BLOQUE I
ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Página 128

1 **Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$ Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 2.ª y 3.ª:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x = 5 \ \rightarrow \ x = 5/3 \\ y = 2 - x \longrightarrow y = 1/3 \end{array}$$

Comprobamos si $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ verifica la 1.ª ecuación:

$$\frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \neq 5$$

El sistema no tiene solución. Representa tres rectas que se cortan dos a dos.

b) $\left.\begin{array}{r} y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ Ordenamos las incógnitas y las ecuaciones: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$

Para resolverlo, aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(3.ª) + 2 · (1.ª)}]{\text{FILAS: (1.ª), (2.ª) – (1.ª)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(3.ª) + (2.ª)}]{\text{FILAS: (1.ª), (2.ª)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = -z \\ y = z \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x = -\lambda + 2\lambda = \lambda \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, \lambda)$.

2 **Comprueba que el siguiente sistema es compatible determinado. Halla su solución e interprétalo geométricamente:**

$$\left\{\begin{array}{l} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{array}\right.$$

Si el sistema es *compatible determinado*, debe verificarse que $ran\ (M) = ran\ (M') = 3$, según el teorema de Rouché. Como M' es una matriz cuadrada de orden 4, su determinante debe ser igual a 0.

$$|M'| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(1.^a)\\(4.^a)+(1.^a)}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ porque la 2.ª y 4.ª filas son iguales.

Podemos eliminar la última ecuación y resolverlo por la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \end{array}\right\} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{3}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4}{5}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{2}{5}$$

Solución: $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$. Representa cuatro planos que se cortan en un punto.

3 **Discute este sistema según los valores del parámetro a y resuélvelo cuando tenga solución.**

$$\left\{\begin{array}{r} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\}$$ Según el teorema de Rouché, el sistema será compatible si $ran\ (M) = ran\ (M')$.

Estudiamos el rango de M buscando los valores que hacen $|M| = 0$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a - 1 = 0 \ \rightarrow \ a = -1$$

Si $a = -1$, $ran\ (M) = 2$ porque $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Estudiamos el rango de M' para $a = -1$:

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran\,(M') = 2$$

Así:

- **Si $a = -1$**: $ran\,(M) = ran\,(M') = 2$, el sistema es *compatible indeterminado*.
- **Si $a \neq -1$**: $ran\,(M) = ran\,(M') = 3$, el sistema es *compatible determinado*.

— *Resolución* si $a = -1$:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = -1 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \lambda \rightarrow x = 1 + \lambda \\ z = 2 - 2y \rightarrow z = 2 - 2\lambda \end{array}$$

Soluciones: $(1 + \lambda, \lambda, 2 - 2\lambda)$.

— *Resolución* si $a \neq -1$. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 2$$

Solución: $(1, 0, 2)$

4 **Considera este sistema:**

$$\left\{\begin{array}{r} -x + y + z = 1 \\ 4y + az = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + ay + 2z = 1 \end{array}\right.$$

a) ¿Es posible encontrar valores de a tales que el sistema sea incompatible?

b) ¿Es posible encontrar valores de a tales que el sistema sea compatible indeterminado?

Justifica tus respuestas.

a) El sistema será incompatible si $ran\,(M) \neq ran\,(M')$. Estudiemos el rango de M':

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & a & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) + (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & a & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a+1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ a+1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2a^2 + 6a = -2a(a - 3) = 0 \rightarrow a = 0,\ a = 3$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 3$, $ran\,(M') = 4$ y $ran\,(M) < 4$ para cualquier valor de a. Por tanto, el sistema es *incompatible*.

b) Estudiemos el rango de M y M' en los casos $a = 0$ y $a = 3$:

- $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(M) = ran\,(M') = 3$$

El sistema es *compatible determinado*.

- $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(M) = ran\,(M') = 3$$

El sistema es *compatible determinado*.

No existe ningún valor de a tal que el sistema sea *compatible indeterminado*.

