left(\frac{3+5}{2}, -\frac{4+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, -1, 1)$

El radio es la distancia de C a uno de los puntos:

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

La ecuación es: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 11$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 7 = 0$$

c) El radio es la distancia del centro $C(4, -2, 3)$ al plano $\pi: x - z = 0$:

$$r = \text{dist}(C, \pi) = \frac{|4 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

La ecuación será: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{1}{2}$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z + \frac{57}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 8y - 12z + 57 = 0$$

d) El plano YZ es el plano $\pi: x = 0$.

El radio es la distancia del centro $C(3, -1, 2)$ al plano $\pi: r = \text{dist}(C, \pi) = 3$

La ecuación será: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

30 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto $(2, -1, 4)$ es igual a 7.

Es una esfera de centro $(2, -1, 4)$ y radio 7:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 49, \text{ o bien, } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z - 28 = 0$$

PARA RESOLVER

s31 Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

y es ortogonal al plano $\sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0$.

Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ .

Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r :

$$P(1, -1, 1) \in r \rightarrow P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} // r \rightarrow \vec{d}(3, -2, 1) // \pi$$

Si π es ortogonal a σ , el vector normal de σ es paralelo a π :

$$\vec{n}_\sigma(2, -1, 3) \perp \sigma \rightarrow (2, -1, 3) // \pi$$

Obtenemos un vector normal a $\pi: (3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \rightarrow (5, 7, -1)$

La ecuación del plano π es: $5(x - 1) + 7(y + 1) - 1(z - 1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

• Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ :

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Vector dirección de la recta: $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$

Punto de la recta:

$$x = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array}} \right\} R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ecuaciones de la recta: } \begin{cases} x = 20\lambda \\ y = -\frac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\frac{1}{2} - 19\lambda \end{cases}$$

- s32** Dados la recta $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$, halla la ecuación de una recta situada en el plano π , que pase por el punto $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r .

Un vector dirección de r es: $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a $(2, 1, 1)$ y perpendicular a $(1, 2, 3)$ (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

- s33** Dados la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y el plano $\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0$, halla el plano que contiene a r y es perpendicular a π .

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \rightarrow P(0, 1, -1); \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a \vec{d} y a \vec{n} , y contendrá a P .

Un vector normal será: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \rightarrow (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es: $6(x - 0) - 9(y - 1) - 7(z + 1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

s34 Determina la recta perpendicular común a las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad \text{Restando la 1.ª ecuación a la 2.ª: } y = 3 - z \\ x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z$$

Haciendo $z = \lambda$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Un punto genérico de } r \text{ es } R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Un punto genérico de } s \text{ es } S(2, -3, \mu)$$

Un vector variable de origen en r y extremo en s es $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$.

Este vector debe ser perpendicular a r y a s :

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \rightarrow 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \rightarrow \mu - \lambda = 0 \rightarrow \mu = \lambda \rightarrow \mu = \lambda \end{cases}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{8}{5}; \quad \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left. \begin{matrix} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{matrix} \right\} \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \rightarrow \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

s35 a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \quad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene para el valor de p que has hallado.

$$a) (4, -2, 2) \cdot (1, p-1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \rightarrow p = 6$$

$$b) r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$$

• Punto de intersección:

$$\left. \begin{aligned} 4\lambda &= 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda &= 6 + 5\mu \\ 2\lambda &= 3 + 3\mu \end{aligned} \right\} \text{Sumando las dos últimas ecuaciones:}$$

$$1 = 9 + 8\mu \rightarrow -8 = 8\mu \rightarrow \mu = -1$$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

1.ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: $(0, 1, 0)$

• Ecuación del plano que las contiene:

$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \rightarrow (8, 5, -11)$ es un vector normal al plano.

$$\text{Ecuación: } 8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0$$

$$8x + 5y - 11z - 5 = 0$$

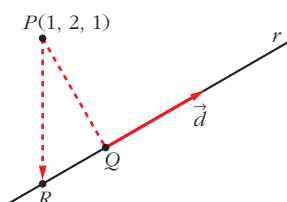
s36 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta siguiente:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \rightarrow y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + z = 2 \rightarrow x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto genérico de } r \text{ es: } R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector \vec{PR} ha de ser perpendicular a r , es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\vec{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$$\vec{PR} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$$

$$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\vec{PQ}(1, -1, -1)$

$$\text{La recta es: } \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

s37 Los vértices del triángulo ABC son los puntos de corte del plano $2x + y - 3z = 6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice B que está en el eje OY .

Los vértices del triángulo son:

$$y = 0, z = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \rightarrow A(3, 0, 0)$$

$$x = 0, z = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow B(0, 6, 0)$$

$$x = 0, y = 0 \rightarrow -3z = 6 \rightarrow z = -2 \rightarrow C(0, 0, -2)$$

Debemos hallar la ecuación de la altura que parte de B .

Su vector dirección $\vec{d}(a, b, c)$ debe ser:

- Ortogonal a $\vec{AC} \rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{d} = 0$
- Ortogonal al vector normal del plano ABC , es decir, del plano $2x + y - 3z = 6$, puesto que la altura debe estar contenida en dicho plano $\rightarrow (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$

Luego tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{d} = 0 &\rightarrow (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 \rightarrow 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0 &\rightarrow (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 \rightarrow 2a + b - 3c = 0 \end{aligned} \right\}$$

Soluciones: $(-2t, 13t, 3t) \rightarrow$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

$$\text{Ecuación de la altura que pasa por } B: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

Página 207

s38 Halla el punto P de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidiste de los planos:

$$\alpha: x + y + z = -3 \quad \text{y} \quad \beta: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$$

- Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$
- Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta: x + y - z - 3 = 0$$

- La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $dist(R, \alpha) = dist(R, \beta)$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}}, \text{ es decir:}$$

$$|6\lambda + 3| = 3 \begin{cases} 6\lambda + 3 = 3 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ 6\lambda + 3 = -3 \rightarrow 6\lambda = -6 \rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

- s39** Sea r la recta de intersección de los planos $ax + 9y - 3z = 8$ y $x + ay - z = 0$.

Determina el valor de a para que:

- Los dos planos sean paralelos.
- Los dos planos sean perpendiculares.
- La recta r corte al plano OXY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a $\sqrt{2}$.

a) Las coordenadas de $(a, 9, -3)$ y $(1, a, -1)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{-3}{-1} \rightarrow a = 3 \\ \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \rightarrow a = 3 \end{cases} \left. \vphantom{\frac{a}{1}} \right\} a = 3$$

b) Los vectores normales han de ser perpendiculares:

$$(a, 9, -3) \cdot (1, a, -1) = a + 9a + 3 = 10a + 3 = 0 \rightarrow a = \frac{-3}{10}$$

c) El plano OXY es el plano $z = 0$. Hallamos el punto de corte de r con el plano OXY :

$$\left. \begin{array}{l} ax + 9y - 3z = 8 \\ x + ay - z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} ax + 9y = 8 \\ x + ay = 0 \end{array} \right\} |A| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$$

(El problema solo tiene solución si $a^2 - 9 \neq 0$, es decir, si $a \neq 3$ y $a \neq -3$. Si $a = 3$ o $a = -3$, el sistema es incompatible).

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 8a$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{8a}{a^2 - 9}; \quad y = \frac{-8}{a^2 - 9}; \quad z = 0$$

El punto de corte es $P\left(\frac{8a}{a^2-9}, \frac{-8}{a^2-9}, 0\right)$. Su distancia al origen ha de ser $\sqrt{2}$:

$$\text{dist}(P, O) = \sqrt{\left(\frac{8a}{a^2-9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2-9}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{8a}{a^2-9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2-9}\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{64a^2 + 64}{(a^2-9)^2} = 2$$

$$64a^2 + 64 = 2(a^4 + 81 - 18a^2) \rightarrow 64a^2 + 64 = 2a^4 + 162 - 36a^2$$

$$0 = 2a^4 - 100a^2 + 98 \rightarrow a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$a^2 = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} \begin{cases} a^2 = 49 \rightarrow a = \pm 7 \\ a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$

40 Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas $(-1 + 3\lambda, 1 + 2\lambda, 2 + \lambda)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

Determina también el ángulo formado por la recta y el plano dados.

Un vector normal al plano es: $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \rightarrow (7, -11, 1)$

Un punto del plano es $(-1, 1, 2)$ (pues contiene a la recta).

