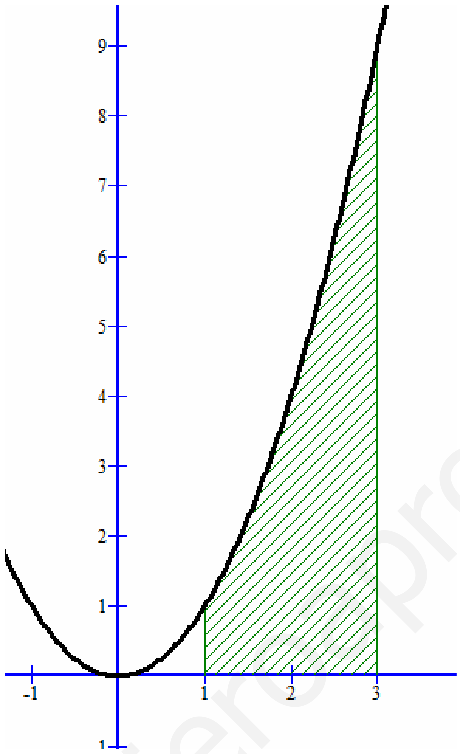
Integrales Definidas. Aplicaciones

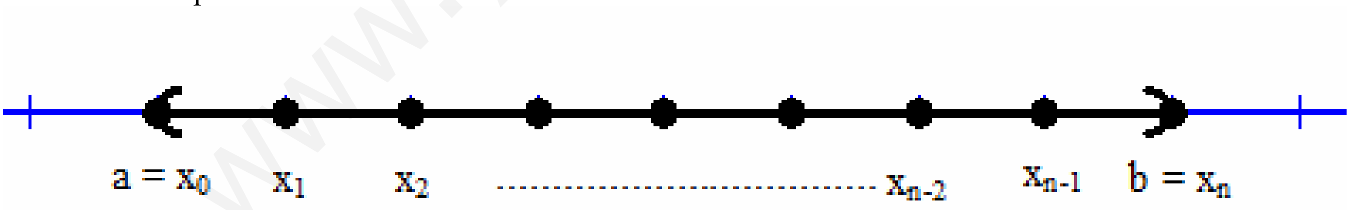
1. ÁREAS DE RECINTOS PLANOS. INTEGRAL DEFINIDA

Nos planteamos el cálculo de áreas de recintos limitados por curvas que vienen dadas por funciones reales ,como por ejemplo el área sombreada de la figura siguiente, que es el área limitada por la función $f(x) = x^2$ entre x = 1 y x = 3 y el eje OX



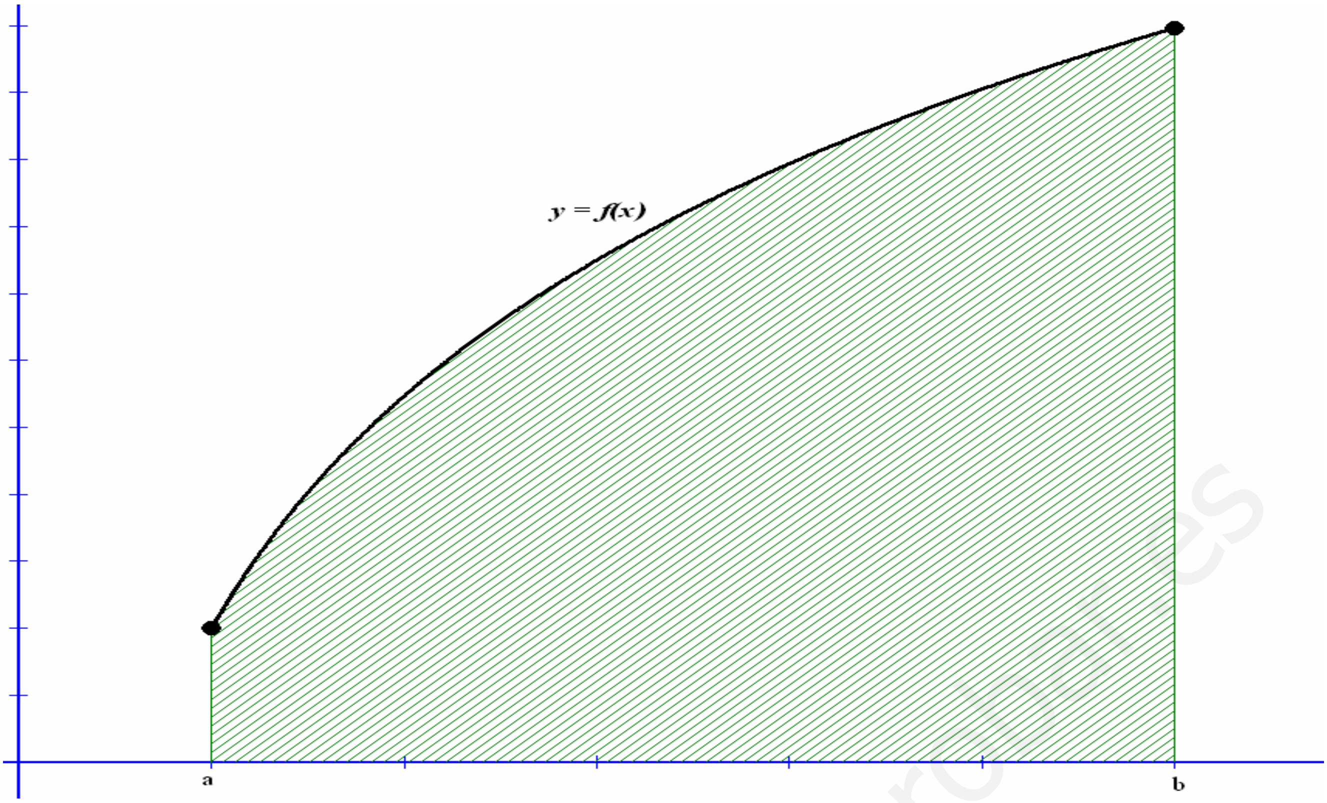
Lo que vamos a hacer es trocear el intervalo en subintervalos, y a esto lo llamamos una partición del intervalo.
Definición.- Dado un intervalo cerrado [a, b], diremos que un conjunto ordenado y finito de números reales P = $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_x\}$ es una PARTICIÖN del intervalo [a, b] si se cumple que

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, con lo que los (n+1) números reales dividen al intervalo [a, b] en n subintervalos.
Gráficamente quedaría así:



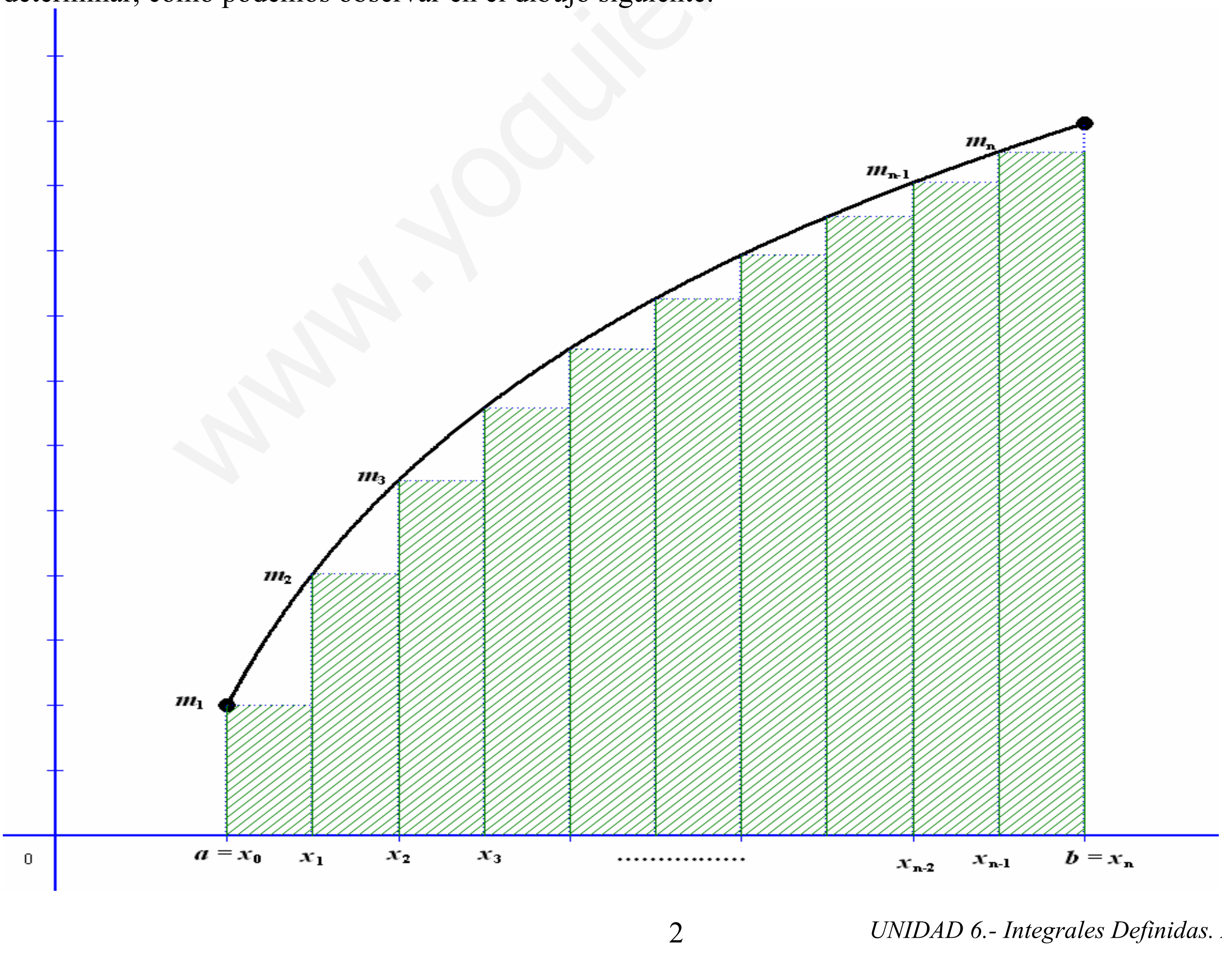
Aquí en el dibujo hemos hecho los subintervalos de la misma amplitud pero no es necesario, pueden tenerla diferente.

Consideremos ahora que queremos calcular el área siguiente: el determinado por la función y = f(x) y el eje OX entre a y b



Vamos a tomar una partición del intervalo P = { $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_x$ } cumpliendo que
$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_x = b$

Y en cada subintervalo de la forma $[x_i, x_{i+1}]$, tomamos el mínimo absoluto que alcanza la función en ese intervalo y lo llamamos m_i y podemos construir mediante rectángulos una aproximación por defecto del área a determinar, como podemos observar en el dibujo siguiente:

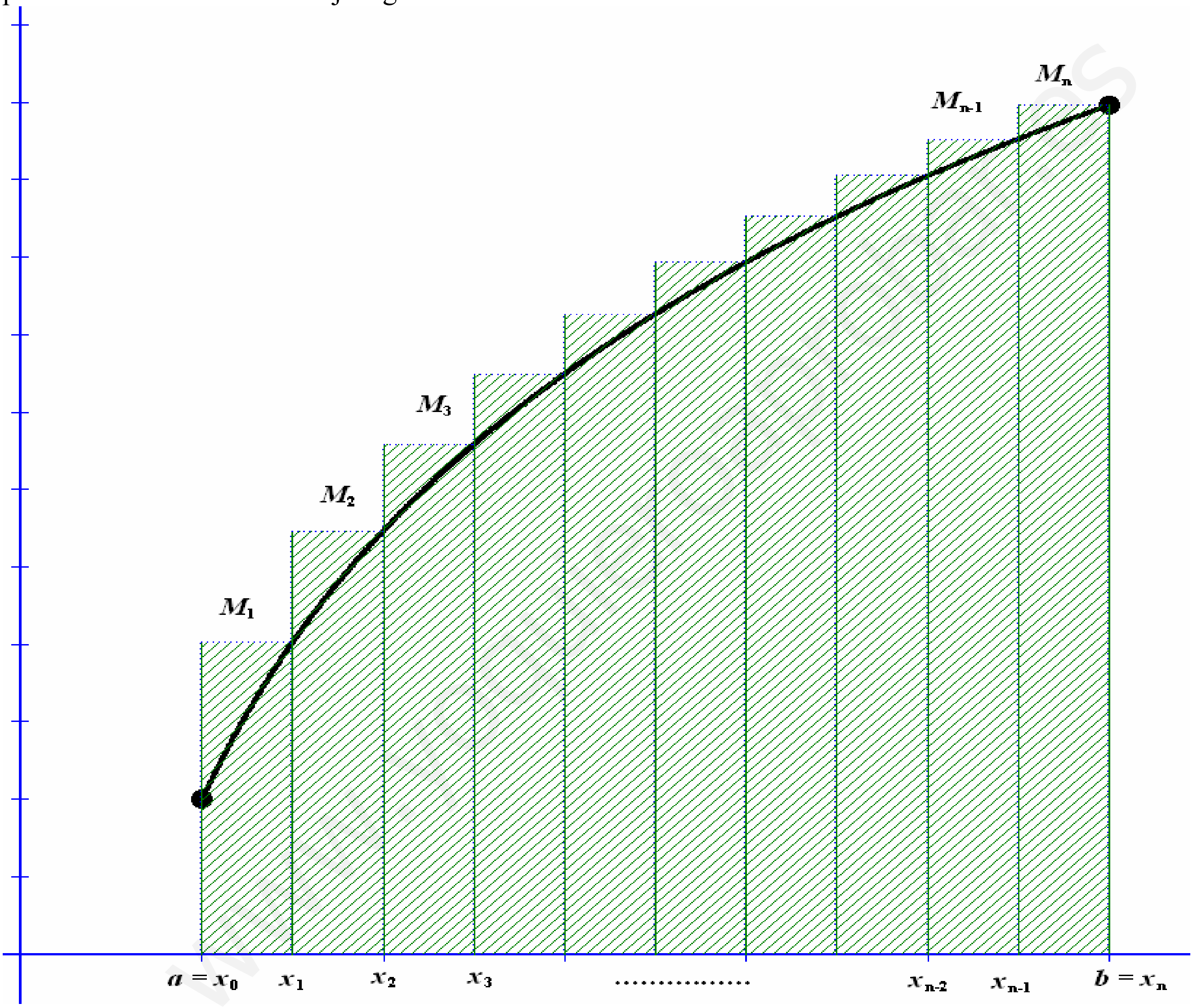


El área de cada rectángulo es base por altura: $(x_{i+1}-x_i)\cdot m_{i+1}$ con $0 \le i \le n-1$ y si los sumamos todas las áreas de los rectángulos obtenemos la aproximación del área que queremos calcular. A esta suma la llamamos ***sumas inferiores asociada a la partición P y se representa por s(P)***. Así:

s(P) = $(x_1-x_0)\cdot m_1+(x_2-x_1)\cdot m_2+(x_3-x_2)\cdot m_3+\ldots\ldots+(x_{n-1}-x_{n-2})\cdot m_{n-1}+(x_n-x_{n-1})\cdot m_n$

Que abreviando con el signo sumatorio nos queda: s(P) $=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\cdot m_{i+1}$

Análogamente para la misma partición P podemos ahora tomar los máximos absolutos en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y los notamos por M_i. Podemos obtener una aproximación por exceso del área a determinar, como podemos observar en el dibujo siguiente:



El área de cada rectángulo es base por altura: $(x_{i+1}-x_i)\cdot M_{i+1}$ con $0 \le i \le n-1$ y si sumamos todas las áreas de los rectángulos obtenemos la aproximación del área que queremos calcular. A esta suma la llamamos ***sumas superiores asociada a la partición P y se representa por S(P)***. Así:

S(P) = $(x_1-x_0)\cdot M_1+(x_2-x_1)\cdot M_2+(x_3-x_2)\cdot M_3+\ldots\ldots+(x_{n-1}-x_{n-2})\cdot M_{n-1}+(x_n-x_{n-1})\cdot M_n$