5 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halla los valores de m y n para que se verifique $A^2 + mA + nI = 0$.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m & 5m \\ 2m & -m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 + 2m + n & 5 + 5m \\ 2 + 2m & 11 - m + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 14 + 2m + n = 0 \\ 5 + 5m = 0 \;\rightarrow\; m = -1 \\ 2 + 2m = 0 \\ 11 - m + n = 0 \;\rightarrow\; n = -12 \end{cases}$$

Así, $m = -1$ y $n = -12$.

6 **a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación y halla su valor:**

$2A - AX = BX$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^{12} + A^{-1}$.

a) $2A - AX = BX \;\rightarrow\; 2A = BX + AX \;\rightarrow\; 2A = (B + A)X \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (B + A)^{-1} \cdot 2A = (B + A)^{-1}\,(B + A)X \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (B + A)^{-1}\,2A = I \cdot X \;\rightarrow\; X = (B + A)^{-1}\,2A$

$$B + A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallamos $(B + A)^{-1}$:

$$|B + A| = 12; \;\; Adj\,(B + A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to [Adj\,(B + A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \to (B + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (B + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \\ 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{12} = A^4 \cdot A^4 \cdot A^4 = I^3 = I$$

Hallamos A^{-1}:

$$|A| = 1 \to Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to [Adj\,(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{12} + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7 **Sea M una matriz de orden tres cuyas filas son F_1, F_2, F_3 y de la que sabemos que $det\,(M) = -2$. ¿Cuál será el valor del determinante de la matriz cuyas filas son $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$? Justifica tu respuesta.**

$M = (F_1 \;\; F_2 \;\; F_3)$, $|M| = -2$

$$\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ 2F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 + F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4$$

(1) Cambiamos el signo del determinante al permutar F_1 y F_2.

(2) Sacamos como factor común el 2 en F_1 y –1 en F_2.

(3) El valor del determinante no cambia al restar F_1 a F_2, ni al sumar F_2 a F_3.

8 **Prueba, sin desarrollar el determinante, esta igualdad:**

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ba \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2(a^2 - b^2)^2$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ba \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} a \begin{vmatrix} a & ab & ba \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - b(1.^a) \\ (3.^a) - b(1.^a) \end{array} a^2 \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} a^2\,(a^2 - b^2)^2$$

(1) Sacamos a como factor común de la 1.ª columna.

(2) Sacamos a como factor común de la 1.ª fila.

(3) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

9 **Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres tipos de envases, *A*, *B* y *C*, cuyos precios y pesos son los de esta tabla:**

	PESO (g)	PRECIO (€)
A	250	1,00
B	500	1,80
C	1 000	3,30

A una farmacia se le ha suministrado un pedido de 5 envases con un peso total de 2,5 kg por un importe de 8,90 €. ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia?

Llamemos: $\left\{\begin{array}{l} x = \text{n.° de envases de } A \\ y = \text{n.° de envases de } B \\ z = \text{n.° de envases de } C \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x + \quad y + \quad z = 5 \\ 0{,}25x + 0{,}5y + \quad z = 2{,}5 \\ x + 1{,}8y + 3{,}3z = 8{,}9 \end{array}\right.$

Resolvemos por la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 \\ 1 & 1{,}8 & 3{,}3 \end{vmatrix} = -0{,}025$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 8{,}9 & 1{,}8 & 3{,}3 \end{vmatrix}}{-0{,}025} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0{,}25 & 2{,}5 & 1 \\ 1 & 8{,}9 & 3{,}3 \end{vmatrix}}{-0{,}025} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 2{,}5 \\ 1 & 1{,}8 & 8{,}9 \end{vmatrix}}{-0{,}025} = 1$$

Solución: La farmacia ha comprado 2 envases del producto *A*, 2 del *B* y 1 del *C*.

