

1.- CONCEPTO DE PRIMITIVA DE UNA FUNCION:

Como hemos visto hasta ahora, la derivación es una técnica a partir de la cual dada una función cualquiera $f(x)$ podemos calcular su derivada $f'(x)$. Pues bien, ahora vamos a trabajar el proceso contrario, en el que conocida la derivada de una función $f'(x)$, tratamos de encontrar la función de la que proviene, *primitiva*, $f(x)$.



Sean f y F dos funciones definidas en un mismo intervalo de definición I , decimos que $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ en el intervalo I si ocurre que: $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) \text{ es la función primitiva de } f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas, que se diferencian entre sí en una constante.

Ejemplo: La función $f(x) = 2x$ tiene por primitivas $F(x) = \begin{cases} x^2 + 7 \\ x^2 \\ x^2 - 4 \end{cases}$ en general $x^2 + K$

Se llama **integral indefinida** de una función $f(x)$ al conjunto formado por todas sus primitivas, y se representa por:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$$

Se lee **integral de $f(x)$ diferencial de x** , y donde C es un número real cualquiera llamado **constante de integración**.

2.- PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES INDEFINIDAS:

- La integral de la suma (diferencia) de dos funciones es igual a la suma (diferencia) de las integrales de dichas funciones.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

- La integral del producto de una función por una constante k , es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

(un factor constante puede sacarse fuera de la integral)

Tipos	Formas	
	Simple	Compuesta
Potencial ($a \neq -1$)	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f' \cdot f^a dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmico	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f $
Exponencial	$\int e^x dx = e^x$ $\int a^x dx = a^x \cdot \ln a$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)}$ $\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x dx = \text{sen}x$	$\int \cos f \cdot f' dx = \text{sen}f$
Coseno	$\int \text{sen}x dx = -\cos x$	$\int \text{sen}f \cdot f' dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2 x dx = \text{tg}x$ $\int (1 + \text{tg}^2 x) dx = \text{tg}x$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}x$	$\int \sec^2(f) \cdot f' dx = \text{tg}(f)$ $\int [1 + \text{tg}^2(f)] \cdot f' dx = \text{tg}(f)$ $\int \frac{f'}{\cos^2(f)} dx = \text{tg}(f)$
Cotangente	$\int \text{cosec}^2 x dx = -\text{cot}g x$ $\int (1 + \text{cot}g^2 x) dx = -\text{cot}g x$ $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -\text{cot}g x$	$\int \text{cosec}^2(f) \cdot f' dx = -\text{cot}g(f)$ $\int [1 + \text{cot}g^2(f)] \cdot f' dx = -\text{cot}g(f)$ $\int \frac{f'}{\text{Sen}^2(f)} dx = -\text{cot}g(f)$
Arco Seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Arcsen}(x) = -\text{Arc cos}(x)$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \text{Arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) = -\text{Arc cos}\left(\frac{x}{a}\right)$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \text{Arcsen}(f) = -\text{Arc cos}(f)$ $\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \text{Arcsen}\left(\frac{f}{a}\right) = -\text{Arc cos}\left(\frac{f}{a}\right)$
Arco Tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg}(x)$ $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \text{arctg}(f)$ $\int \frac{f'}{a^2+f^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg}\left(\frac{f}{a}\right)$
Neperiano - Arco tangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \text{neperiano} + \text{arco tangente}$ $M \neq 0, ax^2+bx+c$ irreducible	

4.-TECNICAS DE INTEGRACIÓN:

4.1.- El método de Sustitución (ó Cambio de Variable)

Se basa en la utilización de la regla de la cadena. Consiste en expresar la función a integrar en función de otra variable, normalmente t , de modo que la integral resultante sea inmediata, o por lo menos más sencilla.

Para hallar una primitiva de $\int f(x)dx$, haremos el siguiente cambio de variable: $x = g(t)$, después diferenciamos en ambas partes: $dx = g'(t) \cdot dt$ y sustituimos en la primitiva, de forma

que la primitiva quedará:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t) \cdot dt$$

Tras hallar el miembro de la derecha en función de t , se deshace el cambio de variable y así obtenemos la integral buscada; es decir traducimos el resultado en términos de x .

Ejemplo 1: Calcular $\int (x+3)^{11} dx$.

Hacemos: $(x+3) = u$, de aquí, $x = u - 3 \rightarrow dx = du$, sustituyendo:

$$\int (x+3)^{11} dx = \int u^{11} du = \frac{1}{12} u^{12} + K = \frac{1}{12} (x+3)^{12} + K$$

Este método se suele utilizar en funciones que tienen raíces (Radicalarias).

Ejemplo 2: Calcular $\int x\sqrt{1-x} dx$.

Hacemos: $(1-x) = u$, de aquí, $x = 1-u \rightarrow dx = -du$, sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x} dx &= \int (1-u) \cdot u^{\frac{1}{2}} (-du) = -\int u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}} du = -\int u^{\frac{1}{2}} du + \int u^{\frac{5}{2}} du = -\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} u^{\frac{7}{2}} + K \\ &= (1-x)\sqrt{1-x} \left(\frac{2}{5}(1-x) - \frac{2}{3} \right) + K \\ &= (1-x)\sqrt{1-x} \left(\frac{-6x-4}{15} \right) + K \end{aligned}$$

4.2.- Integración por simple inspección:

Dos sencillas fórmulas nos capacitan para hallar primitivas de forma casi inmediata. La primera es:

$$\int g'(x) \cdot [g(x)]^r dx = \frac{1}{r+1} [g(x)]^{r+1} + K \quad \text{con } r \neq -1$$

Ejemplo 3: Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

Utilizando la fórmula anterior:
$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + K$$

La segunda fórmula de integración rápida es:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + K$$

Ejemplo 4: Calcular $\int \frac{x^2}{x^3-5} dx$

Utilizando la fórmula anterior:

$$\int \frac{x^2}{x^3-5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3-5} dx = \frac{1}{3} \ln|x^3-5| + K$$

4.3.- Integración por Descomposición:

Consiste en descomponer una función $f(x)$ de la forma: $f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)$, de forma que descomponemos una integral en muchas que se resuelven más fácilmente.