Que abreviando con el signo sumatorio nos queda: S(P) $=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\cdot M_{i+1}$

Fácilmente se observa que: $s(P) \le \acute{A}rea \le S(P)$. Esto es para esta partición, supongamos que la partición la vamos haciendo mucho más fina (aumentamos n, el nº de puntos en que dividimos el intervalo), es más, hacemos $\lim_{n\to+\infty} s(P)$ y $\lim_{n\to+\infty} S(P)$. Estos límites darán como resultado el área pedida, y podemos concluir que: $\lim_{n\to+\infty} s(P) = \text{Área} = \lim_{n\to+\infty} S(P)$

El ejemplo de función que hemos usado es continua, creciente y positiva en [a, b] pero funciona igual para funciones que sean continuas en [a, b], lo único que pasa que si es negativa, el resultado puede tener signo positivo o negativo

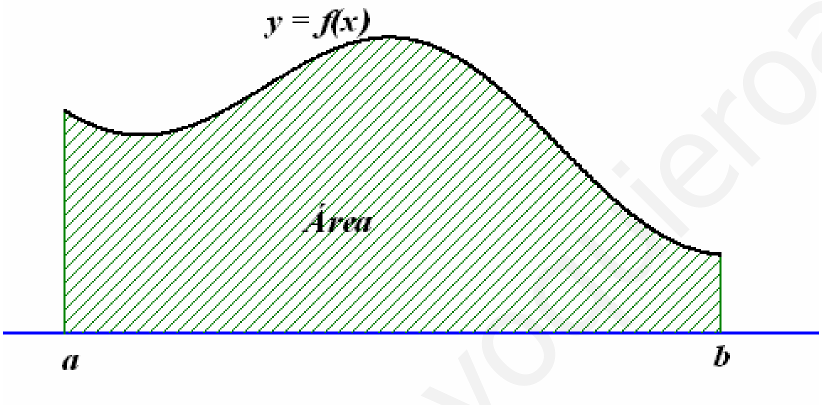
Definición.- Dada una función f continua en un intervalo cerrado [a, b], se define la ***integral definida de la función f en el intervalo [a, b]*** que se representa como $\int_a^b f(x)dx$ al siguiente valor:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} s(P) = \lim_{n\to+\infty} S(P)$$

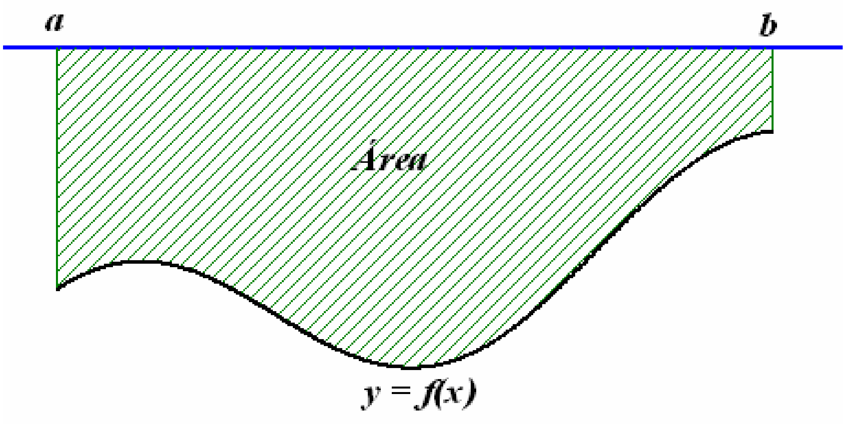
Al nº b **se le llama límite superior de integración** y al nº a **se le llama límite inferior de integración**

NOTAS: Para calcular el área tenemos que tener muy en cuenta el signo de la función, como vemos a continuación

1) Si la función es positiva en el intervalo [a, b], entonces Área = $\int_a^b f(x)dx$

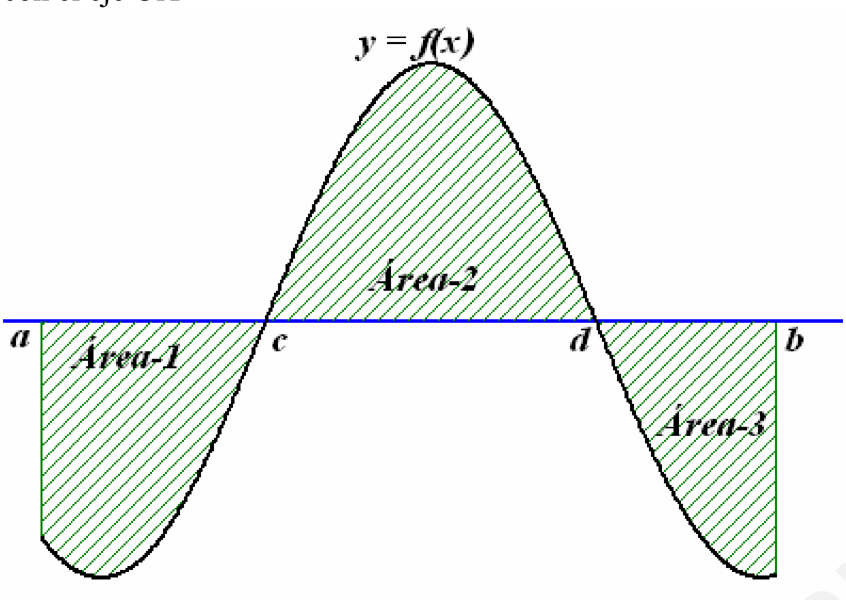


2) Si la función es definida negativa en el intervalo [a, b], entonces Área = $-\int_a^b f(x)dx$, pues tenemos que por la definición $\int_a^b f(x)dx \le 0$



3) Si la función cambia de signo en el intervalo [a, b], entonces tenemos que trocear la integral (véase el dibujo) separando las partes positivas de las negativas: Área = Área-1 + Área-2 + Área-3 =

$-\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx$. Por tanto será necesario conocer los puntos de corte de la función con el eje OX



Propiedades de la integral indefinida:

1.- Si los límites de integración son iguales, la integral definida es nula

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2.- Si $y = f(x)$ es positiva en el intervalo [a, b], entonces $\int_a^b f(x)dx > 0$, y coincide con el área del recinto.

3.- Si $y = f(x)$ es negativa en el intervalo [a, b], entonces $\int_a^b f(x)dx < 0$, y coincide con el área del recinto pero de signo opuesto.

4.- Si c .es un punto interior del intervalo [a, b], se cumple que: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

5.- Al intercambiar los límites de integración, la integral cambia de signo: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