10 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$**:**

a) **Estudia su rango según los valores de** m**, y di para cuáles de ellos es invertible.**

b) **Halla, si es posible, la inversa para** $m = 2$**, y comprueba el resultado.**

a) Calculamos los valores de m tales que $|A| = 0$:

$$|A| = 2(m-1)(m-2) + m + m(m-2) = 3m^2 - 7m + 4 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 3m^2 - 7m + 4 = 0 \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = 4/3 \end{cases}$$

- **Si** $m \neq 1$ **y** $m \neq \dfrac{4}{3}$: $ran\,(M) = 3 \;\rightarrow$ la matriz A es invertible.

- **Si** $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(M) = 2$$

- **Si** $m = \dfrac{4}{3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -1 \\ 0 & -2/3 & 1 \\ 4/3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & -2/3 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(M) = 2$$

b) **Si** $m = 2$, $|A| \neq 0$; la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es regular.

Calculamos A^{-1}:

$$|A| = 3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 4 = 2$$

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; [Adj\,(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos el resultado:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, **determina todas las matrices no nulas** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **que verifican la igualdad** $AX = mX$, **para algún valor de** m.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = mx \\ -x + z = my \\ -x - 2y + 3z = mz \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} (3-m)x + 2y - z = 0 \\ -x - my + z = 0 \\ -x - 2y + (3-m)z = 0 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema según los valores de m:

$$\begin{vmatrix} 3-m & 2 & -1 \\ -1 & -m & 1 \\ -1 & -2 & 3-m \end{vmatrix} = -m^3 + 6m^2 - 12m + 8 \rightarrow$$

$\rightarrow -m^3 + 6m^2 - 12m + 8 = 0 \rightarrow m = 2$ (raíz triple)

Si $\boldsymbol{m = 2}$:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Todas las ecuaciones son proporcionales. El sistema tiene infinitas soluciones de la forma $(\mu - 2\lambda, \lambda, \mu)$.

Para $m = 2$, hay infinitas matrices $X = \begin{pmatrix} \mu - 2\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, no simultáneamente iguales a 0, que verifican la igualdad $AX = mX$.

Por ejemplo, si $\lambda = 1$ y $\mu = 1 \rightarrow A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices B que conmutan con A; es decir, tales que $A \cdot B = B \cdot A$.**

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \\[2ex] B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} c = b \\ \left.\begin{array}{l} d = a - b \\ a - c = d \end{array}\right\} d = a - b \\ b - d = c - d \;\to\; b = c \end{cases}$$

Hay infinitas soluciones. Las matrices B que cumplen $A \cdot B = B \cdot A$ son de la forma:

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ con $a, \; b \in \mathbb{R}$

Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 2$:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1 SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

Página 29

REFLEXIONA Y RESUELVE

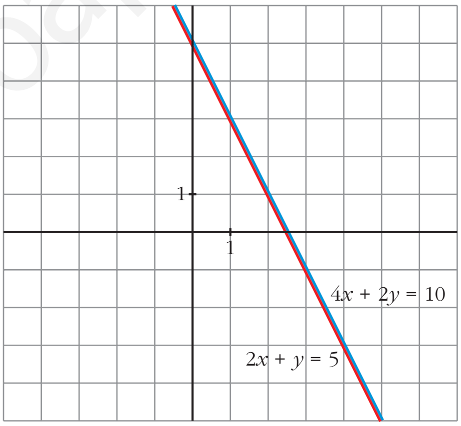
Ecuaciones e incógnitas. Sistemas de ecuaciones

1. ***¿Podemos decir que las dos ecuaciones siguientes son dos "datos distintos"? ¿No es cierto que la segunda dice lo mismo que la primera?***

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

- **Represéntalas gráficamente y observa que se trata de la misma recta.**

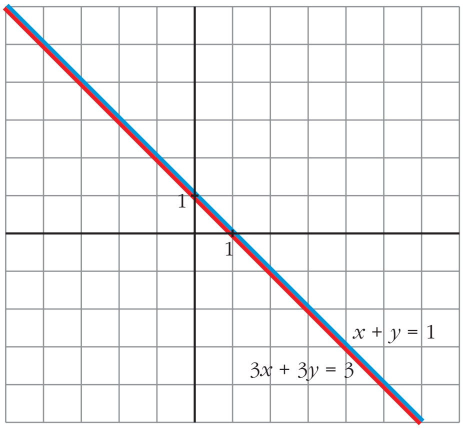
Se trata de la misma recta.