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx$$

Ejemplo 5: Calcular $\int (\text{sen}x + \cos x)^2 dx$

Utilizando este método:

$$\int (\text{sen}x + \cos x)^2 dx = \int (\text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\text{sen}x \cos x) dx = \int (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) dx + \int 2\text{sen}x \cos x dx = \int 1 dx + \int \text{sen}2x \cdot dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + K$$

4.4.- Integración por Partes:

Este método se suele utilizar cuando tenemos producto de funciones, y lo que hacemos es separar la integral en dos partes, mediante la fórmula de integración por partes:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

La mecánica que se sigue para integrar con este método es la siguiente: Si tenemos que calcular $\int f(x) \cdot g(x) dx$, hacemos $u = f(x)$ y $dv = g(x) dx$; calculamos $du = f'(x)$ y $v = \int g(x) \cdot dx$, y después sustituimos cada una de ellas en la fórmula de integración por partes. $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Para recordar la fórmula de la integración por partes, existe una regla nemotécnica: "un día ví una vaca vestida de uniforme"

- A la hora de elegir u y dv , hemos de tener en cuenta dos cosas:
 - ✓ La parte escogida como dv ha de ser fácil de integrar.
 - ✓ $\int v \cdot du$ no debe ser más complicada de integrar que $\int u \cdot dv$

A = Funciones Arco (Arcsen, Arccos, Arctg...)
L = Funciones logarítmicas. (\log_a , \log , \ln)
P = Funciones polinómicas.
E = Funciones exponenciales (a^x , e^x)
S = Funciones trigonométricas (Sen, Cos, tg...)

Para facilitar las cosas a la hora de elegir u , utilizaremos la regla ALPES.

El orden de preferencia al elegir quien es la función u es de izquierda a derecha:

$$A > L > P > E > S$$

Ejemplo 6: Calcular $\int x^n \cdot \ln x dx$

Hacemos $u = \ln x$ $dv = x^n$
 $du = \frac{1}{x}$ $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Aplicamos la regla de integración por partes:

$$\int x^n \cdot \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + K$$

A veces será necesario repetir este método varias veces. ¿Cuándo?, Si tenemos:

- Producto de un polinomio por una exponencial. ($x^n e^x$)
- Producto de un polinomio por seno o coseno. ($x^n \cos x$, $x^n \text{sen} x$)
- Producto de un polinomio por \ln . ($x^n \cdot \ln x$)
- Producto de una exponencial por sen ó cos ($e^x \text{sen} x$, $e^x \cos x$)
- Las funciones circulares inversas.

4.5.- Integración de funciones Racionales.

Para el cálculo de integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios enteros en x con coeficientes reales, lo que haremos es descomponer el polinomio $Q(x)$ en suma de fracciones simples de la forma $(ax + b)$.

- Si grado $P(x) \geq$ grado $Q(x)$, antes de descomponer, efectuamos la división euclídea:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

- Si grado $P(x) <$ grado $Q(x)$, no es necesario hacer división euclídea y directamente pasamos a factorizar el polinomio $Q(x)$.

Factorizamos el polinomio $Q(x)$, y una vez descompuesto $Q(x)$ en sus raíces, se pueden presentar varios casos:

4.5.1.- Caso I: Factores lineales distintos.

A cada factor lineal $ax+b$ que aparezca una sola vez en el denominador de una función racional propia le corresponde una sola fracción de la forma: $\frac{A}{ax+b}$, donde A es una constante que habrá que determinar.

Ejemplo 7: Calcular $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

Factorizamos el denominador $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

Descomponemos:

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \rightarrow \text{Calculamos las constantes } A \text{ y } B:$$

$$1 = A(x-2) + B(x+2) \quad (1)$$

$$1 = (A+B)x + (2A-2B) \quad (2)$$

a) Por comparación: $A + B = 0$

y

$$2A - 2B = 1$$

De donde:

$$A = \frac{1}{4}$$

y

$$B = -\frac{1}{4}$$

b) O directamente sustituyendo $x=2$ y $x=-2$ en la ecuación (1).

$$1 = 4A$$

$$1 = -4B$$

\rightarrow

$$A = \frac{1}{4}$$

y

$$B = -\frac{1}{4}$$

Por cualquiera de los dos métodos, tenemos:

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1/4}{x-2} - \frac{1/4}{x+2}$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + K = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + K$$

4.5.2.- Caso II: Factores lineales Repetidos.

A cada factor $ax+b$ que aparezca n veces en el denominador de una función racional propia le corresponde una suma de n fracciones simples de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Donde A_i son constantes que habrá que determinar.

Ejemplo 8: Calcular $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$

Como el grado de arriba es mayor que el de abajo, primero dividimos:

$$\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

Descomponemos:

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \rightarrow \text{Calculamos las constantes A, B y C:}$$

$$x+1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

Sustituyendo $x=0$ obtenemos:

$$1 = -B \rightarrow B = -1$$

Sustituyendo $x=1$, obtenemos:

$$2 = C$$

Y sustituyendo $x=2$, (elegimos el 2 al azar), obtenemos:

$$3 = 2A + B + 4C \rightarrow A = -2.$$

De modo que nos queda:

$$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx = \int x \cdot dx + 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + K = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + K$$

4.5.3.- Caso III: Factores cuadráticos distintos:

A cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c que aparezca una sola vez en el denominador de una función racional le corresponde una sola fracción simple de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Donde A y B son constantes a determinar.

Ejemplo 9: Calcular $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$

Factorizamos $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$

Descomponemos:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \rightarrow \text{Calculamos las constantes A, B, C y D:}$$

$$x^3 + 3x^2 + 2 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$$

De donde $A+C=1$; $B+D=1$, $2A+C=1$ y $2B+D=2$, que resolviendo nos da: $A=0$, $B=1$, $C=1$ y $D=0$.

Entonces:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{xdx}{x^2+2} = \arctg x + \frac{1}{2} \ln|x^2+2| + K$$

4.5.4.- Factores cuadráticos repetidos.

A cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c que aparezca n veces en el denominador de una función racional propia le corresponde una suma de n fracciones simples de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Donde A_i y B_i son constantes a determinar:

Ejemplo 10: Calcular $\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx$

Descomponemos:

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2)^3} \rightarrow \text{Calculamos las constantes A,B,C,D,E y F:}$$

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax + B)(x^2 + 2)^2 + (Cx + D)(x^2 + 2) + Ex + F =$$

$$Ax^5 + Bx^4 + (4A + C)x^3 + (4B + D)x^2 + (4A + 2C + E)x - (4B + 2D + F)$$

De donde $A=1$; $B=-1$, $C=0$ y $D=0$, $E=4$ y $F=0$.

Entonces:

$$\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx = \int \frac{x-1}{x^2+2} dx + 4 \int \frac{xdx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + K$$

5.- Teorema fundamental del Cálculo:

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces su función integral

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ con $a \leq x \leq b$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) , y su derivada $F'(x)=f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{array} \right\} F'(x) = f(x)$$

5.1.- Derivada de integrales:

- $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

Ejemplo 11: Hallar la derivada de: $\int_a^x \sqrt{t^2 + 1} dt \rightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x \sqrt{t^2 + 1} dt = \sqrt{x^2 + 1}$

5.2.- Derivada de integrales cuando el límite superior es una función:

- $\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t)dt = f[g(x)] \cdot g'(x)$

Ejemplo 12: Hallar la derivada de: $\int_0^{t^2} \cos x^2 dx \rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^{t^2} \cos x^2 dx = 2t \cos t^4$

5.3.- Derivada de integrales cuando los dos límites son funciones:

- $$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = f[g(x)] \cdot g'(x) - h[g(x)] \cdot h'(x)$$

Ejemplo 13: Hallar la derivada de: $\int_{x^2}^{x^3} \ln t dt$

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \ln t dt = \ln x^3 \cdot 3x^2 - \ln x^2 \cdot 2x = 9x^2 \ln x - 4x \ln x = (9x^2 - 4x) \ln x$$

Podemos encontrarnos con ejercicios como este en el que al aplicar la regla de L'Hôpital, la integral desaparece.

Ejemplo 14: Hallar $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen} \sqrt{t} dt}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen} \sqrt{t} dt}{x^3} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x \cdot 2x}{3x^2} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

* Donde hemos utilizado la aproximación $\operatorname{sen} x \approx x$ cuando $x \rightarrow 0$

6.- Integral Definida

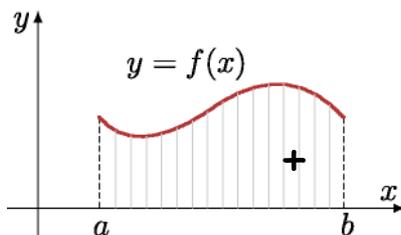
La integral definida de una función en el intervalo $[a, b]$ se simboliza por $\int_a^b f(x) dx$ donde b es el límite superior de integración y a el límite inferior de integración.

6.1.- Significado Geométrico de la integral:

Con la integral definida se pretende calcular el área de una región del plano limitada por una curva.

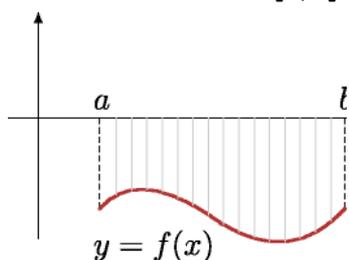
Sea el plano afín real euclídeo y $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ un sistema de referencia ortonormal de ejes OX y OY .

- Si la función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, es positiva e integrable, la integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa el área de la región limitada por la curva, el eje OX y las perpendiculares por los puntos a y b , y la integral es positiva.



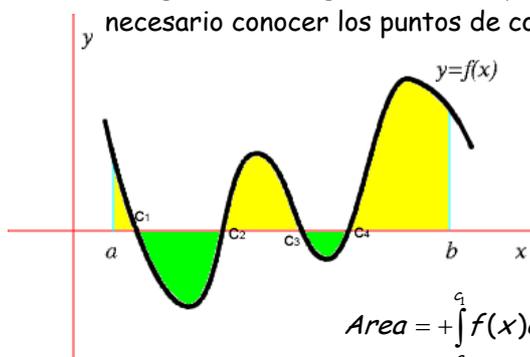
$$\int_a^b f(x) dx = \text{Área bajo la curva} > 0$$

- Si la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, es negativa e integrable, la integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa el área de la región limitada por la curva, el eje OX y las perpendiculares por los puntos a y b , pero con signo negativo.



$$-\int_a^b f(x)dx = \text{Área bajo la curva}$$

- Si la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, toma valores positivos y negativos sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, la integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa la suma de las áreas de las regiones comprendidas entre la función, el eje de las x , y las perpendiculares por a y b , pero asignándole a cada una de ellas el signo $+$ o $-$ según que esté por encima o por debajo del eje x . Para ello es necesario conocer los puntos de corte de la curva con el eje OX .



$$\text{Area} = +\int_a^{c_1} f(x)dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx - \int_{c_3}^{c_4} f(x)dx + \int_{c_4}^b f(x)dx$$

Ejemplo 15: Calcular el área encerrada por el eje OX , las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ y la curva $y = \cos x$.

Vamos a ver si la función $y = \cos x$, cambia de signo en el intervalo $[0, \pi]$, para ello la igualamos a cero y calculamos sus raíces:

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi$, dentro del intervalo a estudiar solo está $\frac{\pi}{2}$. Sabemos que el coseno es positivo en el primer cuadrante $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, y negativo en el segundo $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, por tanto:

$$\text{Area} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = [\text{sen}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\text{sen}x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$$

6.2.- Propiedades de la Integral Definida:

- Si los límites de integración son iguales, la integral es nula: $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Si c es un punto interior al intervalo $[a, b]$, se verifica: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Esta propiedad es generalizable al tomar más puntos interiores en el intervalo $[a, b]$.