- La ecuación del plano será:

$$7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$7x - 11y + z + 16 = 0$$

- Ángulo formado por la recta y el plano dados:

$$\vec{d}(3, 2, 1); \vec{n}(2, 1, -3)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0,357$$

$$90^\circ - \alpha = 69^\circ 4' 31'' \rightarrow \alpha = 20^\circ 55' 29''$$

41 Dado un cubo (hexaedro regular) de lado 6 cm, halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una de sus caras, sabiendo que las rectas de ambas diagonales se cruzan.

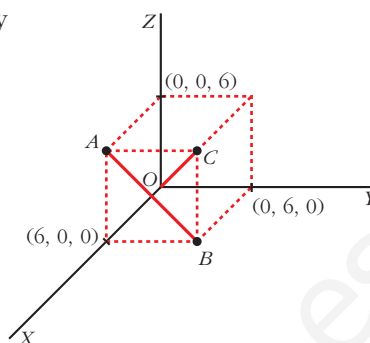
• Dibuja el cubo con un vértice en el origen y los contiguos sobre los ejes coordenados.

- La diagonal del cubo pasa por $O(0, 0, 0)$ y por $C(6, 6, 6)$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- La diagonal de la cara pasa por $A(6, 0, 6)$ y por $B(6, 6, 0)$:

$$s: \begin{cases} x = 6 \\ y = \mu \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$



- $dist(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{d}, \vec{d}', \vec{OA}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$

$$[\vec{d}, \vec{d}', \vec{OA}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\vec{d} \times \vec{d}' = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1) \rightarrow |\vec{d} \times \vec{d}'| = \sqrt{6}$$

$$\text{Por tanto: } dist(r, s) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

s42 Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(1, 3, 2)$.

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\vec{OP}(1, 3, 2)$ es normal al plano.

Por tanto, la ecuación del plano es:

$$1(x - 1) + 3(y - 3) + 2(z - 2) = 0$$

$$x + 3y + 2z - 14 = 0$$

43 Determina las condiciones que deben cumplir a y b para que estos tres planos:

$$ax + z - 1 = 0, \quad x + bz + 2 = 0, \quad \sqrt{5}x + 3y + 2z - 3 = 0$$

se corten en un punto.

Haciendo $a = 2$ y $b = 1$, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los dos primeros, así como el ángulo que esta forma con el tercero.

$$\left. \begin{array}{l} ax + z = 1 \\ x + bz = -2 \\ \sqrt{5}x + 3y + 2z = 3 \end{array} \right\} \text{ Para que los tres planos se corten en un punto, el sistema ha de tener solución única, es decir:}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ \sqrt{5} & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3(ab - 1) \neq 0 \rightarrow ab \neq 1$$

- Si $\mathbf{a} = 2$ y $\mathbf{b} = 1$, la recta determinada por los dos primeros planos es:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{array} \right\} \text{Restando: } x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$z = -2 - x = -2 - 3 = -5$$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$$

- **Ángulo que forma la recta con el 3.º plano:**

$$\vec{d}(0, 1, 0) \quad \vec{n}(\sqrt{5}, 3, 2)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{3}{1\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 90^\circ - \alpha = 45^\circ \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

s44 Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano

$$\alpha: x - 3y - 2z + 4 = 0 \text{ y respecto de la recta } r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$$

— Simétrico respecto del plano:

- Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

- Punto de corte de α con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento

PP' , siendo P' el simétrico de P respecto del plano α . Luego, si $P'(x, y, z)$,

$$\text{entonces: } \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow P'(2, -1, 1)$$

— Simétrico respecto de la recta:

- Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \rightarrow y = x + 3 \\ 4x - z = 0 \rightarrow z = 4x \end{array} \right\} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P :

$$1(x-1) + 1(y-2) + 4(z-3) = 0$$

$$x + y + 4z - 15 = 0$$

- Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'' ,

siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r . Así, si $P''(a, b, c)$,

$$\text{entonces: } \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \rightarrow P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

- 45** a) Encuentra los puntos de r : $\begin{cases} x+y & = 0 \\ x & - z = 0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del plano:

$$\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0.$$

- b) Obtén los puntos de π que distan $\frac{1}{3}$ de los puntos hallados en el apartado anterior.

- a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$\text{dist}(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{cases} 5\lambda + 1 = 1 \rightarrow \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \rightarrow \lambda = -2/5 \end{cases}$$

Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

- b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π .

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π .

- Para $(0, 0, 0)$:

Obtenemos la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de esta recta con π :

$$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \rightarrow 9\lambda = -1 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

- Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π :

$$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = 2/5 - \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

Obtenemos el punto de corte de esta recta con π :

$$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

$$9\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

s46 Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A , B y C .

a) Escribe la ecuación de π .

b) Calcula el área del triángulo ABC .

a) El plano es perpendicular al vector $\vec{PQ}(-4, 6, -2)$; un vector normal al plano es $(2, -3, 1)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ : $M(1, 4, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x - 1) - 3(y - 4) + 1(z - 4) = 0$

$$\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del triángulo:

$$y = 0, z = 0 \rightarrow 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow A(-3, 0, 0)$$

$$x = 0, z = 0 \rightarrow -3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$x = 0, y = 0 \rightarrow z + 6 = 0 \rightarrow z = -6 \rightarrow C(0, 0, -6)$$

$$\vec{AB}(3, 2, 0) \quad \vec{AC}(3, 0, -6)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-12, 18, -6) \rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{504}$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} \approx 11,22 \text{ u}^2$$

s47 Dados los puntos $A(1, 5, -2)$, $B(4, 0, 1)$ y $C(-3, 2, 0)$:

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC .

a) Hay que probar que los puntos no están alineados.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB}(3, -5, 3) \\ \vec{AC}(-4, -3, 2) \end{array} \right\} \text{Sus coordenadas no son proporcionales, luego los puntos no} \\ \text{están alineados. Son los vértices de un triángulo.}$$

b) • Obtenemos la ecuación del lado AC :

$$r: \begin{cases} x = -3 - 4\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

• Hallamos el plano que pasa por B y es perpendicular a r :

$$-4(x - 4) - 3(y - 0) + 2(z - 1) = 0$$

$$\pi: -4x - 3y + 2z + 14 = 0$$

• Obtenemos el punto de intersección de r con π :

$$-4(-3 - 4\lambda) - 3(2 - 3\lambda) + 4\lambda + 14 = 0$$

$$12 + 16\lambda - 6 + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0$$

$$29\lambda + 20 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-20}{29}$$

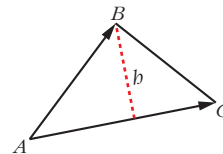
El punto (proyección de B sobre AC) es: $B' \left(\frac{-7}{29}, \frac{118}{29}, \frac{-40}{29} \right)$

• La longitud del segmento es la distancia entre B y B' :

$$|\vec{BB'}| = \left| \left(\frac{123}{29}, \frac{-118}{29}, \frac{69}{29} \right) \right| = \sqrt{\frac{33814}{841}} = \sqrt{\frac{1166}{29}} \approx 6,34$$

De otra forma:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \frac{|(1, 18, 29)|}{\sqrt{16 + 9 + 4}} = \\ &= \sqrt{\frac{1166}{29}} \approx 6,34 \end{aligned}$$



- s48** Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$\text{dist}[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

- s49** Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ y

otro lado sobre $s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$.

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Si uno de los vértices del cuadrado es el $(0, 0, 0)$, ¿cuál es el otro vértice situado sobre la recta r ?

Para que el enunciado sea correcto, las dos rectas deben ser paralelas. Veamos si es así:

Escribimos la recta r en forma paramétrica:

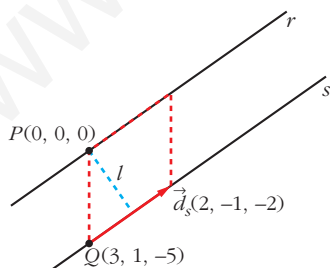
$$(3, 2, 2) \times (1, -2, 2) = (8, -4, -8) // (2, -1, -2) = \vec{d}_r; \quad O(0, 0, 0) \in r$$

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{d}_r(2, -1, -2); \quad P(0, 0, 0)$$

Puesto que $\vec{d}_s = \vec{d}_r$, las dos rectas tienen la misma dirección.