- **Escribe otro sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que la segunda ecuación sea, en esencia, igual que la primera. Interprétalo gráficamente.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{array}\right\}$$

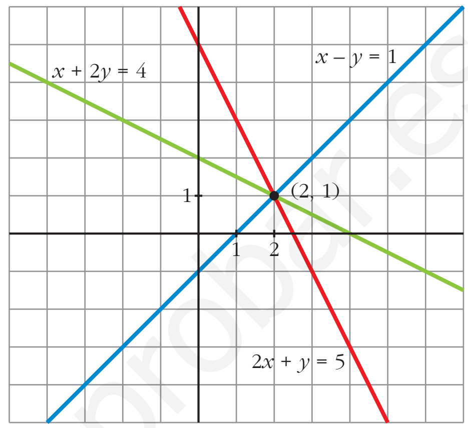
Gráficamente son la misma recta.



2. Observa las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

- **Represéntalas gráficamente y observa que las dos primeras rectas determinan un punto (con esos dos datos se responde a las dos preguntas: $x = 2$, $y = 1$). Comprueba que la tercera recta también pasa por ese punto.**



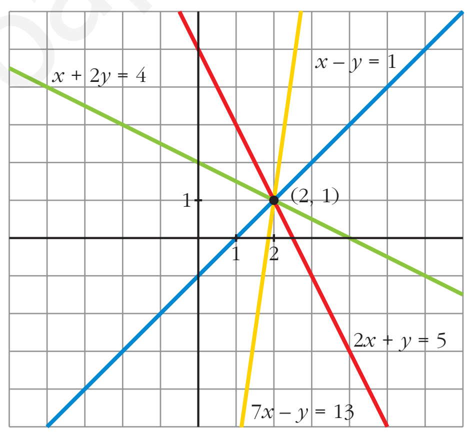
- **Da otra ecuación que también sea "consecuencia" de las dos primeras.**

  Por ejemplo:

  $$\mathbf{2 \cdot (1.^a) + 3 \cdot (2.^a)}$$

  Represéntala y observa que también pasa por $x = 2$, $y = 1$.

  $2 \cdot 1.^a + 3 \cdot 2.^a \quad \rightarrow \quad 7x - y = 13$

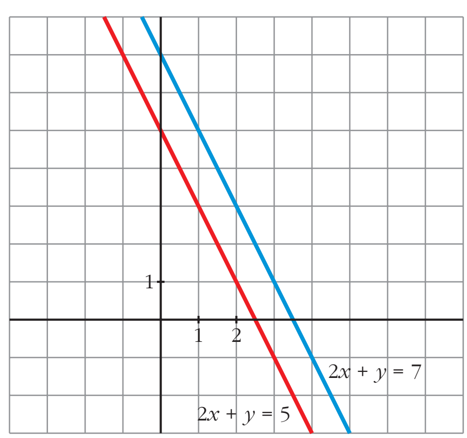


3. Considera ahora estas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Observa que *lo que dice la segunda ecuación es contradictorio con lo que dice la primera.*

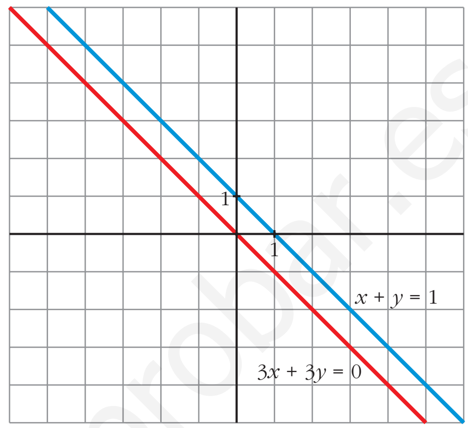
- **Represéntalas y observa que se trata de dos rectas paralelas, es decir, no tienen solución común, pues las rectas no se cortan en ningún punto.**