- Al intercambiar los límites de integración, la integral definida cambia de signo:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- La integral definida de la suma es la suma de las integrales definidas:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

- Si k es un número real, se verifica: $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

- Si $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, entonces se verifica: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

6.3.- Regla de Barrow:

Sea $f(x)$ una función y $g(x)$ una primitiva suya, [$g'(x)=f(x)$], se cumple que:

$$\int_b^a f(x) dx = g(a) - g(b) = [g(x)]_b^a$$

Observaciones:

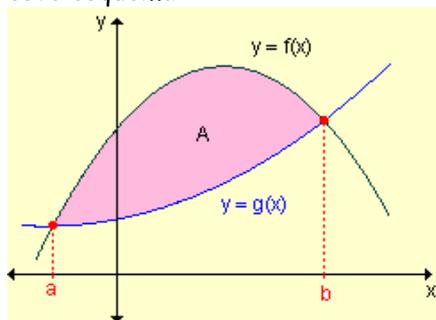
- La importancia de esta regla es fundamental, ya que pone en relación las integrales con las derivadas. Sin embargo hay que advertir que solamente es aplicable a funciones continuas definidas en intervalos cerrados.
- Para hallar la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado seguiremos el siguiente proceso:
 - Se halla una primitiva cualquiera de la función, sin tener en cuenta la constante (la más sencilla).
 - Se sustituyen en esta primitiva los límites de integración (el superior y el inferior) y se restan los resultados.

Ejemplo 16: Calcular el valor del área que está debajo de la función $f(x)=\text{sen}x$.

$$\text{Area} = \int_0^{\pi} \text{Sen}x dx = [-\text{Cos}x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

6.4.- Área limitada por dos gráficas:

Para hallar el área limitada por las gráficas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ seguiremos este esquema:



- Definimos una nueva función $h(x) = f(x) - g(x)$
- Igualamos a cero para hallar los puntos de corte entre ambas: $h(x)=0 \leftrightarrow f(x)=g(x)$
- Una vez que obtengamos los puntos de corte, a y b, integramos la función $h(x)$ entre esos límites de integración.

$$\text{Area} = \int_b^a h(x) dx$$

Ejemplo 17: Calcular el área comprendida entre $f(x)=x^4+5x^3-7x^2+2x-1$ y $g(x)=x^4-4x^3-8x^2+4x-1$

Escribimos la función $h(x)$ como la diferencia entre $f(x)$ y $g(x)$. $h(x) = x^3 + x^2 - 2x$

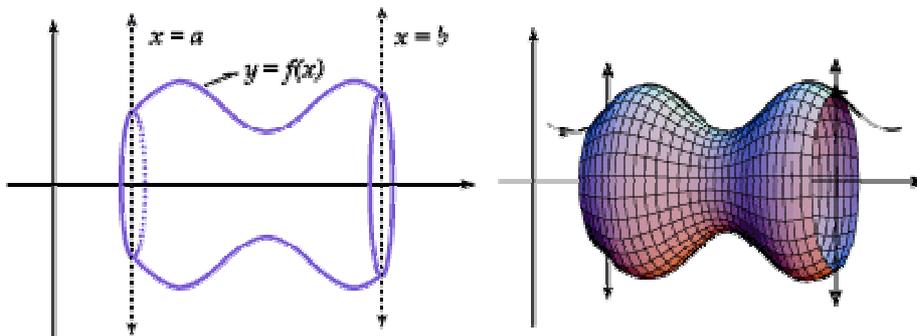
Calculamos sus raíces igualando a cero: $h(x) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 = \left[0 - \frac{-8}{3} \right] + \left[\frac{-5}{12} - 0 \right] = \\ &= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

6.5.- Volumen de un sólido de revolución:

Sea f una función continua definida en el intervalo $[a,b]$.

Recibe el nombre de *sólido de revolución*, al sólido generado al girar alrededor del eje x , la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x , y las gráficas de $x = a$ y $x = b$. El eje x es un eje de simetría de dicho sólido y una sección recta perpendicular al eje x es un círculo de radio $|f(x)|$.



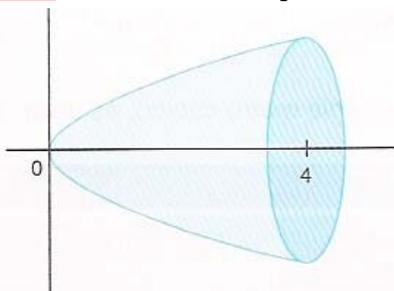
El área de la sección circular será: $A(x) = \pi \cdot [f(x)]^2$, y un elemento de volumen de revolución será un pequeño cilindro de radio $|f(x)|$ y altura dx .

Por tanto, el volumen del cuerpo de revolución vendrá dado por la expresión:

$$\text{Vol} = \int_b^a \pi \cdot f(x)^2 dx$$

Este procedimiento recibe el nombre de *integración por discos*.

Ejemplo 18: Calcular el volumen engendrado al girar la parábola $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje X , entre 0 y 4.

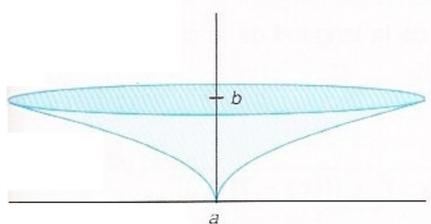


$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x \cdot dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

Si al trozo de curva $y = f(x)$ se le hace girar alrededor del eje Y, el volumen del cuerpo de revolución vendrá dado por esta otra expresión:
$$Vol = \int_b^a \pi \cdot \phi(y)^2 dy$$

Se hace exactamente igual que al girar en torno al eje X, con la salvedad de que hay que escribir x en función de y, e integrar en y.

Ejemplo 19: Calcular el volumen engendrado por la curva $y = \sqrt{x}$ al girar alrededor del eje Y, entre $y=0$ e $y=2$.



$$Volumen = \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \left[\pi \frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{5} \pi$$

7.- Ejercicios:

1.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$ b) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ c) $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$ d) $\int \text{sen}^2 x \cdot \cos 3x dx$ e) $\int \text{tg} x dx$
 f) $\int \frac{1}{x^2+9} dx$ g) $\int \text{sen}^3 x dx$ h) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ i) $\int \frac{x}{x^4+9} dx$ j) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

2.- Hallar la función F(x) tal que F(0)=2 y que sea primitiva de la función $f(x) = \frac{e}{e^x + 1}$

3.- Determinar f(x) sabiendo que $f'''(x)=24x$; $f''(0)=2$, $f'(0)=1$ y $f(0)=0$.