Además $P(0, 0, 0) \in r$, pero $P(0, 0, 0) \notin s$. Por tanto, las rectas son paralelas.

a) El lado del cuadrado es la distancia entre las dos rectas.



$$\begin{aligned} \text{dist}(r, s) &= \text{dist}(P, s) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Base}} = \\ &= \frac{|\vec{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(-7, -4, -5)|}{|(2, -1, -2)|} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{9}} = \sqrt{10} = l \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto, Área} = (\sqrt{10})^2 = 10 \text{ u}^2$$

b) $P' \quad O(0, 0, 0) \quad P \quad s$

Si P (o P') es el otro vértice del cuadrado situado sobre la recta r , \vec{OP} y \vec{OP}' son vectores con la misma dirección que \vec{d}_r y con módulo $\sqrt{10}$:

$$\vec{OP} = \frac{\sqrt{10}}{|\vec{d}_r|} \vec{d}_r = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4+1+4}} (2, -1, -2) = \frac{\sqrt{10}}{3} (2, -1, -2) \rightarrow$$

$$\rightarrow P \left(\frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{-1}{3}\sqrt{10}, \frac{-2}{3}\sqrt{10} \right) \text{ y } P' \left(-\frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{1}{3}\sqrt{10}, \frac{2}{3}\sqrt{10} \right)$$

P y P' son las posibles posiciones del segundo vértice del cuadrado situado en r . Los otros vértices están en la recta s .

s50 Sea r_1 la recta que pasa por $A(2, 4, 0)$ y $B(6, 2, 0)$ y sea r_2 la recta que pasa por $C(0, 0, 7)$ y $D(3, 2, 0)$.

Obtén, de manera razonada, la distancia entre r_1 y r_2 .

- Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r_1: \vec{AB}(4, -2, 0) // (2, -1, 0) \quad r_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$r_2: \vec{CD}(3, 2, -7) \quad r_2: \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 - 7\mu \end{cases}$$

- Estudiamos la posición relativa de r_1 y r_2 :

$$\vec{AC}(-2, -4, 7)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

- Hallamos la distancia entre r_1 y r_2 :

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{21}{|(2, -1, 0) \times (3, 2, -7)|} =$$

$$= \frac{21}{|(7, 14, 7)|} = \frac{21}{\sqrt{294}} \approx 1,22$$

Página 208

s51 Halla la ecuación general del plano determinado por los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 0, -1)$, $C(1, -2, 0)$, y calcula el volumen del tetraedro que limita con los planos cartesianos.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB}(-3, -1, -2) \\ \vec{AC}(0, -3, -1) \end{array} \right\} \text{ Son paralelos al plano.}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y-1 & 1 & 3 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5x + 3y - 9z + 1 = 0$$

• Vértices del tetraedro: $O(0, 0, 0)$

$$y = 0, z = 0 \rightarrow 5x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{5} \rightarrow A\left(-\frac{1}{5}, 0, 0\right)$$

$$x = 0, z = 0 \rightarrow 3y = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{3} \rightarrow B\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$x = 0, y = 0 \rightarrow -9z = -1 \rightarrow z = \frac{1}{9} \rightarrow C\left(0, 0, \frac{1}{9}\right)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{810} u^3$$

s52 Sean los puntos $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento.

Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A , B y C :

a) Escribe la ecuación del plano π .

b) Calcula el volumen del tetraedro de vértices O , A , B y C (O es el origen de \mathbb{R}^3).

a) El plano es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}(-2, 6, -4) // (1, -3, 2)$. Pasa por el punto medio del segmento PQ : $M = (4, 4, 1)$.

$$\text{La ecuación del plano es: } 1(x - 4) - 3(y - 4) + 2(z - 1) = 0$$

$$\pi: x - 3y + 2z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del tetraedro:

$$y = 0, z = 0 \rightarrow x + 6 = 0 \rightarrow x = -6 \rightarrow A(-6, 0, 0)$$

$$x = 0, z = 0 \rightarrow -3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$x = 0, y = 0 \rightarrow -2z + 6 = 0 \rightarrow z = -3 \rightarrow C(0, 0, -3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} (6 \cdot 2 \cdot 3) = 6 u^3$$

s53 Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

• Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

- El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

$$(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$$

$$3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \rightarrow 2\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 2$$

El punto es $P'(5, 1, 2)$

- La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P' :

$$\text{dist}(P, P') = |\vec{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,83$$

s54 Se consideran los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 4, 1)$ y $R(1, 3, 1)$:

a) Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

b) Si desde el punto $V(1, 1, -1)$ se trazan rectas a cada uno de los puntos P , Q y R , se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

a) $\left. \begin{array}{l} \vec{PQ}(-1, 3, 2) \\ \vec{PR}(-1, 2, 2) \end{array} \right\}$ No tienen las coordenadas proporcionales; luego los puntos no están alineados.

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = (2, 0, 1) \rightarrow A_{\text{PARALELOGRAMO}} = |\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12 \text{ u}^2$$

b) La altura es la distancia de V al plano determinado por P , Q y R .

Un vector normal al plano es $\vec{PQ} \times \vec{PR} = (2, 0, 1)$. La ecuación del plano es:

$$2(x - 2) + 1(z + 1) = 0$$

$$\pi: 2x + z - 3 = 0$$

$$\text{Altura} = \text{dist}(V, \pi) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} [\text{Área base} \cdot \text{altura}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \text{ u}^3$$

s55 Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(4, 0, 5)$ y $E(7, 6, 3)$.

Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:

- Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

$$\vec{BA} = \vec{CD} \rightarrow (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$$

$$D(3, -3, 5)$$

- Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

$$\vec{AE} = \vec{BF} \rightarrow (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$$

$$F(8, 9, 3)$$

- Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

$$\vec{AE} = \vec{CG} \rightarrow (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5)$$

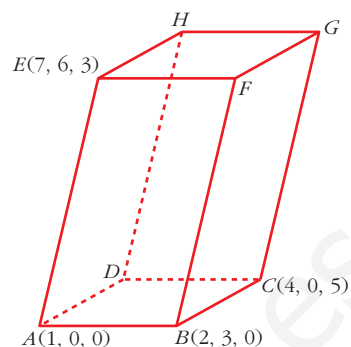
$$G(10, 6, 8)$$

$$\vec{AE} = \vec{DH} \rightarrow (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5)$$

$$H(9, 3, 8)$$

$$\vec{AB}(1, 3, 0), \vec{AD}(2, -3, 5), \vec{AE}(6, 6, 3)$$

$$[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \rightarrow \text{Volumen} = 33 \text{ u}^3$$



s56 Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$$

$$s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

determina la posición relativa de ambas rectas y el área de uno de los cuadrados, dos de cuyos lados están sobre r y s .

- Escribimos la recta s en forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} -y + z = 2 - x \\ -y - z = -4 - 3x \end{array} \right\} \text{Sumando: } -2y = -2 - 4x \rightarrow y = 1 + 2x$$

$$z = 2 - x + y = 3 + x$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

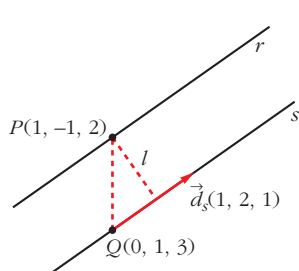
- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

$$\vec{d}_r(1, 2, 1); P(1, -1, 2)$$

$$\vec{d}_s(1, 2, 1); Q(0, 1, 3)$$

Las rectas tienen la misma dirección; $P \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas r y s son paralelas.

- El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s .



$$\vec{QP}(1, -2, -1)$$

$$\vec{QP} \times \vec{d}_s = (1, -2, -1) \times (1, 2, 1) = (0, -2, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{dist}(r, s) &= \text{dist}(P, s) = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(0, -2, 4)|}{|(1, 2, 1)|} = \\ &= \frac{\sqrt{4 + 16}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \end{aligned}$$

- El área del cuadrado es:

$$\text{Área} = \left(\sqrt{\frac{10}{3}} \right)^2 = \frac{10}{3} \text{ u}^2$$

s57 Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \text{ sobre el plano } \alpha: x-3y+2z+12=0.$$

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano π , perpendicular a α y que contiene a r .

$$P(1, 1, 2); \vec{d}_r(2, 1, 2); \vec{n}(1, -3, 2)$$

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$$

La ecuación de π es: $8(x-1) - 2(y-1) - 7(z-2) = 0$

$$\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

s58 Considera las rectas r y s :

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s .