■ **Modifica el término independiente de la segunda ecuación del sistema que inventaste en el ejercicio 1 y representa de nuevo las dos rectas.**

Observa que lo que dicen ambas ecuaciones es ahora contradictorio y que se representan mediante rectas paralelas.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Rectas paralelas:}$$



Página 31

1. Sin resolverlos, explica por qué son equivalentes los siguientes pares de sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x + y - z = 11 \\ y = -4 \end{cases}$

a) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de sumar las dos que teníamos.

b) Hemos sustituido la primera ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

c) En el primer sistema, la tercera ecuación se obtiene sumando las dos primeras. El resto es igual que en b).

d) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

Página 33

1. Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned} 2x + y &= 1\\ 3x + 2y &= 4\\ x + y &= 3\end{aligned}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 6\\ y - z &= 1\\ x + 2y &= 7\end{aligned}\right. \qquad \text{c)}\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 6\\ x + y + z &= 0\\ x - z &= 0\end{aligned}\right. \qquad \text{d)}\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 6\\ y - z &= 1\\ z &= 1\end{aligned}\right.$$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 1\\ 3x + 2y &= 4\\ x + y &= 3\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\to \ y = 1 - 2x\\ &\\ &\to \ y = 3 - x\end{aligned}\right\} \ 1 - 2x = 3 - x \ \to \ x = -2, \quad y = 3 - (-2) = 5$

Veamos si cumple la 2.ª ecuación: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$

Solución: $x = -2$, $y = 5$. Son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, 5)$.

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6\\ y - z &= 1\\ x + 2y &= 7\end{aligned}\right\}$ La 3.ª ecuación se obtiene sumando las dos primeras; podemos prescindir de ella.

$\left.\begin{aligned} x + y &= 6 - z\\ y &= 1 + z\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x = 6 - z - y = 6 - z - 1 - z = 5 - 2z\\ &y = 1 + z\end{aligned}$

Solución: $x = 5 - 2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. Son tres planos que se cortan en una recta.

c) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6\\ x + y + z &= 0\\ x - z &= 0\end{aligned}\right\}$ Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema es incompatible. Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

d) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6\\ y - z &= 1\\ z &= 1\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &z = 1\\ &y = 1 + z = 2\\ &x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3\end{aligned}$

Solución: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Son tres planos que se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

2. a) Resuelve este sistema: $\left\{\begin{aligned} x + 2y &= 3\\ x - y &= 4\end{aligned}\right.$

b) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo compatible.

c) Añade una tercera ecuación de modo que sea incompatible.

d) Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso.

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3\\ x - y &= 4\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= 3 - 2y\\ x &= 4 + y\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &3 - 2y = 4 + y \ \to \ -1 = 3y \ \to \ y = \frac{-1}{3}\\ &x = 4 + y = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}\end{aligned}$

Solución: $x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-1}{3}$

b) Por ejemplo: $2x + y = 7$ (suma de las dos anteriores).

c) Por ejemplo: $2x + y = 9$

d) En a) → Son dos rectas que se cortan en $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

En b) → La nueva recta también pasa por $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

En c) → La nueva recta no pasa por $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$. No existe ningún punto común a las tres rectas. Se cortan dos a dos.

Página 34

1. Reconoce como escalonados los siguientes sistemas y resuélvelos:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{-4}{3} \end{array}\right\}$ *Solución:* $x = \frac{7}{3},\ y = \frac{-4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 5x - z = 4 \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$

Solución: $x = 3,\ y = -29,\ z = 11$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 + 2t \\ 5x - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$

Soluciones: $x = 3 + \lambda,\ y = -29 - 19\lambda,\ z = 11 + 6\lambda,\ t = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x = 4 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-2x}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ y = \dfrac{7 - x + z}{3} = \dfrac{16}{9} \end{array}$