4.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx$ b) $\int \frac{x^2 + 10x + 5}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx$ c) $\int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

5.- Calcular las siguientes integrales: a) $\int x \cdot \text{arctg} x dx$ b) $\int e^{-x} \cos x dx$

c) $\int x^2 \cos x dx$ d) $\int x e^{4x} dx$ e) $\int x^3 e^{-x^2} dx$ f) $\int \text{sen}(\ln x) dx$

6.- Calcular: a) $\int_1^3 |x| dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} x \cdot \cos 2x dx$ c) $\int_0^{\pi} (1+x^2) \cos x dx$

d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ e) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ f) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

7.- Siendo $I = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$, demostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 2$

8.- Calcular el área encerrada por la curva $f(x) = x^2 - 4x$ y la recta $g(x) = 2x - 5$

9.- Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \frac{x}{3}$ y $g(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}$

10.- Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones de ecuaciones:

$$f(x) = 6x - x^2 \text{ y } g(x) = x^2 - 2x.$$

11.- Calcular el área encerrada por la gráfica de $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$, el eje de abscisas y las rectas: $x = 2\sqrt{3}$ y $x = 2$

12.- Calcular el área del recinto limitado por la curva de la ecuación $f(x) = x^2 + x$ y la recta perpendicular a su tangente en el punto (0,0).

13.- Se considera la función $f(x) = xe^{ax}$, donde a es una constante no nula. Calcula el valor de a , sabiendo que el área limitada por la curva $f(x) = xe^{ax}$ y las rectas $x=0$ y $x=1$ es igual a $\frac{1}{a^2}$.

14.- Calcula la primitiva de la función $f(x) = [\ln x]^2$ que se anule en $x = e$

15.- Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int (2x^2 - 4x + 5) dx$

h) $\int \left(3x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

ñ) $\int \left(2\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx$

b) $\int \left[\frac{x^4 - 3x\sqrt{x} + 2}{x}\right] dx$

i) $\int \frac{(1+x)^2}{x} dx$

o) $\int (2x^2 + 3)^2 \cdot 5x \cdot dx$

c) $\int \frac{3x}{x^2 + 5} dx$

j) $\int \frac{4x + 8}{x^2 + 4x} dx$

p) $\int 4x^2 \sqrt{1-x^3} dx$

d) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx$

k) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$

q) $\int \frac{1 - \cos 2x}{2x - \operatorname{sen} 2x} dx$

e) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

l) $\int 3x \cdot 3^{x^2} dx$

r) $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$

f) $\int \frac{dx}{4 + 7x^2} dx$

m) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$

s) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

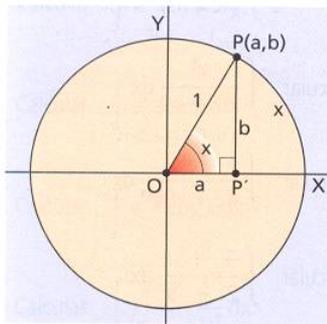
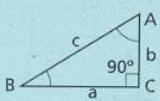
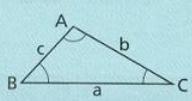
g) $\int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} dx$

n) $\int \operatorname{sen}^3 2x \cdot \cos 2x \cdot dx$

t) $\int \frac{1 - \ln x}{x \cdot \ln x} dx$

8.- Apéndice:

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

	$\operatorname{sen} x = b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{b} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$																				
	$\operatorname{cos} x = a = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\operatorname{sec} x = \frac{1}{a} = \frac{1}{\operatorname{cos} x}$																				
	$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\operatorname{ctg} x = \frac{a}{b} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$																				
	$\operatorname{cos}^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ (T. de Pitágoras)	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sec}^2 x$ $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$																				
Ángulo	Seno	Coseno	Tangente																			
Suma	$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y + \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{cos}(x + y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$																			
Diferencia	$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y - \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{cos}(x - y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$																			
Doble	$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x$	$\operatorname{cos} 2x = \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{cos}^2 x - 1$	$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$																			
Mitad	$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \operatorname{cos} 2x}{2}$	$\operatorname{cos}^2 x = \frac{1 + \operatorname{cos} 2x}{2}$	$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \operatorname{cos} 2x}{1 + \operatorname{cos} 2x}$																			
Producto	$\operatorname{sen} x \operatorname{cos} y = \frac{\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)}{2}$	$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{\operatorname{cos}(x - y) - \operatorname{cos}(x + y)}{2}$	$\operatorname{cos} x \operatorname{cos} y = \frac{\operatorname{cos}(x - y) + \operatorname{cos}(x + y)}{2}$																			
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS		TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS																				
				Equivalencia de radianes y grados																		
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>Rad</th> <th>Grad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2π</td> <td>$\Leftrightarrow 360^\circ$</td> </tr> <tr> <td>$\pi$</td> <td>$\Leftrightarrow 180^\circ$</td> </tr> <tr> <td>$\pi/2$</td> <td>$\Leftrightarrow 90^\circ$</td> </tr> <tr> <td>$\pi/4$</td> <td>$\Leftrightarrow 45^\circ$</td> </tr> <tr> <td>$2\pi/3$</td> <td>$\Leftrightarrow 120^\circ$</td> </tr> <tr> <td>$\pi/3$</td> <td>$\Leftrightarrow 60^\circ$</td> </tr> <tr> <td>$\pi/6$</td> <td>$\Leftrightarrow 30^\circ$</td> </tr> <tr> <td>$3\pi/2$</td> <td>$\Leftrightarrow 270^\circ$</td> </tr> </tbody> </table>	Rad	Grad	2π	$\Leftrightarrow 360^\circ$	π	$\Leftrightarrow 180^\circ$	$\pi/2$	$\Leftrightarrow 90^\circ$	$\pi/4$	$\Leftrightarrow 45^\circ$	$2\pi/3$	$\Leftrightarrow 120^\circ$	$\pi/3$	$\Leftrightarrow 60^\circ$	$\pi/6$	$\Leftrightarrow 30^\circ$	$3\pi/2$	$\Leftrightarrow 270^\circ$
Rad	Grad																					
2π	$\Leftrightarrow 360^\circ$																					
π	$\Leftrightarrow 180^\circ$																					
$\pi/2$	$\Leftrightarrow 90^\circ$																					
$\pi/4$	$\Leftrightarrow 45^\circ$																					
$2\pi/3$	$\Leftrightarrow 120^\circ$																					
$\pi/3$	$\Leftrightarrow 60^\circ$																					
$\pi/6$	$\Leftrightarrow 30^\circ$																					
$3\pi/2$	$\Leftrightarrow 270^\circ$																					
1. $C = 90^\circ \quad A + B = 90^\circ$ 2. $\operatorname{sen} A = \operatorname{cos} B = \frac{a}{c}$, $\operatorname{sen} B = \operatorname{cos} A = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ 3. $c^2 = a^2 + b^2$ (T. de Pitágoras)		1. $A + B + C = 180^\circ$ 2. $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$ (T. del seno) 3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{cos} C$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{cos} A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \operatorname{cos} B$ (T. del coseno)																				