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$$\vec{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s :

$$\begin{cases} \vec{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \rightarrow -6\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{7}{6} \\ \vec{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \rightarrow -2 + 3\mu = 0 \rightarrow \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S :

$$\vec{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{d}(0, 1, -1)$$

La recta es:
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{7}{6} + \lambda \\ z = -\frac{1}{6} - \lambda \end{cases}$$

s59 Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S , pertenece a la recta r :
$$\begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r .

a) Determina las coordenadas de S .

b) Calcula el área del triángulo PQS .

a) $\vec{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \vec{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

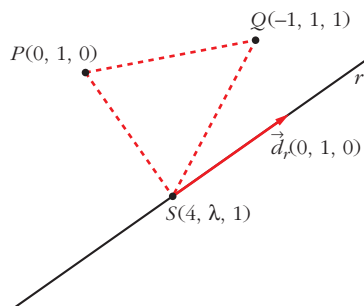
$$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$S(4, 1, 1)$$

b) $\vec{PS}(4, 0, 1)$; $\vec{PQ}(-1, 0, 1)$

$$\vec{PS} \times \vec{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{PS} \times \vec{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ u}^2$$



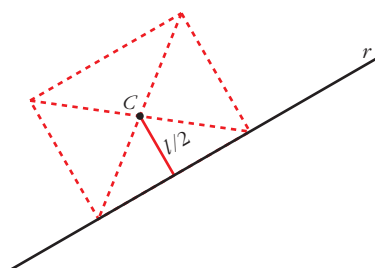
60 Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

a) Es el plano, π , que contiene a C y a $r: \vec{d}_r(1, 1, 0); P(2, 1, 1) \in r$.



$$C(1, 1, -1)$$

$$\vec{PC}(-1, 0, -2) // \pi$$

Un vector normal al plano es:

$$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$$

La ecuación del plano es:

$$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0$$

$$2x - 2y - z - 1 = 0$$

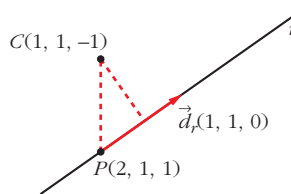
b) La distancia de C a r es la mitad del lado del cuadrado.

$$\vec{d}_r \times \vec{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$$

$$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

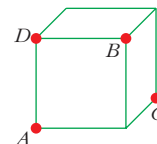
$$\text{dist}(C, r) = \frac{|\vec{PC} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{lado del cuadrado} = l = 3\sqrt{2} \approx 4,24$$

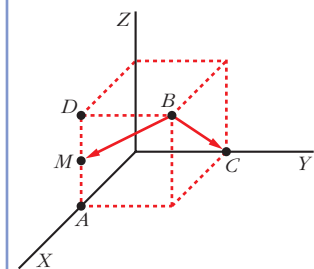


s61 En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta BC con la recta que une B con el punto medio del lado AD .

Vamos a considerar el cubo de lado 1 con un vértice en el origen:



Así: $A(1, 0, 0); B(1, 1, 1); C(0, 1, 0); D(1, 0, 1); M(1, 0, \frac{1}{2})$



$$\vec{BC}(-1, 0, -1); \vec{BM}(0, -1, -\frac{1}{2})$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{BC} \cdot \vec{BM}|}{|\vec{BC}| |\vec{BM}|} = \frac{1/2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,316 \rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54''$$

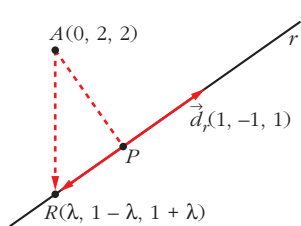
s62 Sea la recta r : $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

- a) Determina la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por $(0, 2, 2)$, y las coordenadas del punto P intersección de r y s .
- b) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y a s , y la de la recta t perpendicular a π por el punto P .
- c) Si Q es cualquier punto de t , explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de Q a r , a s y a π .

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z - 1 = 0 \rightarrow z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 - x \end{array} \right\} r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.



\vec{AR} ha de ser perpendicular a r ; es decir:

$$\vec{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$$

$$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

$$R(0, 1, 1)$$

La recta s pasa por $A(0, 2, 2)$ y por $R(0, 1, 1)$.

$$\vec{RA}(0, 1, 1) \rightarrow s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

b) Ecuación del plano π que contiene a r y a s :

$$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1); P(0, 1, 1) \in \pi$$

$$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

$$\pi: -2x - y + z = 0$$

Ecuación de la recta t perpendicular a π por el punto P :

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c) Si $Q \in t \rightarrow \text{dist}(Q, r) = \text{dist}(Q, s) = \text{dist}(Q, \pi) = \text{dist}(Q, P)$

Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P , luego las tres son iguales entre sí.

Página 209

s63 a) Halla la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.

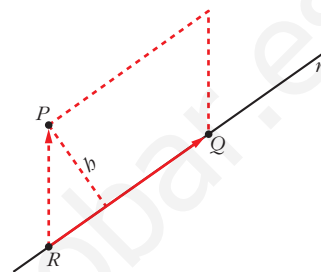
b) Encuentra todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R , de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

a) Si r es la recta que pasa por R y por Q ; entonces:

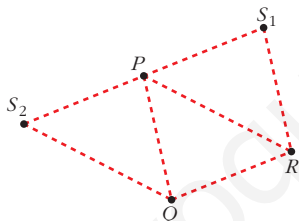
$$\text{dist}(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{RP} \times \vec{RQ}|}{|\vec{RQ}|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{RP}(0, -1, 4) \\ \vec{RQ}(0, 2, 2) \end{array} \right\} \vec{RP} \times \vec{RQ} = (-10, 0, 0)$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|(-10, 0, 0)|}{|(0, 2, 2)|} = \frac{10}{\sqrt{4+4}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54 \text{ u}$$



b) Hay dos posibilidades: que P y Q sean vértices consecutivos, o que lo sean P y R .



- Si P y Q son consecutivos, obtenemos $S_1(x, y, z)$:
 $\vec{QP} = \vec{RS}_1 \rightarrow (0, -3, 2) = (x-1, y, z+1)$
 $S_1(1, -3, 1)$

- Si P y R son consecutivos, obtenemos $S_2(a, b, c)$:

$$\vec{RP} = \vec{QS}_2 \rightarrow (0, -1, 4) = (a-1, b-2, c-1) \rightarrow S_2(1, 1, 5)$$

s64 Halla el plano de la familia $mx + y + z - (m + 1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.

Hallamos la distancia del origen, $(0, 0, 0)$, al plano y la igualamos a 1:

$$\text{dist} = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m + 1)|}{\sqrt{m^2 + 1 + 1}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 2}} = 1$$

$$|m + 1| = \sqrt{m^2 + 2} \rightarrow (m + 1)^2 = m^2 + 2 \rightarrow m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{El plano es: } \frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0; \text{ es decir: } x + 2y + 2z - 3 = 0$$

- s65** Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que equidistan de los puntos $A(1, -1, 0)$ y $B(2, 3, -4)$. Comprueba que obtienes un plano perpendicular a \overline{AB} y que pasa por el punto medio de AB .

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico: $\text{dist}(P, A) = \text{dist}(P, B) \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 8z + 16$$

$$\pi: 2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow \text{Ecuación de un plano.}$$

- Veamos que π es perpendicular a \overline{AB} :

$$\overline{AB} = (1, 4, -4)$$

Vector normal al plano $\rightarrow \vec{n}(2, 8, -8) // \overline{AB}$

Luego $\overline{AB} \perp \pi$.

- Comprobamos que π pasa por el punto medio de AB :

$$M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{0-4}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 1, -2 \right)$$

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

El plano π es el *plano mediador del segmento* AB .

- s66** Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos siguientes:

$$\alpha: 3x + y - 2z + 1 = 0$$

$$\beta: x - 3y + 2z - 3 = 0$$

☛ Hay dos soluciones. Son los planos bisectores del diedro que determinan α y β .

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\text{dist}(P, \alpha) = \text{dist}(P, \beta) \rightarrow \frac{|3x + y - 2z + 1|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{|x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{1 + 9 + 4}}$$

$$|3x + y - 2z + 1| = |x - 3y + 2z - 3|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 2z + 1 = x - 3y + 2z - 3 \rightarrow 2x + 4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow x + 2y - 2z + 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 1 = -x + 3y - 2z + 3 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Son los *planos bisectores del diedro que determinan* α y β .

- 67** Halla las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.