Solución: $x = 1,\ y = \frac{16}{9},\ z = \frac{-2}{3}$

2. **¿Son escalonados estos sistemas? Resuélvelos:**

a) $\begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array}$

Solución: $x = 0, \ y = \dfrac{1}{2}, \ z = 0$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 + \dfrac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \dfrac{3z}{2} \end{array}$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, \ y = 5 - 3\lambda, \ z = 2\lambda$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x = 2 + y \\ x + z = 3 - y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 3 - y - 2 - y = 1 - 2y \end{array}$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, \ y = \lambda, \ z = 1 - 2\lambda$

d) $\left.\begin{array}{r} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2z = 2 \\ z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{array}$

Solución: $x = 2, \ y = 5, \ z = 1, \ t = 2$

Página 35

3. **Transforma en escalonados y resuelve:**

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} (1.^a) \\ 3\cdot(2.^a)+(1.^a) \end{array}} \blacktriangleright \left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 21 \\ 11x \quad = 33 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = \dfrac{21-2x}{-3} = -5 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 3, \; y = -5$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \end{array}} \blacktriangleright \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a):2 \\ (3.^a) \end{array}} \blacktriangleright \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\}$

$\boxed{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(2.^a) \end{array}} \blacktriangleright \left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = -1 \\ y = 3 + z = 2 \\ x = -4 + y - 3z = 1 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 1, \; y = 2, \; z = -1$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(1.^a) \end{array}} \blacktriangleright \left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -2y - 2z = -10 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a):(-2) \end{array}} \blacktriangleright \left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{array}\right\}$

(Podemos prescindir de la 3.ª, pues es igual que la 2.ª).

$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 5 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 5 + z = 1 \\ y = 5 - z \end{array}$

Soluciones: $x = 1, \; y = 5 - \lambda, \; z = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z \quad = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-3\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{array}} \blacktriangleright \left.\begin{array}{r} x - y + 3z \quad = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 3y - 4z + 3w = 18 \\ -2y - 2z + 2w = -26 \end{array}\right\}$

$\boxed{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(2.^a) \\ (4.^a)+2\cdot(2.^a) \end{array}} \blacktriangleright \left.\begin{array}{r} x - y + 3z \quad = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 38z - 18w = 114 \\ -30z + 16w = -90 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a):2 \\ 15\cdot(3.^a)+19\cdot(4.^a) \end{array}} \blacktriangleright$

$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z \quad = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 19z - 9w = 57 \\ 34w = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} w = 0 \\ z = \dfrac{57+9w}{19} = 3 \\ y = -32 + 14z - 7w = 10 \\ x = y - 3z = 1 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 1, \; y = 10, \; z = 3, \; w = 0$

Página 38

1. Resuelve estos sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss:

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 3x-2y-z&=4\\ -2x+y+2z&=2\end{aligned}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{aligned} 3x-4y+2z&=1\\ -2x-3y+z&=2\\ 5x-y+z&=5\end{aligned}\right. \qquad \text{c)}\left\{\begin{aligned} x-2y&=-3\\ -2x+3y+z&=4\\ 2x+y-5z&=4\end{aligned}\right.$$

a)
$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 3x-2y-z&=4\\ -2x+y+2z&=2\end{aligned}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\3&-2&-1&4\\-2&1&2&2\end{array}\right)\to \begin{array}{l}\text{(1.ª)}\\ \text{(2.ª)}-3\cdot\text{(1.ª)}\\ \text{(3.ª)}+2\cdot\text{(1.ª)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-5&-4&-2\\0&3&4&6\end{array}\right)\to$$

$$\to \begin{array}{l}\text{(1.ª)}\\ \text{(2.ª)}\cdot(-1)\\ \text{(3.ª)}\cdot 5+\text{(2.ª)}\cdot 3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&5&4&2\\0&0&8&24\end{array}\right)\to \left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 5y+4z&=2\\ 2z&=24\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned} &z=3\\ &y=\frac{2-4z}{5}=-2\\ &x=2-y-z=1\end{aligned}\right\}$$