8.- Soluciones

1.- Calcular las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x-1} + C$$

$$b) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln^2 x dx = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$$

$$c) \int \frac{\ln x^2}{x} dx = 2 \int \frac{\ln x}{x} dx = 2 \int \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{\ln^2 x}{4} + C$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos 3x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \cos 3x dx = \int \left(\frac{\cos 3x}{3} - \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \cos 3x \right) dx =$$

$$d) = \int \frac{\cos 3x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(-x) + \cos(5x)}{2} \right) dx = \int \frac{\cos 3x}{2} dx - \int \frac{\cos(-x)}{4} dx + \int \frac{\cos 5x}{4} dx =$$

$$= \frac{\sin(3x)}{6} + \frac{\sin(5x)}{20} + \frac{\sin(-x)}{4} = \frac{\sin(3x)}{6} + \frac{\sin(5x)}{20} - \frac{\sin(x)}{4} + C$$

$$e) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$f) \int \frac{1}{x^2+9} dx = \int \frac{1}{x^2+3^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3} \right) + C$$

$$g) \int \sin^3 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int \sin x dx - \int \sin x \cdot \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$h) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen}(x^2) + C$$

$$i) \int \frac{x}{x^4+9} dx = \int \frac{x}{(x^2)^2+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2)^2+9} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{3} \right) + C$$

$$j) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{dx}{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$$

2. - Hallar la función $F(x)$ tal que $F(0)=2$ y que sea primitiva de la función $f(x) = \frac{e}{e^x + 1}$

Calculamos la integral de $\int \frac{e}{e^x + 1} dx = e \int \frac{1}{e^x + 1} dx =$

Hacemos un cambio de variable $\left[\begin{array}{l} e^x dx = dt \\ e^x = t \end{array} \right]$, por tanto la integral queda:

$$\int \frac{1}{t^2 + t} dt = \int \frac{A}{t} dt + \int \frac{B}{t+1} dt = \left[\begin{array}{l} 1 = A(t+1) + Bt \\ \text{si } t = 0 \rightarrow 1 = A \\ \text{si } t = -1 \rightarrow 1 = -B \end{array} \right] = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t| - \ln|t+1| = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right|$$

Deshacemos el cambio:

$\ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right|$, y multiplicamos por e , de forma que:

$$\int \frac{e}{e^x + 1} dx = e \int \frac{1}{e^x + 1} dx = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| + C$$

Como $F(0)=2$:

$$e \ln \frac{1}{2} + C = 2 \Rightarrow C = 2 - e \ln \frac{1}{2}$$

De forma que:

$$\int \frac{e}{e^x + 1} dx = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| + 2 - e \ln \frac{1}{2}$$

3. - Determinar $f(x)$ sabiendo que $f'''(x)=24x$; $f''(0)=2$, $f'(0)=1$ y $f(0)=0$.

$$f''(x) = \int 24x dx = 12x^2 + C \quad \text{Como } f''(0)=2, \text{ entonces } C=2 \rightarrow f''(x) = 12x^2 + 2$$

$$f'(x) = \int (12x^2 + 2) dx = 4x^3 + 2x + C', \quad \text{Como } f'(0)=1, \text{ entonces } C'=1 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$$

Y por último:

$$f(x) = \int (4x^3 + 2x + 1) dx = x^4 + x^2 + x + C'', \quad \text{Como } f(0)=0, \rightarrow C''=0 \text{ y } \boxed{f(x) = x^4 + x^2 + x}$$

4. - Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx$

Como grado del polinomio de arriba es menor que el de abajo no es necesario dividir.

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2 + 1} \rightarrow x^2 - x + 1 = A(x^2 + 1) + B(x)$$

Si $x=0 \rightarrow 1=A$

Si $x=1 \rightarrow 1=2A+B \rightarrow B=-1$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \ln|x| - \arctg(x) + C$$

b) $\int \frac{x^2 + 10x + 5}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx$

Como grado del polinomio de arriba es menor que el de abajo no es necesario hacer la división euclídea.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \\ -3 & & -3 & -3 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Sacamos las raíces de $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$; Hacemos Ruffini:

Por tanto: $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x-1)$

Descomponemos:

$$\frac{x^2 + 10x + 5}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 5 = A(x+1) \cdot (x+3) + B(x-1) \cdot (x+3) + C(x-1) \cdot (x+1)$$

Si $x=1 \rightarrow 16=8A \rightarrow A=2$

Si $x=-1 \rightarrow -4=-4B \rightarrow B=1$

Si $x=-3 \rightarrow -16=8C \rightarrow C=-2$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2 + 10x + 5}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-2}{x+3} dx = 2\ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln|x+3| + C$$

$$c) \int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

En este caso, tenemos que el grado del numerador (arriba) es mayor que el grado del denominador (abajo), por tanto es necesario hacer la división euclídea.