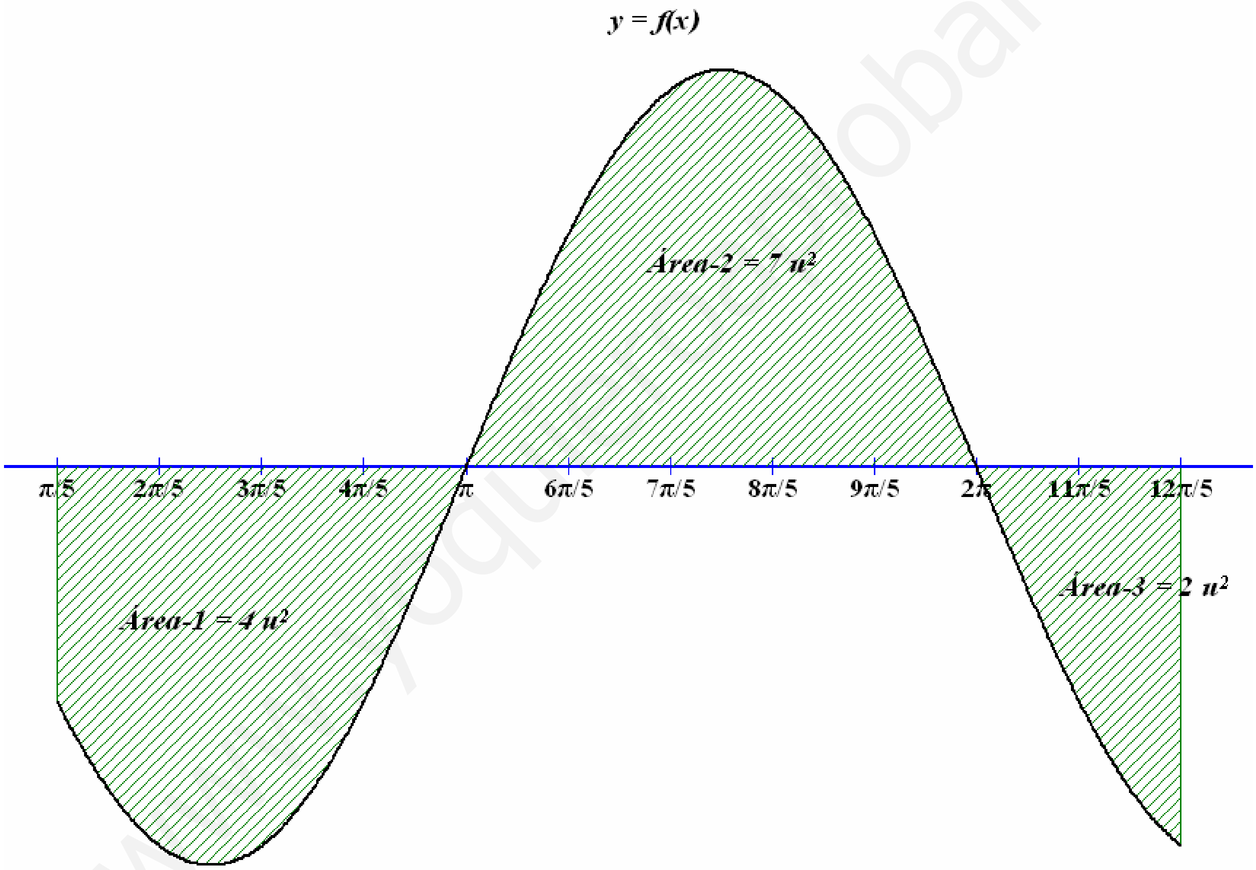
6.- Linealidad de la integral indefinida:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

7.- Si $f(x) \le g(x)$ en el intervalo [a, b], entonces $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Ejemplo 1.- Con los datos del dibujo, que representa una función y el área de determinadas regiones con el eje OX, vemos que::



a) $\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = 7$ b) $\int_{\frac{\pi}{5}}^{\pi} f(x)dx = -4$ c) $\int_{\frac{\pi}{5}}^{2\pi} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{5}}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = (-4) + 7 = 3$

d) $\int_{2\pi}^{\pi} f(x)dx = -7$ e) $\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{12\pi}{5}} f(x)dx = -4 + 7 - 2 = 1$ f) $\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{12\pi}{5}} |f(x)|dx = 4 + 7 + 2 = 13$

2. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL. REGLA DE BARROW

Teorema fundamental del cálculo integral:

Dada un función $y = f(x)$ continua en un intervalo cerrado [a, b] y consideramos la función asociada

$G(x) = \int_a^x f(t)dt$ con $x \in$ [a, b], entonces se tiene que:

- G es derivable en [a, b]
- G es un primitiva de f, es decir, $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in$ [a, b]

Regla de Barrow:

La integral definida de una función f continua en un intervalo cerrado [a, b] es igual a la diferencia de los valores que toma una primitiva cualquiera F de f de los extremos superior e inferior del intervalo [a, b]
Se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Resumiendo, para calcular integrales definidas $\int_a^b f(x)dx$ hacemos los siguientes pasos:

1. Calculamos la integral indefinida correspondiente I = $\int f(x)dx$
2. Tomamos una primitiva cualquiera, normalmente se toma para C = 0.
3. Aplicamos la Regla de Barrow a esa primitiva.

Ejemplo 2.- Calcular $\int_{-2}^{3} (2x^2 - x + 2)dx$

Calculamos la integral indefinida correspondiente:

I = $\int (2x^2 - x + 2)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$

Tomamos una de las primitivas (por ejemplo para C = 0) $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_{-2}^{3} (2x^2 - x + 2)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{3} = \left(\frac{2 \cdot 3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 2 \cdot 3\right) - \left(\frac{2 \cdot (-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2)\right) \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^{3} (2x^2 - x + 2)dx = \left(\frac{54}{3} - \frac{9}{2} + 6\right) - \left(\frac{-16}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = \frac{117}{6} - \left(\frac{-68}{6}\right) = \frac{185}{6}$$

Ejemplo 3.- Calcular $\int_3^8 \frac{-1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

Calculamos la integral indefinida:

I = $\int \frac{-1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$ mediante sustitución o cambio de variable.

Hacemos el cambio: $t^2 = x+1 \rightarrow \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ dx = 2\cdot t\cdot dt \end{cases}$ y sustituimos.

I = $\int \frac{-1}{(t^2-1)\sqrt{t^2}} 2\cdot t\cdot dt$ = $\int \frac{-2}{(t^2-1)}\,dt$ y nos resulta otra integral que hemos de hacer por descomposición en fracciones simples, como obviamente: $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, tenemos que poner:

$$\frac{-2}{(t^2-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \rightarrow \frac{-2}{(t^2-1)} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)} \rightarrow -2 = A(t+1) + B(t-1)$$

Damos valores: Para $t = 1 \rightarrow -2 = A\cdot 2 \rightarrow A = -1$

Para $t = -1 \rightarrow -2 = B\cdot(-2) \rightarrow B = 1$

I = $\int (\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{t+1})dx = -\ln|t-1| + \ln|t+1| + C \rightarrow \text{I} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C$ Por último, deshacemos el cambio, pues como $t^2 = x+1 \rightarrow t = \sqrt{x+1}$:

I = $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right| + C$

Tomamos la primitiva con C = 0 $\rightarrow F(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right|$

Por último aplicamos la regla de Barrow:

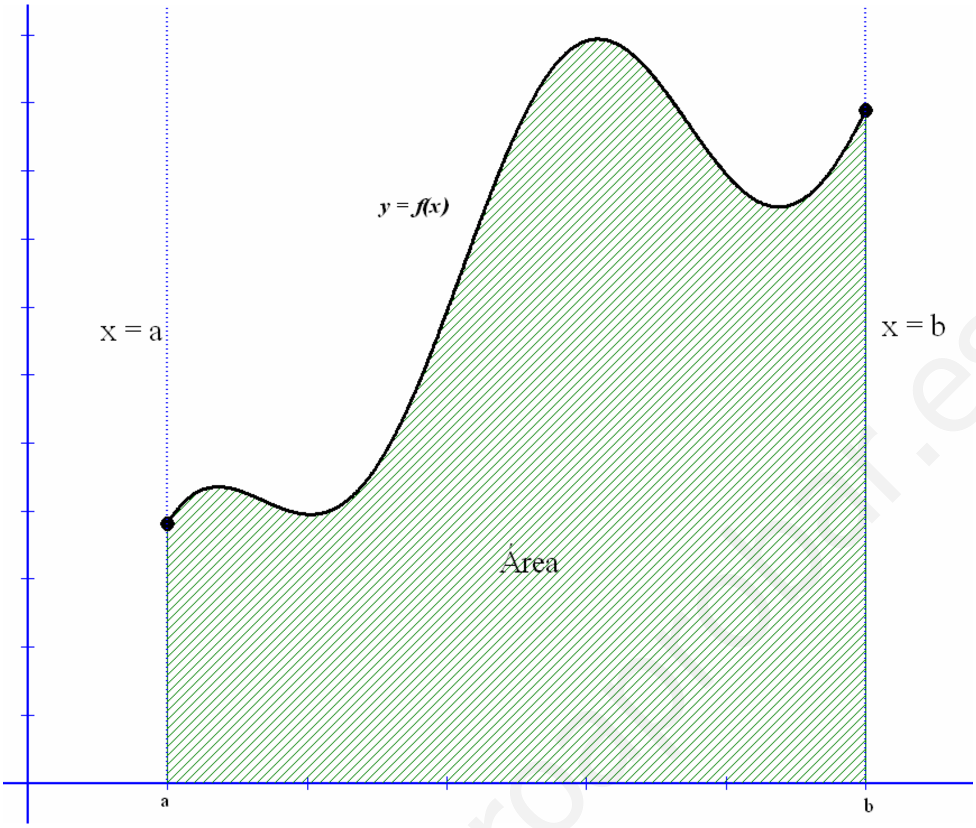
$$\int_3^8 \frac{-1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right|\right]_3^8 = \ln\left|\frac{\sqrt{8+1}+1}{\sqrt{8+1}-1}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{3+1}+1}{\sqrt{3+1}-1}\right| = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}$$

VER: Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 373

EJERCICIOS: De la página 386, el ejercicio 4, 5, 6, 7 y 8.