Solución: $x=1,\ y=-2,\ z=3$

b)
$$\left.\begin{aligned} 3x-4y+2z&=1\\ -2x-3y+z&=2\\ 5x-y+z&=5\end{aligned}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-4&2&1\\-2&-3&1&2\\5&-1&1&5\end{array}\right)\to \begin{array}{l}\text{(1.ª)}-2\cdot\text{(3.ª)}\\ \text{(2.ª)}-\text{(3.ª)}\\ \text{(3.ª)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}-7&-2&0&-9\\-7&-2&0&-3\\5&-1&1&5\end{array}\right)$$

Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

c)
$$\left.\begin{aligned} x-2y&=-3\\ -2x+3y+z&=4\\ 2x+y-5z&=4\end{aligned}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-3\\-2&3&1&4\\2&1&-5&4\end{array}\right)\to \begin{array}{l}\text{(1.ª)}\\ \text{(2.ª)}+2\cdot\text{(1.ª)}\\ \text{(3.ª)}-2\cdot\text{(1.ª)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-3\\0&-1&1&-2\\0&5&-5&10\end{array}\right)\to$$

$$\to \begin{array}{l}\text{(1.ª)}\\ \text{(2.ª)}\\ \text{(3.ª)}+5\cdot\text{(2.ª)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&-3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)\to \left.\begin{aligned} x-2y&=-3\\ -y+z&=-2\end{aligned}\right\}\begin{aligned} x&=-3+2y\\ z&=-2+y\end{aligned}$$

Soluciones: $x=-3+2\lambda,\ y=\lambda,\ z=-2+\lambda$

2. Resuelve mediante el método de Gauss:

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned} x-y+2z&=2\\ -x+3y+z&=3\\ x+y+5z&=7\end{aligned}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{aligned} 2x-y+w&=0\\ x-2y+z&=0\\ 5x-y+z+w&=0\\ 5x-2y-z+2w&=0\end{aligned}\right. \qquad \text{c)}\left\{\begin{aligned} 2x-y+w&=9\\ x-2y+z&=11\\ 5x-y+z+w&=24\\ 5x-2y-z+2w&=0\end{aligned}\right.$$

a)
$$\left.\begin{aligned} x-y+2z&=2\\ -x+3y+z&=3\\ x+y+5z&=7\end{aligned}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&2\\-1&3&1&3\\1&1&5&7\end{array}\right)\to \begin{array}{l}\text{(1.ª)}\\ \text{(2.ª)}+\text{(1.ª)}\\ \text{(3.ª)}-\text{(1.ª)}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&2\\0&2&3&5\\0&2&3&5\end{array}\right)\to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x - y = 2 - 2z \\ 2y = 5 - 3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 - 2z + y \\ y = \dfrac{5-3z}{2} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3z}{2} \end{array}$$

$$x = 2 - 2z + \frac{5}{2} - \frac{3z}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7z}{2}$$

Soluciones: $x = \dfrac{9}{2} - 7\lambda, \quad y = \dfrac{5}{2} - 3\lambda, \quad z = 2\lambda$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (4.^a) \\ (4.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{array}$$

Solución: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$

c) $$\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (4.^a) \\ (4.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 4x = -3 \\ x - z = -18 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{-3}{4} \qquad z = x + 18 = \frac{69}{4} \qquad y = \frac{x + z - 11}{2} = \frac{11}{4} \qquad w = 9 - 2x + y = \frac{53}{4}$$

Solución: $x = \dfrac{-3}{4}, \quad y = \dfrac{11}{4}, \quad z = \dfrac{69}{4}, \quad w = \dfrac{53}{4}$