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = (x-2) - \frac{7x+2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int (x-2) dx - \int \frac{7x+2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

Vamos a calcular primero:

$$\int \frac{7x+2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

Descomponemos el denominador en raíces:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{7x+2}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow 7x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

Sustituyendo los valores de las raíces obtenemos:

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow 2 = -2A \Rightarrow A=-1$$

$$\text{Si } x=2 \Rightarrow 16 = 6B \Rightarrow B=8/3$$

$$\text{Si } x=-1 \Rightarrow -5 = 3C \Rightarrow C=-5/3$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x+2}{x^3 - x^2 - 2x} dx &= \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{x-2} dx + \int \frac{C}{x+1} dx = -\int \frac{dx}{x} + \frac{8}{3} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{5}{3} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -\ln|x| + \frac{8}{3} \ln|x-2| - \frac{5}{3} \ln|x+1| \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int (x-2) dx - \int \frac{7x+2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| - \frac{8}{3} \ln|x-2| + \frac{5}{3} \ln|x+1| + C$$

5. - Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x \cdot \arctg x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arctg x \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2 \operatorname{Arctg}(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2 \operatorname{Arctg}(x)}{2} - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2 \operatorname{Arctg}(x)}{2} - \frac{1}{2} x + \operatorname{Arctg}(x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int e^{-x} \cos x dx &= \left[\begin{array}{l} u = e^{-x} \quad du = -e^{-x} dx \\ dv = \cos x \quad v = \operatorname{sen} x \end{array} \right] = e^{-x} \operatorname{sen} x + \int e^{-x} \operatorname{sen} x dx = e^{-x} \operatorname{sen} x + \\ &+ \left[\begin{array}{l} u = e^{-x} \quad du = -e^{-x} dx \\ dv = \operatorname{sen} x \quad v = -\cos x \end{array} \right] - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx \end{aligned}$$

Tenemos una integral que en la que volvemos a la original (cíclica). Por tanto:

$$I = e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x - I \Rightarrow I = \frac{e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x}{2} + C$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = \cos x \quad v = \operatorname{sen} x \end{array} \right] = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x dx = x^2 \operatorname{sen} x - \\ \text{c) } - \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x \quad v = -\cos x \end{array} \right] + x \cos x + \int \cos x dx &= \\ = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x &= 2x \cos x + (x^2 - 2) \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int x e^{4x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^{4x} \quad v = \frac{1}{4} e^{4x} \end{array} \right] = \frac{x e^{4x}}{4} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx = \frac{x e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + C$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int x^3 e^{-x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = x e^{-x^2} \quad v = \frac{-1}{2} e^{-x^2} \end{array} \right] = -\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} + \int x e^{-x^2} dx = -\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} = -\frac{e^{-x^2}}{2} (x^2 + 1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(\ln x) dx &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}(\ln x) \quad du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right] = x \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \operatorname{sen}(\ln x) - \\ \text{f) } - \left[\begin{array}{l} u = \cos(\ln x) \quad du = -\operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right] &= -x \cos(\ln x) - \int \operatorname{sen}(\ln x) dx \end{aligned}$$

Volvemos a tener una integral cíclica:

$$I = x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x) - I \Rightarrow I = \frac{x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C$$

6. - Calcular:

$$\text{a) } \int_1^3 |x| dx = \int_1^3 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{1}{2} (9 - 1) = 4$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot (2 \cos^2 x - 1) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2 \left[-\sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}$$

c) $\int_0^{\pi} (1+x^2) \cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x dx + \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = -2\pi$

d)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x^3 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & v = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right] = -x^2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \int 2x (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= -x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3} (x^2 + 2) + C$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Arcsen} x - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

e) $\text{Arcsen} x - \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \text{Arcsen} x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx$

Esta es cíclica, por tanto:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{\text{Arcsen} x}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[x\sqrt{1-x^2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

f) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} =$; Calcularemos primero la primitiva:

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \left[\begin{array}{ll} e^x = t & e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{t} & \end{array} \right] = \int \frac{dt}{(t+1)t} = \int \frac{A}{t+1} dt + \int \frac{B}{t} dt \Rightarrow 1 = At + B(t+1)$$

Si $t=0 \rightarrow 1=B$

Si $t=-1 \rightarrow 1=-A$

$$\int \frac{dt}{(t+1)t} = -\int \frac{1}{t+1} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\ln|t+1| + \ln|t|$$

Si deshacemos el cambio:

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \left[-\ln(e^x + 1) + \ln(e^x) \right]_0^1 = 1 - \ln(e+1) - \ln(2)$$

7.- Siendo $I = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$, demostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 2$

Vamos a calcular la Integral:

$$\int t^2 e^{-t} dt = \left[\begin{array}{ll} u = t^2 & du = 2t dt \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array} \right] = -e^{-t} t^2 + 2 \int t e^{-t} dt = -e^{-t} t^2 + \left[\begin{array}{ll} u = 2t & du = 2 dt \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array} \right] =$$

$$= -e^{-t} t^2 - 2t e^{-t} + 2 \int e^{-t} dt = -e^{-t} t^2 - 2t e^{-t} - 2e^{-t} = -e^{-t} (t^2 + 2t + 2)$$

Por tanto:

$$I = \int_0^x t^2 e^{-t} dt = \left[-e^{-t} (t^2 + 2t + 2) \right]_0^x = \left[-\frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} + \frac{2}{1} \right]$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} + \frac{2}{1} \right] = 2$ como queríamos demostrar.

8.- Calcular el área encerrada por la curva $f(x) = x^2 - 4x$ y la recta $g(x) = 2x - 5$

Definimos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 6x + 5$

Iguamos a cero, para calcular sus puntos de corte.

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0$$

Por tanto sus raíces son 1 y 5.