Si P es un punto del plano $x = y$, entonces es de la forma $P(x, x, z)$. La distancia de P al plano dado ha de ser igual a 1, es decir:

$$\frac{|2x - x + 2z - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|x + 2z - 2|}{3} = 1$$

$$|x + 2z - 2| = 3 \begin{cases} x + 2z - 2 = 3 & \rightarrow x + 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = -3 & \rightarrow x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas: $r: \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases}$ $s: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$

s68 a) **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones $3x - 4y + 5 = 0$ y $2x - 2y + z + 9 = 0$.**

b) ¿Qué puntos del eje OY equidistan de ambos planos?

a) Si $P(x, y, z)$ es uno de los puntos del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$$

$$\begin{cases} 9x - 12y + 15 = 10x - 10y + 5z + 45 & \rightarrow x + 2y + 5z + 30 = 0 \\ 9x - 12y + 15 = -10x + 10y - 5z - 45 & \rightarrow 19x - 22y + 5z + 60 = 0 \end{cases}$$

Son los planos bisectores del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Un punto del eje OY es de la forma $Q(0, y, 0)$. La distancia de Q a cada uno de los planos ha de ser la misma, es decir:

$$\frac{|-4y + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-2y + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \rightarrow \frac{|-4y + 5|}{5} = \frac{|-2y + 9|}{3}$$

$$3|-4y + 5| = 5|-2y + 9|$$

$$\begin{cases} -12y + 15 = -10y + 45 & \rightarrow -2y = 30 \rightarrow y = -15 \\ -12y + 15 = 10y - 45 & \rightarrow -22y = -60 \rightarrow y = \frac{30}{11} \end{cases}$$

Hay dos puntos: $Q_1(0, -15, 0)$ y $Q_2\left(0, \frac{30}{11}, 0\right)$

s69 **Calcula el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 que están a igual distancia de $P(-1, 2, 5)$ y $Q(-3, 4, 1)$.**

¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicho conjunto?

Si $A(x, y, z)$ es un punto del conjunto, su distancia a P y a Q ha de ser la misma, es decir:

$$\text{dist}(A, P) = \text{dist}(A, Q) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 10z + 25 =$$

$$= x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 2z + 1 \rightarrow -4x + 4y - 8z + 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi: x - y + 2z - 1 = 0$$

Es el plano mediodor del segmento que une P y Q .

La distancia de P a dicho plano será igual a la mitad de la distancia entre P y Q :

$$\text{dist}(P, Q) = |\vec{PQ}| = |(-2, 2, -4)| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{dist}(P, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \approx 2,45$$

70 Halla la ecuación de la esfera que pasa por:

$$A(1, 1, 1), B(1, 2, 1), C(1, 1, 2), D(2, 1, 1)$$

La ecuación es de la forma $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

Sustituimos cada uno de los cuatro puntos en la ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + a + b + c + d = 0 \rightarrow a + b + c + d = -3 \\ 1 + 4 + 1 + a + 2b + c + d = 0 \rightarrow a + 2b + c + d = -6 \\ 1 + 1 + 4 + a + b + 2c + d = 0 \rightarrow a + b + 2c + d = -6 \\ 4 + 1 + 1 + 2a + b + c + d = 0 \rightarrow 2a + b + c + d = -6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ b = -3 \\ c = -3 \\ d = 6 \end{array}$$

La ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

71 a) Halla la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en el punto $P(1, 2, 1)$.

b) ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto a P en la esfera dada?

a) El punto P es un punto de la esfera.

El centro de la esfera es $C(1, 2, 0)$.

El plano que buscamos pasa por P y es perpendicular al vector $\vec{CP}(0, 0, 1)$.

Su ecuación es: $0 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 1) = 0$, es decir: $z - 1 = 0$

b) Es el simétrico de P respecto del centro de la esfera.

Si llamamos $P'(x, y, z)$ al punto que buscamos, C es el punto medio del segmento PP' , es decir:

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{1+z}{2} \right) = (1, 2, 0) \rightarrow P'(1, 2, -1)$$

- 72** Halla la ecuación de la esfera tangente a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y que tiene su centro en la recta:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

El centro de la esfera es de la forma $C(-2, 0, z)$ (pues pertenece a la recta r).

La distancia del centro a cada uno de los planos es la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\frac{|-2 - 2z - 8|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-4 - z + 5|}{\sqrt{4 + 1}} \rightarrow \frac{|-2z - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|-z + 1|}{\sqrt{5}} \rightarrow |-2z - 10| =$$

$$= |-z + 1| \begin{cases} -2z - 10 = -z + 1 \rightarrow z = -11 \rightarrow C_1(-2, 0, -11) \\ -2z - 10 = z - 1 \rightarrow -3z = 9 \rightarrow z = -3 \rightarrow C_2(-2, 0, -3) \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $C_1(-2, 0, -11) \rightarrow \text{Radio} = \frac{12}{\sqrt{5}}$

Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = \frac{144}{5}$

- $C_2(-2, 0, -3) \rightarrow \text{Radio} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \frac{16}{5}$

- 73** La esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ corta al plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ en una circunferencia. Halla su centro y su radio.

- Obtengamos el centro de la circunferencia:

—El centro de la esfera es $P(3, -2, 1)$.

—La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es:

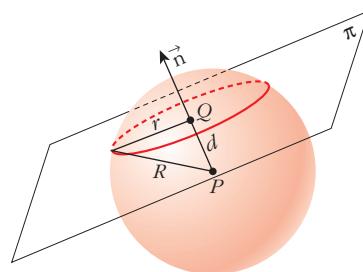
$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

—El punto de corte de esta recta con el plano dado es el centro de la circunferencia:

$$2(3 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0$$

$$6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

$$Q(1, 0, 0)$$



- Calculamos el radio de la circunferencia:

La distancia entre los centros P y Q es:

$$d = |\overrightarrow{QP}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

El radio de la esfera es $R = 5$.

Luego el radio de la circunferencia es: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

- 74 a) Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y que tiene su centro en la recta:**

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-1}$$

- b) ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en B a dicha esfera?**

a) Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Como el centro pertenece a esta recta, es de la forma $C(8 + 2\lambda, 3 + \lambda, -4 - \lambda)$

La distancia de C a los puntos A y B ha de ser la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\text{dist}(A, C) = \text{dist}(B, C) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$|(2\lambda + 4, \lambda + 2, -\lambda - 1)| = |(2\lambda + 5, \lambda + 1, -\lambda - 5)|$$

$$\sqrt{(2\lambda + 4)^2 + (\lambda + 2)^2 + (-\lambda - 1)^2} = \sqrt{(2\lambda + 5)^2 + (\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 5)^2}$$

$$4\lambda^2 + 16 + 16\lambda + \lambda^2 + 4 + 4\lambda + \lambda^2 + 1 + 2\lambda =$$

$$= 4\lambda^2 + 25 + 20\lambda + \lambda^2 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 25 + 10\lambda$$

$$-10\lambda = 30 \rightarrow \lambda = -3 \rightarrow C(2, 0, -1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 3 = \text{radio de la esfera.}$$

La ecuación es: $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$$

b) Un vector normal al plano es $\overrightarrow{CB} = (1, 2, 2)$.

El plano pasa por $B(3, 2, 1)$. Su ecuación es:

$$1 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 1) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

- 75** Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2, 3, 4)$ sea el doble de la distancia a $B(3, -1, -2)$.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, debe cumplir:

$$\text{dist}(P, A) = 2\text{dist}(P, B)$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2}$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 2[x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 4z + 4]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 29 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 4y + 8z + 28$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 10y + 16z - 1 = 0$$

Es una esfera de centro $(8, -5, -8)$ y radio $\sqrt{154} \approx 12,4$.

- 76** Dados $A(4, 2, 0)$ y $B(2, 6, -4)$, halla el lugar geométrico de los puntos P tales que PA sea perpendicular a PB .

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AP}(x-4, y-2, z) \\ \vec{BP}(x-2, y-6, z+4) \end{array} \right\} \text{ han de ser perpendiculares, es decir:}$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 \rightarrow (x-4)(x-2) + (y-2)(y-6) + z(z+4) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 + y^2 - 8y + 12 + z^2 + 4z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$$

Es una esfera de centro $(3, 4, -2)$ y radio 3.

- 77** Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $(2, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$ sea igual a 6.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = 36 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 8x + 36$$

$$3\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 2x + 9$$

$$9[x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2] = 4x^2 + 36x + 81$$

$$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 + 9z^2 = 4x^2 + 36x + 81$$

$$5x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1$$

Es un elipsoide.