3. **<u>ÁREA ENCERRADA BAJO UNA CURVA</u>**

Vamos a calcular en este punto el área determinada por una función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales x = a y x= b



Para poder realizar este cálculo debemos de:

- Representar gráficamente la función $y = f(x)$ (especialmente en el intervalo [a, b]).
- Delimitar el recinto cuya área queremos calcular.
- Tener en cuenta el signo de la función. Si es negativa, la integral indefinida saldrá negativa y le tendremos que cambiar el signo para dar el resultado correcto del área.
- Además, si la función cambia de signo en el intervalo, hemos de dividir el cálculo del área en partes con signo constante para tener en cuenta los signos de las integrales.
- Tener en cuenta posibles simetrías del recinto para no hacer cálculos innecesarios.

<u>NOTA</u>: Ver página 374 del libro de texto para que nos quede claro las apreciaciones anteriores

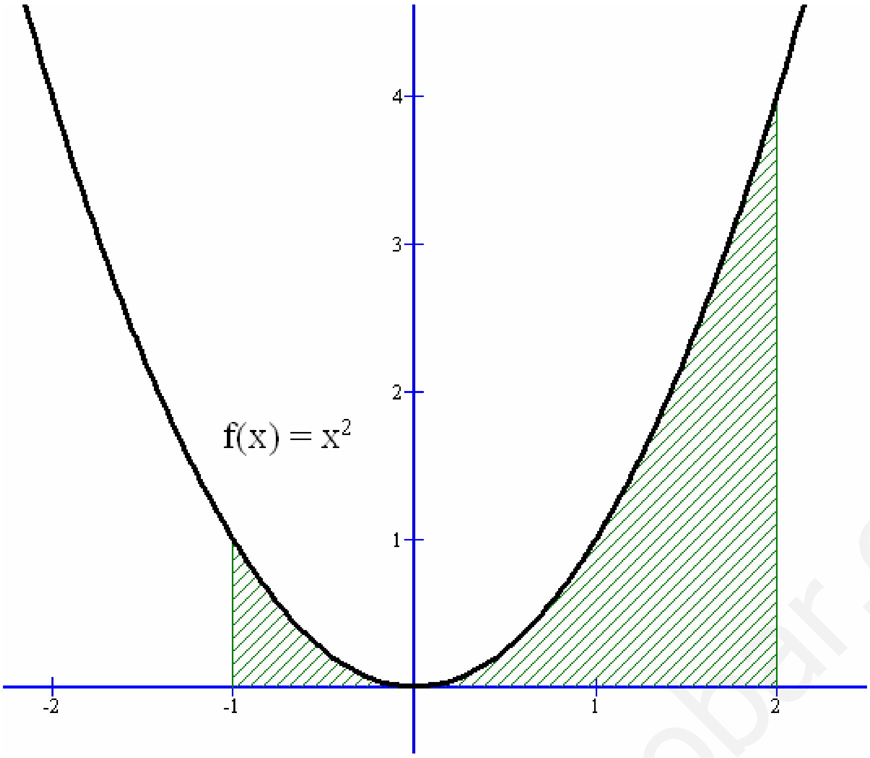
Veamos ejemplos donde apliquemos lo dicho:

<u>Ejemplo 4</u>.- Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^2$ y las rectas de ecuaciones x = -1 y x = 2

Lo primero que hemos de hacer es representar gráficamente la función, que en este caso por ser una parábola es fácilmente representable como podéis observar en el dibujo.

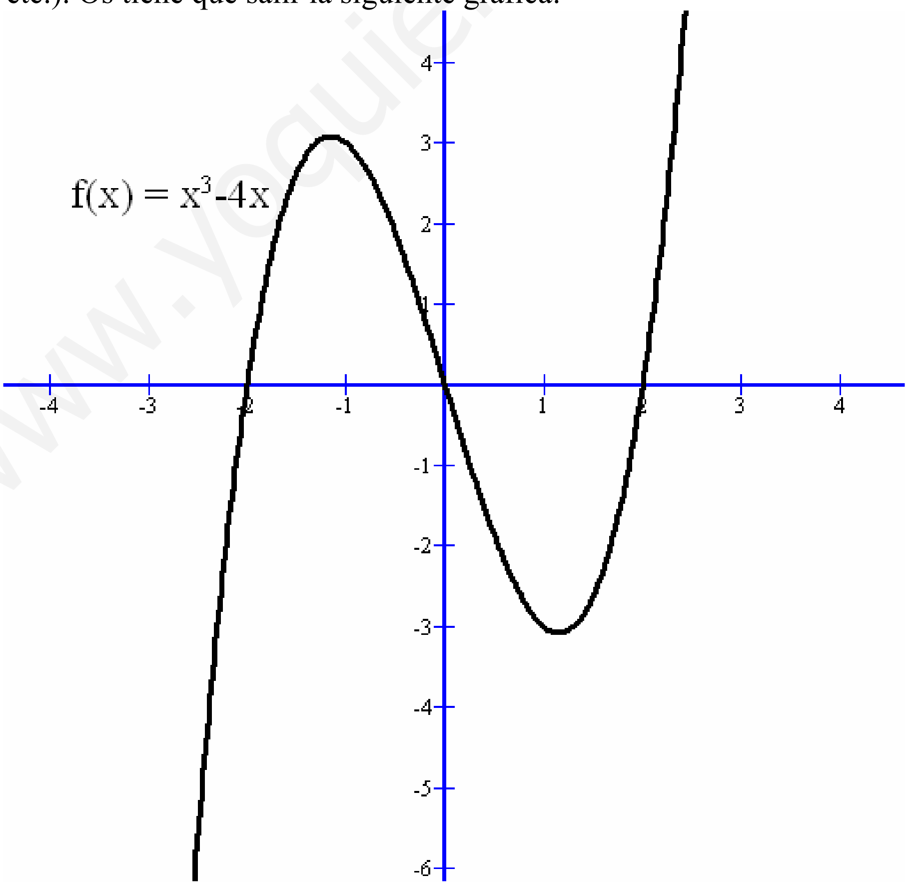
Lo que nos piden es el área sombreada, y como la función es positiva, podemos poner que:

$$\boxed{\text{Área} = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{-1}{3} = 3 \text{ u}^2}$$

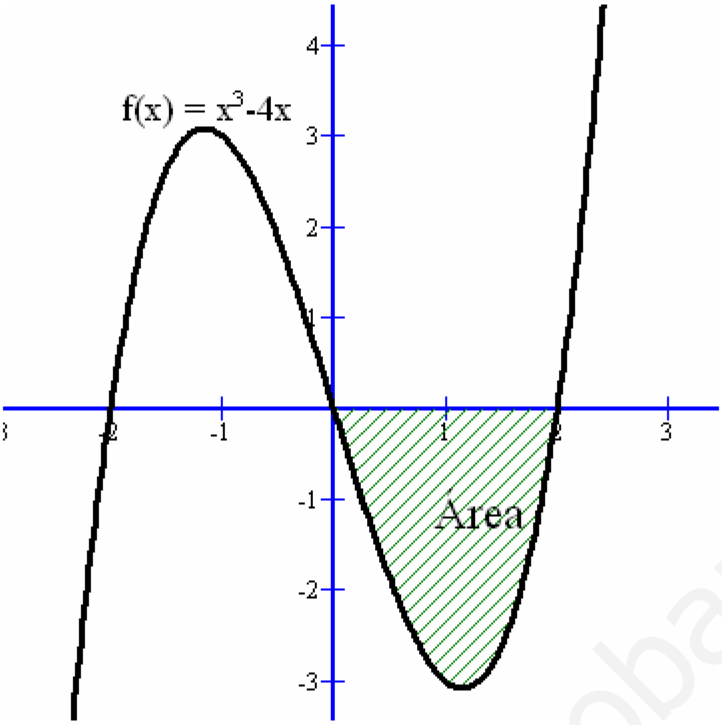


Ejemplo 5.- Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^3 - 4x$ y las rectas de ecuaciones x = 0 y x = 2