Integramos h entre 1 y 5

$$\int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx = \frac{-32}{3}$$

Como un área no puede ser negativa, $A = \left| \int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx \right| = \left| \frac{-32}{3} \right| = \frac{32}{3}$

9.- Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \frac{x}{3}$ y

$$g(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

Al igual que en el ejercicio anterior, definimos la función h(x):

$$h(x) = f(x) - g(x) = 1 + \frac{x}{3} - \sqrt{x+1}$$

Iguamos a cero para encontrar sus puntos de corte:

$$h(x) = f(x) - g(x) = 1 + \frac{x}{3} - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 3; x = 0$$

Por tanto ya tenemos los límites de integración.

$$\int_0^3 \left(1 + \frac{x}{3} - \sqrt{x+1} \right) dx = -\frac{1}{6}$$

Como las áreas no son nunca negativas: $\text{Área} = \left| \int_0^3 \left(1 + \frac{x}{3} - \sqrt{x+1} \right) dx \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}$

10.- Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones de ecuaciones

$$f(x) = 6x - x^2 \text{ y } g(x) = x^2 - 2x.$$

Como siempre, definimos la función h(x) como la diferencia entre f y g:

$$h(x) = f(x) - g(x) = 8x - 2x^2$$

Iguamos a cero para obtener los extremos de los intervalos de integración:

$$h(x) = 8x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 4$$

Por tanto: $\text{Área} = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \frac{64}{3}$

11.- Calcular el área encerrada por la gráfica de $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2\sqrt{3}$ y $x = 2$

La función $f(x)$ es siempre positiva, por tanto la integral es positiva:

Tenemos que calcular:
$$\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4+x^2} = \left[\frac{1}{2} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{2}\right) \right]_2^{2\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2} \operatorname{Arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \operatorname{Arctg}(1) \right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24}$$

12.- Calcular el área del recinto limitado por la curva de la ecuación $f(x) = x^2 + x$ y la recta perpendicular a su tangente en el punto $(0,0)$.

Lo primero es calcular la recta tangente en el punto $(0,0)$

La ecuación de la recta tangente es: $y = mx + b$, donde m es la pendiente $f'(a)$ y b es la ordenada en el origen $b = f(a)$.

En este caso: $f'(x) = 2x + 1$; $f'(0) = 1$; $f(0) = 0$; por tanto la recta tangente en el $(0,0)$ es $y = x$

La recta perpendicular a esta es: $y = -x$.

Así que tenemos que calcular el área entre la gráfica $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = -x$

Definimos la función $h(x)$:

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + x - (-x) = x^2 + 2x$$

Igualamos a cero para encontrar las soluciones:

$$h(x) = x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$$

Integramos la función h entre esos dos valores:

$$\int_{-2}^0 (x^2 + 2x) dx = -\frac{4}{3}$$

Como el área no puede ser negativa:

$$\text{Area} = \left| \int_{-2}^0 (x^2 + 2x) dx \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

13.- Se considera la función $f(x) = xe^{ax}$, donde a es una constante no nula. Calcula el valor de a , sabiendo que el área limitada por la curva $f(x) = xe^{ax}$ y las rectas $x=0$ y $x=1$ es igual a $\frac{1}{a^2}$.

Tenemos que $\int_0^1 xe^{ax} dx = \frac{1}{a^2}$; Vamos a resolver la integral:

$$\int_0^1 xe^{ax} dx = \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^{ax} \quad v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array} \right] = \frac{x}{a} e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx = \left[\frac{x}{a} e^{ax} - \frac{e^{ax}}{a^2} \right]_0^1 = \frac{e^a}{a} - \frac{e^a}{a^2} + \frac{1}{a^2}$$

Y según el enunciado:

$$\frac{e^a}{a} - \frac{e^a}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0; a = 1$$

Por tanto $a=1$, porque no puede ser igual a cero.

14. - Calcula la primitiva de la función $f(x) = [\ln x]^2$ que se anule en $x = e$

Calculamos la integral indefinida de $f(x)$

$$\int [\ln x]^2 dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} \\ dv = \ln x \quad v = x(\ln x - 1) \end{array} \right] = x \ln x (\ln x - 1) - \int (\ln x - 1) dx = x \ln x (\ln x - 1) - x(\ln x - 1) + x = x [\ln x]^2 - 2x \ln x + 2x + K$$

Como tiene que ocurrir que $f(e) = 0$, entonces: $e - 2e + 2e + k = 0 \Leftrightarrow k = -e$

Por tanto la primitiva pedida es es: $x [\ln x]^2 - 2x \ln x + 2x - e$

15. - Calcula las siguientes integrales inmediatas:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\int (2x^2 - 4x + 5) dx$
$\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + C$ | h) $\int \left(3x + \frac{1}{x^2}\right) dx$
$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C$ | ñ) $\int \left(2\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx$
$\frac{8}{7}x^{7/4}\sqrt{x^3} - 5\ln x + C$ |
| b) $\int \left[\frac{x^4 - 3x\sqrt{x} + 2}{x}\right] dx$
$\frac{x^4}{4} - 2x\sqrt{x} + 2\ln x + C$ | i) $\int \frac{(1+x)^2}{x} dx$
$\frac{x^4}{4} + x^2 + \ln x + C$ | o) $\int (2x^2 + 3)^2 \cdot 5x \cdot dx$ |
| c) $\int \frac{3x}{x^2 + 5} dx$
$\frac{3}{2} \ln(x^2 + 5) + C$ | j) $\int \frac{4x + 8}{x^2 + 4x} dx$
$2\ln x^2 + 4x + C$ | p) $\int 4x^2 \sqrt{1 - x^3} dx$ |
| d) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx$
$\frac{2}{3} \sqrt{3x^2 + 1} + C$ | k) $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$
$\frac{2(1 + \sqrt{x})^3}{3} + C$ | q) $\int \frac{1 - \cos 2x}{2x - \sin 2x} dx$ |
| e) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$
$2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$ | l) $\int 3x \cdot 3^{x^2} dx$
$\frac{3^{x^2+1}}{2\ln 3} + C$ | r) $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$ |
| f) $\int \frac{dx}{4 + 7x^2} dx$
$\frac{\sqrt{7}}{14} \text{Arctg}\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + C$ | m) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^8}} dx$
$\frac{1}{4} \text{Arcsen} x^4 + C$ | s) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ |
| g) $\int \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} dx$
$3 \cdot \text{Arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$ | n) $\int \text{sen}^3 2x \cdot \cos 2x \cdot dx$
$\frac{\text{sen}^4 2x}{8} + C$ | t) $\int \frac{1 - \ln x}{x \cdot \ln x} dx$ |