78 Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de $(0, 0, 3)$ y del plano $z = -3$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto del lugar geométrico pedido. Entonces:

$$\text{dist} = (P, (0, 0, 3)) = \text{dist} (P, \{z = -3\})$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2} = \frac{|z + 3|}{\sqrt{1}} = |z + 3|$$

Por tanto:

$$x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = (z + 3)^2$$

$$x^2 + y^2 + \cancel{z^2} - 6z + \cancel{9} = \cancel{z^2} + 6z + \cancel{9}$$

$$x^2 + y^2 - 12z = 0$$

Se trata de un *paraboloide*.

79 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a $(0, 5, 0)$ y $(0, -5, 0)$ sea igual a 4.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$|\sqrt{x^2 + (y - 5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y + 5)^2 + z^2}| = 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = 16 + x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 20y + 16$$

$$\pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 5y + 4$$

$$4(x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2) = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 + 4y^2 + 40y + 100 + 4z^2 = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 - 21y^2 + 4z^2 = -84$$

$$-\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{21} = 1$$

Es un *hiperboloide*.

80 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos $(2, 3, 4)$ y $(2, 3, -4)$ es igual a 8? ¿Cómo se llama la superficie que obtienes?

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2} = 8$$

$$\cancel{(x - 2)^2} + (y - 3)^2 + \cancel{(z - 4)^2} = 64 + \cancel{(x - 2)^2} + (y + 3)^2 + \cancel{(z - 4)^2} -$$

$$- 16\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2}$$

$$16\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2} = 64 + 12y$$

$$4\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 16 + 3y$$

$$16(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16) = 256 + 96y + 9y^2$$

$$16x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 64x - 128z + 208 = 0$$

Se trata de un *elipsoide*.

- 81** ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos $(-4, 3, 1)$ y $(4, 3, 1)$ es igual a 6?

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} = 6$$

$$4x - 9 = 3\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}$$

$$7x^2 - 9y^2 - 9z^2 + 54y + 18z - 153 = 0$$

Se trata de un *hiperboloide*.

- 82** Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano $x = y$ y del punto $(0, -2, 1)$.

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2)}$$

$$\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 2x^2 + 2y^2 + 8y + 8 + 2z^2 - 4z + 2$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 8y - 4z + 10 = 0$$

Se trata de un *paraboloide*.

Página 210

CUESTIONES TEÓRICAS

- 83** La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano del espacio. Explica qué característica tiene dicho plano en cada uno de los casos siguientes:

i) $a = 0, b = 0$

ii) $b = 0, c = 0$

iii) $a = 0, c = 0$

iv) $d = 0$

i) Es perpendicular al eje OZ . (Paralelo al plano OXY).

ii) Es perpendicular al eje OX . (Paralelo al plano OYZ).

iii) Es perpendicular al eje OY . (Paralelo al plano OXZ).

iv) Pasa por el origen, $(0, 0, 0)$.

- 84** Define la proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π y explica el procedimiento que emplearías para obtenerla.

La proyección ortogonal de un punto, P , sobre un plano, π , es un punto, P' , tal que el vector \vec{PP}' es perpendicular a π . Un procedimiento para obtener P' sería el siguiente:

Se halla la recta, r , perpendicular a π que pasa por P . El punto de corte entre r y π es el punto buscado, P' .

- 85** Dada una recta r y un punto P de ella, ¿cuántas rectas perpendiculares a r que pasen por el punto P se pueden trazar?

Infinitas. Todas las que, pasando por P , están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por P .

- 86** Dado el plano $\pi: x - 3y + 2z - 1 = 0$, escribe las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un vector $\vec{v}(a, b, c)$ para que tenga la dirección de alguna recta contenida en el plano.

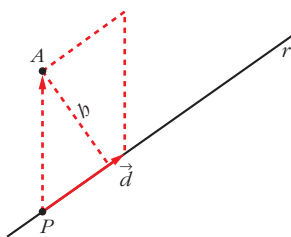
$\vec{v}(a, b, c)$ debe ser perpendicular al vector normal del plano π , $\vec{n}(1, -3, 2)$; es decir: $(a, b, c) \cdot (1, -3, 2) = a - 3b + 2c = 0$

- 87** Justifica que la distancia del punto $A(x_2, y_2, z_2)$ a la recta:

$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ se puede calcular mediante la fórmula:

$$d(A, r) = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Llamamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{d}(a, b, c)$. P es un punto de la recta y \vec{d} un vector dirección de esta.



La distancia de A a la recta r es igual a la altura del paralelogramo determinado por \vec{PA} y \vec{d} , es decir:

$$\begin{aligned} \text{dist}(A, r) &= \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{Base}} = \frac{|\vec{PA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \\ &= \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

- 88** Sean r la recta determinada por el punto A y el vector \vec{d}_r y s la recta determinada por el punto B y el vector \vec{d}_s . Sabemos que r y s se cruzan.

a) Justifica que la distancia entre r y s se puede calcular así:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) Justifica que la perpendicular común a r y a s se puede obtener así:

$$\begin{cases} \det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ \det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

a) $\text{dist}(r, s)$ = altura del paralelepípedo determinado por:

$$\vec{AB}, \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p , perpendicular a r y a s , tiene por vector dirección $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Esta recta, p , es la intersección de los planos α y β , siendo:

α : Plano que contiene a s y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

$$\alpha: \det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0, \text{ donde } X = (x, y, z)$$

β : Plano que contiene a r y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

$$\beta: \det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$$

$$\text{Por tanto: } p: \begin{cases} \det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ \det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

- 89** Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ un punto del plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ un punto tal que $\vec{AB} \cdot (a, b, c) = 0$. Demuestra que, entonces, $B \in \pi$.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot (a, b, c) = 0 &\rightarrow a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow (ax_2 + by_2 + cz_2) - \underbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1)}_{-d \text{ (pues } A \in \pi)} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \rightarrow B \in \pi \end{aligned}$$

PARA PROFUNDIZAR

- s90** Los puntos $P(1, -1, 1)$ y $Q(3, -3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado. Sabemos que dicho cuadrado está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.

a) Halla los vértices restantes.

b) Calcula el perímetro del cuadrado.

- a) Los otros dos vértices, R y S , pertenecen a la mediatriz del segmento PQ .

La mediatriz del segmento PQ tiene como vector dirección el vector normal al plano $x + y = 0$; es decir, $(1, 1, 0)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ ; es decir, por $M(2, -2, 2)$. Luego la ecuación de la mediatriz es:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

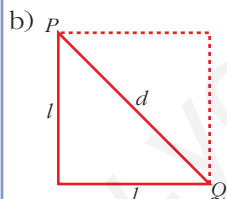
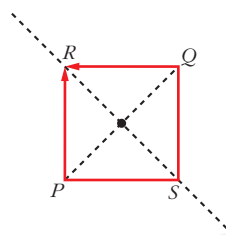
Un punto de r es de la forma $R(2 + \lambda, -2 + \lambda, 2)$.

Buscamos R tal que $\vec{PR} \cdot \vec{QR} = 0$ (es decir $\vec{PR} \perp \vec{QR}$):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{PR}(1 + \lambda, -1 + \lambda, 1) \\ \vec{QR}(-1 + \lambda, 1 + \lambda, -1) \end{array} \right\} \vec{PR} \cdot \vec{QR} = \lambda^2 - 1 + \lambda^2 - 1 - 1 = 2\lambda^2 - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Los vértices son: $R\left(\frac{4 + \sqrt{6}}{2}, \frac{-4 + \sqrt{6}}{2}, 2\right)$ y $S\left(\frac{4 - \sqrt{6}}{2}, \frac{-4 - \sqrt{6}}{2}, 2\right)$



La longitud de la diagonal es:

$$d = |\vec{PQ}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{12}$$

$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow 12 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{6}$$

El perímetro será: $P = 4\sqrt{6}$

91 Considera los puntos siguientes:

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$$

Prueba que la distancia, d , del origen de coordenadas al plano ABC verifica:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

El plano que pasa por A, B y C es:

$$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ (véase ejercicio 66 a) de la unidad 6),}$$

$$\text{es decir: } \pi: \frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0$$

Así, si $O(0, 0, 0)$, entonces:

$$\text{dist}(O, \pi) = \frac{\left| \frac{1}{a} \cdot 0 + \frac{1}{b} \cdot 0 + \frac{1}{c} \cdot 0 - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = d \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{d} \rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

92 Considera las rectas r , s y t :

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Halla las coordenadas de un punto P que está en la recta t y que determina con la recta s un plano que contiene a r .