Os dejo a vosotros el estudio de la función para su representación gráfica (dominio, puntos de corte, monotonía, extremos, curvatura, etc.). Os tiene que salir la siguiente gráfica:



El área que nos piden es:



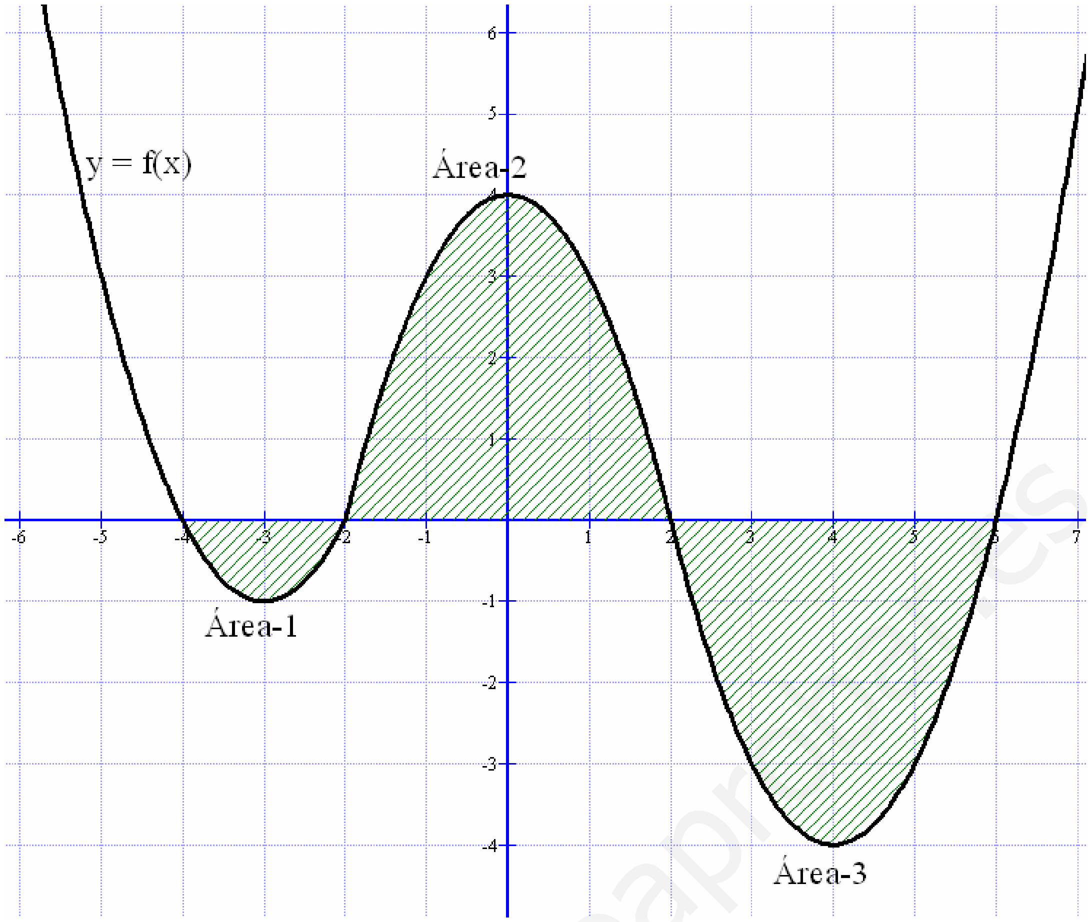
Como vemos la función entre 0 y 2 es negativa, por tanto la integral indefinida entre 0 y 2 saldrá negativa. Así lo que tenemos es que: Área = $-\int_0^2 (x^3-4x)dx$. Vamos a calcular la integral indefinida y al resultado le cambiamos el signo para que nos de el área

I = $\int (x^3-4x)dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C \rightarrow \int_0^2 (x^3-4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = -4$

$\boxed{\text{Área} = -(-4)\ u^2 = 4\ u^2}$

Ejemplo 6.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8 & si \quad x \le -2 \\ -x^2+4 & si \quad -2 < x < 2 \\ x^2-8x+12 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$, se pide calcular el área de la región limitada por la función y el eje OX

Lo primero es hacer la representación gráfica de la función dada, que es definida a trozos (cada uno es una porción de parábola). Os lo dejo a vosotros pero os tiene que salir esto:



El área pedida es la suma de las áreas 1, 2 y 3:

$$\text{Área-1} = -\int_{-4}^{-2} f(x)dx = -\int_{-4}^{-2}(x^2+6x+8)dx = -\left[\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right]_{-4}^{-2} =$$

$$-\left[\left(\frac{(-2)^3}{3}+3\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)\right)-\left(\frac{(-4)^3}{3}+3\cdot(-4)^2+8\cdot(-4)\right)\right] = -\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3}\,\text{u}^2$$

$$\text{Área-2} = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx = \left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} = \left[\left(\frac{-2^3}{3}+4\cdot 2\right)-\left(\frac{-(-2)^3}{3}+4\cdot(-2)\right)\right] = \frac{32}{3}\,\text{u}^2$$

$$\text{Área-3} = -\int_{2}^{6} f(x)dx = -\int_{2}^{6}(x^2-8x+12)dx = -\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+12x\right]_{2}^{6} = -\left[\left(\frac{6^3}{3}-4\cdot 6^2+12\cdot 6\right)-\left(\frac{2^3}{3}-4\cdot 2^2+12\cdot 2\right)\right]$$

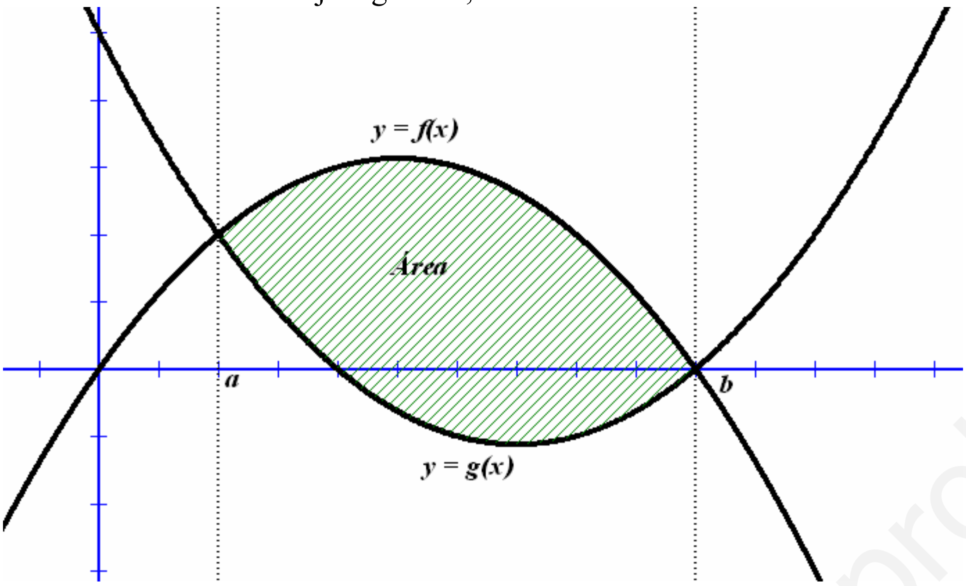
$$= \frac{32}{3}\,\text{u}^2$$

Por tanto, $\boxed{\text{Área} = \left(\frac{4}{3}+\frac{32}{3}+\frac{32}{3}\right)\text{u}^2 = \frac{68}{3}\,\text{u}^2}$

<u>VER</u>: Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 375
<u>EJERCICIOS</u>: De la página 386, el ejercicio 9, 10, 12, 13, 16, 37.