El enunciado es enrevesado, pero el problema, una vez estudiado, es sencillo:

Las rectas r y s deben ser coplanarias. El plano que determinan, π , ha de tener un punto, P , situado en la recta t .

En la resolución, empezaremos viendo si r y s son coplanarias. Si lo son, hallaremos el plano π que determinan. La intersección de t y π es el punto P buscado.

Escribimos las ecuaciones de r , s y t en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \quad t: \begin{cases} x = k \\ y = -1 - k \\ z = k \end{cases}$$

- ¿Son r y s coplanarias?

Evidentemente, no son paralelas, pues $(0, 1, 1)$ no es paralelo a $(1, -1, -2)$.

Veamos si se cortan. Para ello, igualamos, una a una, sus coordenadas:

$$\left. \begin{array}{l} -2 = \mu \\ \lambda = -\mu \end{array} \right\} \mu = -2, \lambda = 2$$

$\lambda = -2 - 2\mu \rightarrow 2 = -2 - 2 \cdot (-2)$? Sí, es cierto. Por tanto, se cortan.

El punto de corte de r y s se obtiene haciendo $\lambda = 2$ en las ecuaciones de r , o bien $\mu = -2$ en las ecuaciones de s . Se obtiene el punto $(-2, 2, 2)$.

- Hallamos la ecuación del plano π determinado por r y s :

Un vector normal al plano es:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0, 1, 1) \times (1, -1, -2) = (-1, 1, -1) \rightarrow \vec{n}(1, -1, 1)$$

Logo el plano es: $\pi: 1(x + 2) - 1(y - 2) + 1(z - 2) = 0$

$$\pi: x - y + z + 2 = 0$$

- P es el punto de corte de π con la recta t :

$$k - (-1 - k) + k + 2 = 0 \rightarrow k + 1 + k + k + 2 = 0 \rightarrow 3k + 3 = 0 \rightarrow k = -1$$

El punto es $P(-1, 0, -1)$.

- 93** Halla las intersecciones de la superficie $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ con los tres planos

coordenados. ¿Qué figuras obtienes? ¿Cómo se llama la superficie dada?

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Con $x = 0$: $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes 4 y 3.*

Con $y = 0$: $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes 5 y 3.*

Con $z = 0$: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes 5 y 4.*

Es un *elipsoide*.

- 94** Halla el centro y las longitudes de los ejes del elipsoide siguiente:

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

$$2(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) = 3 + 8 + 3 + 4$$

$$2(x - 2)^2 + 3(y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 18$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{6} + \frac{(z - 2)^2}{18} = 1$$

Centro: $(2, -1, 2)$

Semiejes: $3, \sqrt{6}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

- 95** Halla las intersecciones de la superficie $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ con los planos

coordenados, y describe qué tipo de curvas obtienes. ¿Cómo se llama la superficie dada?

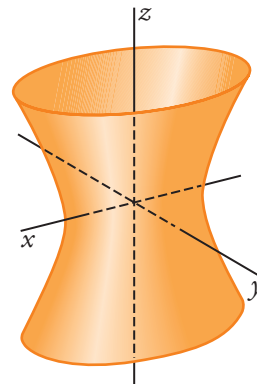
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Con $x = 0$: $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real 2.*

Con $y = 0$: $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real 3.*

Con $z = 0$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes 3 y 2.*

Es un *hiperboloide*.



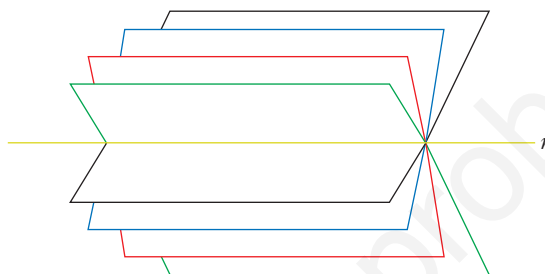
Página 211

96 Haz de planos

La recta r : $\begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ es la intersección de los planos π y σ .

El conjunto de todos los planos que contienen a r se llama *HAZ DE PLANOS* de arista r , y su expresión analítica es:

$$a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$



Para cada par de valores de a y b (salvo para $a = 0$ y $b = 0$), se obtiene la ecuación de un plano del haz.

- a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.
- b) ¿Para qué valor de k uno de los planos del haz es perpendicular a la recta t : $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{k}$?
- ¿Cuál es ese plano del haz?
- c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.
- d) Escribe la expresión del haz de planos cuya arista es la recta s :

$$s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

- e) ¿Cuál de los planos de este haz dista más del origen de coordenadas?

a) El término independiente será cero: $-4a + b = 0 \rightarrow b = 4a$. Luego:

$$a(2x + 3y - z - 4) + 4a(x - 2y + z + 1) = 0; \text{ es decir:}$$

$$2x + 3y - z - 4 + 4(x - 2y + z + 1) = 0$$

$$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$$

$$6x - 5y + 3z = 0$$

b) Un plano del haz es:

$$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$$

Un vector normal al plano es: $\vec{n}(2a + b, 3a - 2b, -a + b)$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a + b}{3} = \frac{3a - 2b}{5} = \frac{-a + b}{k}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10a + 5b = 9a - 6b \\ 2ka + kb = -3a + 3b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a + 11b = 0 \rightarrow a = -11b \\ (2k + 3)a + (k - 3)b = 0 \\ -11(2k + 3) + (k - 3) = 0 \rightarrow -22k - 33 + k - 3 = 0 \\ -21k - 36 = 0 \rightarrow k = \frac{-36}{-21} = \frac{-12}{7} \rightarrow k = \frac{-12}{7} \end{array}$$

El plano del haz es:

$$\begin{aligned} -11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) &= 0 \\ -11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) &= 0 \\ -22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 &= 0 \\ -21x - 35y + 12z + 45 &= 0 \end{aligned}$$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r , arista del haz.

Vector dirección de r : $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t : $\vec{d}' = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d}' = 0 \rightarrow (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \rightarrow k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b , y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r . Por ejemplo: $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x - 5}{3} = \frac{y + 1}{-2} \rightarrow -2x + 10 = 3y + 3 \rightarrow -2x - 3y + 7 = 0$$

$$\frac{x - 5}{3} = \frac{z - 3}{1} \rightarrow x - 5 = 3z - 9 \rightarrow x - 3z + 4 = 0$$

$$s: \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x + 3y - 7) + b(x - 3z + 4) = 0$$

e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a \vec{OO}' , siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s :

Un punto genérico de la recta s es:

$$P(5 + 3\lambda, -1 - 2\lambda, 3 + \lambda)$$

Un vector dirección de s es $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector \vec{OP} ha de ser perpendicular a \vec{d}_s :

$$\vec{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \rightarrow 3(5 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) = 0$$

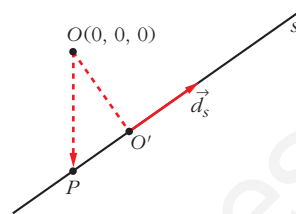
$$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \rightarrow 14\lambda + 20 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-20}{14} = \frac{-10}{7}$$

Luego:

$O'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\vec{OO}'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; o bien $(5, 13, 11)$.

El plano será: $5\left(x - \frac{5}{7}\right) + 13\left(y - \frac{13}{7}\right) + 11\left(z - \frac{11}{7}\right) = 0$

$$5x + 13y + 11z - 45 = 0$$



Página 211

AUTOEVALUACIÓN

$$1. r_1: \begin{cases} x = 11 + 4\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 11 - 9\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = 7 - 7\lambda \end{cases}$$

a) Halla las distancias entre los puntos de corte de r_1 y r_2 con:

$$\pi: 2x - 5y + 3z - 4 = 0$$

b) Halla el ángulo de r_1 con r_2 .

c) Halla el ángulo de r_1 con π .

a) Veamos primeramente que r_1 y r_2 se cortan con π , es decir, que no son perpendiculares al vector normal a π .

$$(4, 2, 3) \cdot (2, -5, 3) = 7 \neq 0 \Rightarrow r_1 \text{ corta a } \pi$$

$$(-9, -5, -7) \cdot (2, -5, 3) = -14 \neq 0 \Rightarrow r_2 \text{ corta a } \pi$$

Hallamos ahora los puntos de corte de r_1 y r_2 con π . Para ello, en cada caso sustituimos las coordenadas del punto genérico de la recta en la ecuación del plano:

- r_1 con π :

$$2(11 + 4\lambda) - 5(5 + 2\lambda) + 3(7 + 3\lambda) - 4 = 0$$

Operando se obtiene $\lambda = -2$. Por tanto, el punto de corte es $P(3, 1, 1)$.

- r_2 con π :

$$2(11 - 9\lambda) - 5(5 - 5\lambda) + 3(7 - 7\lambda) - 4 = 0$$

Operando se obtiene $\lambda = 1$. Por tanto, el punto de corte es $Q(2, 0, 0)$.

La distancia entre los dos puntos es:

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$$

- b) Las rectas r_1 y r_2 se cortan, evidentemente, en el punto $(11, 5, 7)$. Veamos su ángulo:

$$\cos(\widehat{r_1, r_2}) = \frac{|4 \cdot (-9) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-7)|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{9^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{67}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{155}} = 0,99933237$$

$$\widehat{r_1, r_2} = 2^\circ 5' 38''$$

- c) $\cos(90^\circ - (\widehat{\pi, r_1})) = \frac{|4 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 3|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{38}} = 0,2108663$

$$90^\circ - (\widehat{\pi, r_1}) = 77^\circ 49' 37''$$

$$(\widehat{\pi, r_1}) = 12^\circ 10' 23''$$

2. $\alpha: 2x + 5y - 7z + 4 = 0$

$\beta: 5x - y + z - 4 = 0$

$\gamma: 2x + 5y - 7z + 49 = 0$

Calcula la distancia entre α y β y entre α y γ .

Los planos α y β se cortan, ya que sus coeficientes no son proporcionales. Por lo tanto, la distancia entre α y β es 0.

Los planos α y γ son paralelos, puesto que sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

$P(-2, 0, 0)$ es un punto de α . Por tanto:

$$\text{dist}(\alpha, \gamma) = \text{dist}(P, \gamma) = \frac{|2 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 49|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{45}{\sqrt{78}} = \frac{15\sqrt{78}}{26}$$

3. Calcula m para que $\text{dist}(P, Q) = 5$, siendo $P(3, -1, 11)$ y $Q(7, -1, m)$.

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(7-3)^2 + (-1+1)^2 + (m-11)^2} = 5 \rightarrow 4^2 + (m-11)^2 = 25$$

Hay dos soluciones: $m = 14$ y $m = 8$

4. Halla la distancia de $P(1, -4, 3)$ a la recta: $r: \frac{x-2}{5} = \frac{4-2y}{2} = \frac{z+1}{3}$

(Ojo con el numerador de la segunda fracción).

La recta r se puede expresar como:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

En la segunda fracción hemos dividido numerador y denominador entre 2 para que el coeficiente de y sea 1.

El vector director de r es $\vec{d} = (5, -1, 3)$.

Hallamos el vector \vec{PQ} , siendo $Q(2, 2, -1)$ un punto de la recta r . $\vec{PQ} = (1, 6, -4)$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{|1 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) - 4 \cdot 3|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{35}} = \frac{13\sqrt{35}}{35}$$

5. Calcula la distancia entre las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x - y + z + 4 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

Expresamos la recta s en ecuaciones paramétricas para que sea fácil tomar un punto, P , y un vector director, \vec{d}_s , de dicha recta. Hacemos $z = \lambda$ y despejamos:

$$s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 4 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad P(0, 4, 0) \in s \quad \vec{d}_s(-3, -5, 1)$$

Q y \vec{d}_r son, respectivamente, un punto y un vector director de la recta r :

$$Q(3, 5, 4) \in r; \quad \vec{d}_r(2, -1, 1)$$

Hallamos el vector $\vec{PQ} = (3, 1, 4)$.

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s \cdot \vec{PQ}|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} \quad [\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -45$$

$$|\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |-4, 5, 13| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 13^2} = \sqrt{210}$$

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|-45|}{\sqrt{210}} = \frac{45}{\sqrt{210}} = \frac{3\sqrt{210}}{14}$$

6. Halla las ecuaciones de la recta que corta perpendicularmente a r y s .

$$r: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 3 \\ y = -6 + 4\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Las rectas r y s se cruzan.

Por ser la recta buscada, t , perpendicular a r y a s , su vector director es:

$$\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 5, 0) \times (0, 4, 1) = (5, -1, 4)$$

Vamos a definir la recta t como intersección de dos planos:

Plano α : contiene a r y a t .

El vector normal al plano será:

$$\vec{d}_t \times \vec{d}_r = (5, -1, 4) \times (1, 5, 0) = (-20, 4, 26) // (-10, 2, 13)$$

Como contiene a r , pasa por el punto $(-3, -2, 0)$. Por tanto:

$$\alpha: -10(x + 3) + 2(y + 2) + 13z = 0$$

$$\alpha: -10x + 2y + 13z - 26 = 0$$

Plano β : contiene a s y a t .

El vector normal al plano será:

$$\vec{d}_t \times \vec{d}_s = (5, -1, 4) \times (0, 4, 1) = (-17, -5, 20)$$

Como contiene a s , pasa por el punto $(3, -6, 2)$. Por tanto:

$$\beta: -17(x - 3) - 5(y + 6) + 20(z - 2) = 0$$

$$\beta: -17x - 5y + 20z - 19 = 0$$

Por tanto, la recta t es:

$$\begin{cases} -10x + 2y + 13z - 26 = 0 \\ -17x - 5y + 20z - 19 = 0 \end{cases}$$

En paramétricas:

$$t: \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

7. a) Halla el área del triángulo determinado por los puntos de corte del plano $3x + y + 2z - 6 = 0$ con los tres ejes coordenados.

b) Halla el volumen de la pirámide determinada por esos tres puntos y el origen de coordenadas.

a) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

$$\bullet \text{ Eje } X: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2; P(2, 0, 0)$$

$$\bullet \text{ Eje } Y: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$y - 6 = 0 \rightarrow y = 6; Q(0, 6, 0)$$

$$\bullet \text{ Eje } Z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$2z - 6 = 0 \rightarrow z = 3; R(0, 0, 3)$$

El área del triángulo de vértices P , Q y R es la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores \vec{PQ} y \vec{PR} .

$$\begin{aligned} A_{\text{TRIÁNGULO}} &= \frac{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|}{2} = \frac{|(-2, 6, 0) \times (-2, 0, 3)|}{2} = \\ &= \frac{|(18, 6, -12)|}{2} = \frac{\sqrt{18^2 + 6^2 + 12^2}}{2} = 3\sqrt{14} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{\text{Área triángulo} \cdot \text{altura}}{3}$$

La altura es la distancia del origen de coordenadas al plano.

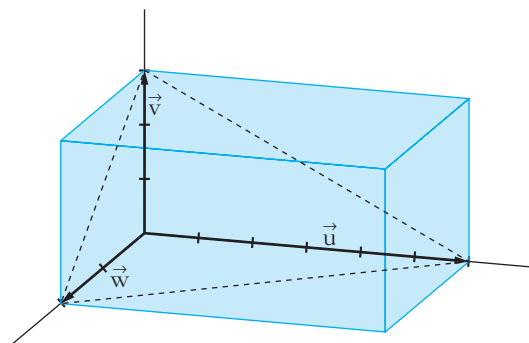
$$\text{altura} = \frac{|-6|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}} \text{ u}$$

$$V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{14} \cdot \frac{6}{\cancel{\sqrt{14}}}}{\cancel{3}} = 6\text{u}^3$$

Otra forma:

La pirámide es la sexta parte del ortoedro de aristas 2, 3 y 6.

$$V = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 6 \text{ u}^3$$



8. a) Halla el centro y el radio de esta esfera:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 20 = 0$$

b) Calcula el radio de la circunferencia que determina el plano $3x - 4z + 5 = 0$ al cortar a S .

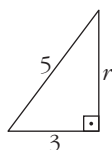
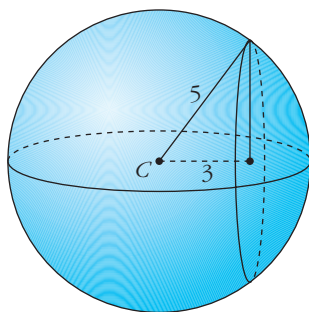
a) Completamos cuadrados en la ecuación de la esfera:

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5^2$$

Por tanto, el *radio* es 5, y el *centro*, $C(2, 0, -1)$.

b) Hallamos la distancia del centro de la esfera al plano $\pi: 3x - 4z + 5 = 0$:

$$\text{dist}(C, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ u}$$



Por Pitágoras:

$$r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ u}$$