4. ÁREA ENCERRADA POR DOS CURVAS

Supongamos que tenemos dos funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, y queremos calcular el área del recinto limitado por las dos gráficas. Para ello nos va a hacer falta conocer los puntos de corte de ambas funciones y dibujarlas para saber cual de ellas es mayor que la otra.
Si fuera como en el dibujo siguiente,



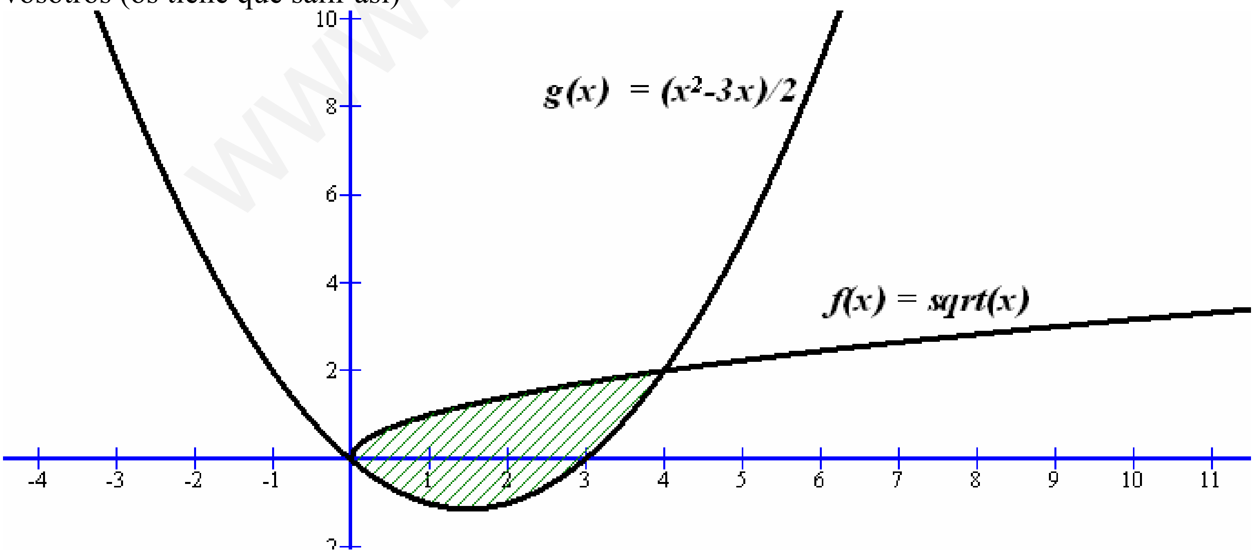
Tenemos que se cortan en $x = a$ y en $x = b$, y el área que tenemos que calcular (la sombreada) se obtiene mediante la siguiente integral indefinida:

$$Área = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \quad \text{pues} \quad f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Aquí no importa si una función es negativa, lo que importa es cual está por encima o por debajo.

Ejemplo 7.- Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{2}$

Lo primero que hemos de hacer es la gráfica de cada una de las funciones, que son fáciles y os la dejo a vosotros (os tiene que salir así)



Vamos a calcular los puntos de corte de las dos funciones:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=\dfrac{x^2-3x}{2} \end{cases} \rightarrow \sqrt{x}=\frac{x^2-3x}{2} \rightarrow 2\sqrt{x}=x^2-3x \rightarrow \text{(elevamos al cuadrado)}\ 4x=x^4-6x^3+9x^2 \rightarrow$$

$$x^4-6x^3+9x^2-4x=0 \rightarrow x\cdot\left(x^3-6x^2+9x-4\right)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=1 \text{ Esta solución no es válida ¿por qué?} \end{cases}$$

Así que,

$$\text{Área} = \int_0^4 \left[\sqrt{x}-\frac{x^2-3x}{2}\right]dx = \int_0^4 \left[\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right]dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{4}\right]_0^4 = \left(\frac{16}{3}-\frac{32}{3}+12\right)$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{20}{3}u^2}$$

<u>Ejemplo 8</u>.- (Selectividad 2010)

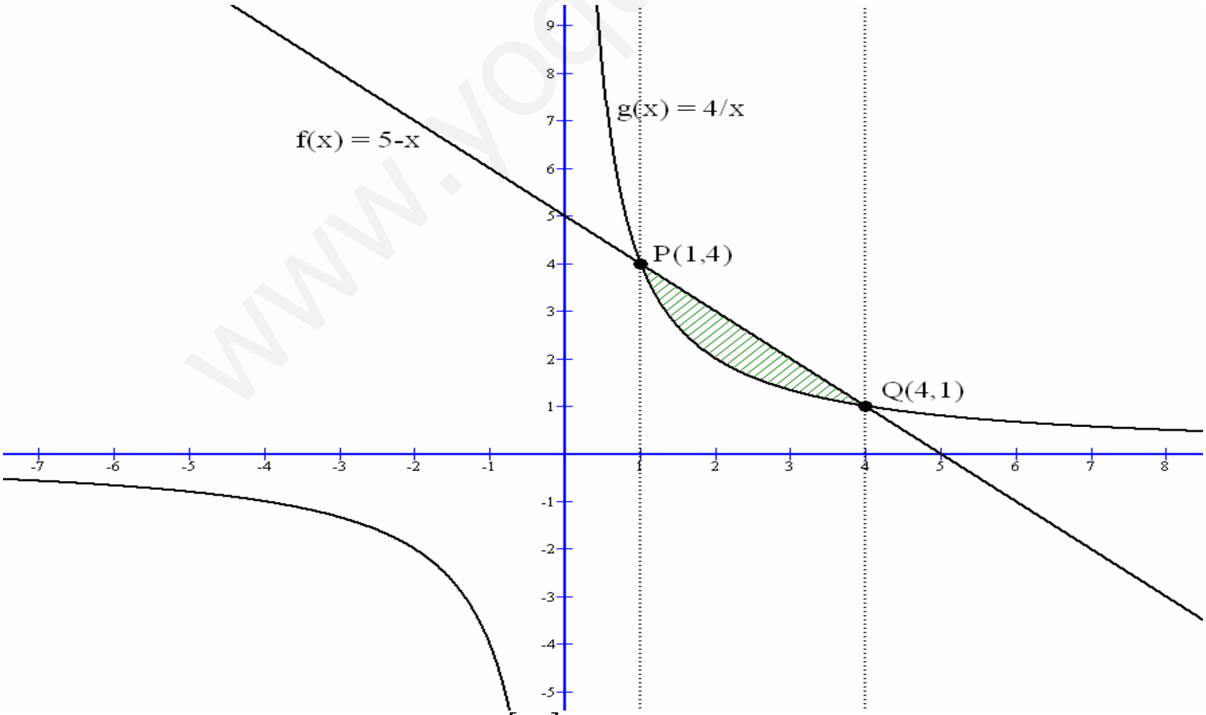
Considera la función $f(x)=5-x$ y la función $g(x)=\dfrac{4}{x}$ para $x \neq 0$

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de esas dos funciones indicando sus puntos de corte.
b) Calcula el área de dicho recinto

a) Son funciones fáciles de dibujar pues f es una recta y g es la hipérbola $y=\dfrac{1}{x}$ multiplicada por 4

Vamos a calcular los puntos de corte:

$$\begin{cases} y=5-x \\ y=\dfrac{4}{x} \end{cases} \rightarrow \frac{4}{x}=5-x \rightarrow \frac{4}{x}=\frac{5x-x^2}{x} \rightarrow 4=5x-x^2 \rightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow y=4 \\ x=4 \rightarrow y=1 \end{cases}$$ Por tanto los puntos de corte son $P(1,4)$ y $Q(4,1)$. El recinto es la zona sombreada:



b) Como vemos $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [1,4]$, por tanto el área del recinto es:

Área = $\int_1^4 \left[(5-x)-\frac{4}{x}\right]dx$ = (una primitiva es muy fácil de calcular para aplicar la regla de Barrow)

Área = $\left[5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x\right]_1^4 = [20-8-4\ln 4]-\left[5-\frac{1}{2}-4\cdot 0\right]$ → $\boxed{\text{Área} = \left(\frac{15}{2}-4\ln 4\right)\text{ u}^2}$

Ejemplo 9.- Considera las funciones $f: R \to R$ y $g: R \to R$ definidas por:

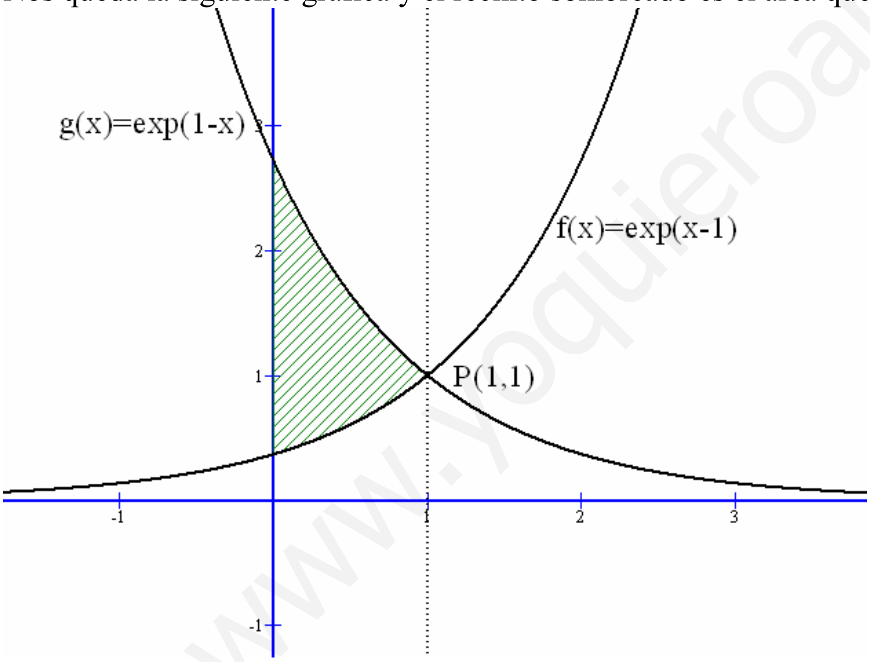
$$f(x) = e^{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = e^{1-x}$$

a) Esboza las gráficas de f y g y determina su punto de corte
b) Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de f y g

a) f es una función similar a la exponencial $y = e^x$ y g es similar a $y = e^{-x}$, que debemos conocer del año pasado y además estudiamos sus características básicas (monotonía, extremos, dominio, etc.)

El punto de corte → $\begin{cases} y = e^{x-1} \\ y = e^{1-x} \end{cases}$ → $e^{x-1} = e^{1-x}$ → $x-1 = 1-x$ → $x = 1$ → $y = e^0 = 1$ → $P(1,1)$

Nos queda la siguiente gráfica y el recinto sombreado es el área que hay que calcular en el apartado b)



c) El área pedida dado que f es mayor que g en el intervalo [0,1] es: Área = $\int_0^1 \left[e^{1-x}-e^{x-1}\right]dx$

Calculamos las primitivas correspondientes:
$I = \int \left(e^{1-x}-e^{x-1}\right)dx = -e^{1-x}-e^{x-1}+C$ (hacedla vosotros, es fácil)

Así: Área = $\left[-e^{1-x}-e^{x-1}\right]_0^1 = \left(-e^0-e^0\right)-\left(-e^1-e^{-1}\right)$ → Área = $-2+e+e^{-1}$ → $\boxed{\text{Área} = \frac{(e-1)^2}{e}\text{ u}^2}$

Ejemplo 10.- (Selectividad 2006) El área del recinto limitado por las curvas $y = \frac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$ con $a > 0$, vale 3. Calcula el valor de a

Dado que las curvas dadas dependen de un parámetro a, vamos a intentar hacer unas gráficas aproximadas de ellas.

$y=\frac{x^2}{a} \rightarrow y=\frac{1}{a}x^2$ Se trata por tanto de una curva similar a la parábola canónica $y=x^2$ multiplicada por un nº positivo luego también es $\bigcup$ y pasa por el punto (0,0)

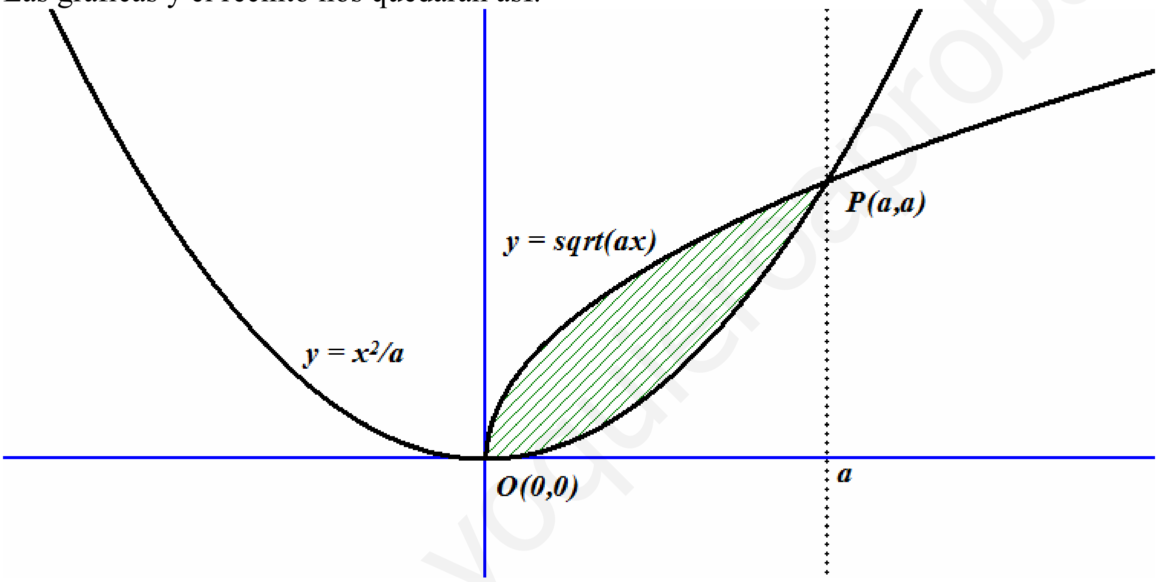
$y=\sqrt{ax} \rightarrow y=\sqrt{a}\sqrt{x}$, es similar a la curva $y=\sqrt{x}$ multiplicada por un nº positivo

Veamos dónde se cortan:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{a} \\ y=\sqrt{ax} \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{a}=\sqrt{ax} \rightarrow \text{(elevando al cuadrado)}\ \frac{x^4}{a^2}=ax \rightarrow x^4=a^3x \rightarrow x^4-a^3x=0 \rightarrow x\cdot\left(x^3-a^3\right)=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x^3=a^3 \rightarrow x=a \rightarrow y=a \end{cases}$$ Hay dos puntos de corte $O(0,0)$ y $P(a,a)$.

Las gráficas y el recinto nos quedarán asÍ.



Tenemos por tanto que el área del recinto sombreado es: Área = $\int_0^a \left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right)dx$. Calculamos la integral indefinida $I=\int\sqrt{ax}dx-\int\frac{x^2}{a}dx=\frac{1}{a}\int(ax)^{\frac{1}{2}}\cdot a\cdot dx-\frac{x^3}{3a}=\frac{1}{a}\frac{(ax)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3a}=\frac{2}{3a}\sqrt{a^3\cdot x^3}-\frac{x^3}{3a}+C$.

Área $=\left[\frac{2}{3a}\sqrt{a^3\cdot x^3}-\frac{x^3}{3a}\right]_0^a=\frac{2}{3a}\sqrt{a^3\cdot a^3}-\frac{a^3}{3a}=\frac{2a^2}{3}-\frac{a^2}{3}=\frac{a^2}{3}$ Como Área = 3 $\rightarrow \frac{a^2}{3}=3 \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-3 \text{ No válida} \end{cases}$

<u>VER</u>: Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 377

<u>EJERCICIOS</u>: De la página 386, el ejercicio 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15.