Página 39

1. Discute, en función del parámetro k, estos sistemas de ecuaciones:

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y \qquad = k \\ \;\; x + \;\; y - z = 2 \\ kx + \;\; y + z = 1 \end{array}\right. \qquad\qquad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y \qquad = k \\ \;\; x + \;\; y - z = 2 \\ kx + \;\; y + z = 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} 4x + 2y \qquad = k \\ \;\; x + \;\; y - z = 2 \\ kx + \;\; y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a}) + (2.^{a})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{(1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a}) - (1.^{a})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right)$$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x + \;\; y - z = 2 \\ 4x + 2y \qquad = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - z = 2 - y \\ 4x \qquad = 3 - 2y \end{array}\right\} \to$$

$$\to x = \frac{3 - 2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3 - 2y}{4} - 2 + y = \frac{-5 + 2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \frac{3}{4} - \lambda, \;\; y = 2\lambda, \;\; z = \frac{-5}{4} + \lambda$

- Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + \;\; y - z = 2 \\ 4x + 2y \qquad = k \\ (k-3)x \qquad\quad = (3 - k) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{3 - k}{k - 3} = -1$$

$$y = \frac{k - 4x}{2} = \frac{k + 4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

Solución: $x = -1, \;\; y = 2 + \frac{k}{2}, \;\; z = -1 + \frac{k}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array}\right)$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ El sistema es *incompatible*.

- Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (2-k) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{2-k}{k-3}$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

Solución: $x = \dfrac{2-k}{k-3}$, $y = \dfrac{k^2+k-8}{2k-6}$, $z = \dfrac{k^2-5k+8}{2k-6}$

2. Discute estos sistemas de ecuaciones en función del parámetro k:

a) $\left\{\begin{array}{l} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right)$

- Si $k = -3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $k \neq -3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} (k+3)x = 8 + 2k \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{8 + 2k}{k + 3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2 - k - 16}{k + 3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2 - k + 8}{k + 3}$$

Solución: $x = \dfrac{8 + 2k}{k + 3}$, $y = \dfrac{-k^2 - k + 8}{k + 3}$, $z = \dfrac{k^2 - k - 16}{k + 3}$

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array}\right)$$

- Si $k = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $k \neq -1$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ (-1-k)z = k - 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{k - 2}{-1 - k} = \frac{2 - k}{1 + k}$$

$$y + k\left(\frac{2 - k}{1 + k}\right) = 1 \quad \to \quad y = 1 - \frac{2k - k^2}{1 + k} = \frac{1 + k - 2k + k^2}{1 + k} = \frac{1 - k + k^2}{1 + k}$$

$$x = 1 - y - z = 1 - \frac{1 - k + k^2}{1 + k} - \frac{2 - k}{1 + k} = \frac{1 + k - 1 + k - k^2 - 2 + k}{1 + k} = \frac{-2 + 3k - k^2}{1 + k}$$

Solución: $x = \dfrac{-2 + 3k - k^2}{1 + k}$, $y = \dfrac{1 - k + k^2}{1 + k}$, $z = \dfrac{2 - k}{1 + k}$

Página 44

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Resolución e interpretación geométrica de sistemas lineales

1 **Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:**

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = -5 \\ (3/2)x - 3y = 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{array}\right.$$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (2/3) \cdot (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 5y = -5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2y = -2 \\ y = -1 \end{array}\right\}$$

Solución: $(-2, -1)$

Geométricamente, son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, -1)$.

b) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{array}\right.$

Si dividimos la 3.ª ecuación entre 2, obtenemos: $x + 2y = 0$. La 1.ª ecuación es $x + 2y = 5$. Son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

La 1.ª y la 3.ª ecuación representan dos rectas paralelas; la 2.ª las corta.

2 **Halla, si existe, la solución de los siguientes sistemas e interprétalos geométricamente:**

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{r} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{r} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{array}\right.$$

Los resolvemos por el método de Gauss:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) - 3 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (2.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Podemos prescindir de las dos últimas filas, pues coinciden con la primera. Quedaría:

$$4y = -1 \quad \to \quad y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \quad \to \quad x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solución: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$

El sistema representa cuatro rectas que se cortan en el punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -9 & 13 \end{array}\right)$

De la 2.ª ecuación, obtenemos $y = -1$; de la 3.ª ecuación, obtenemos $y = \frac{-13}{9}$.

Luego el sistema es *incompatible*.

El sistema representa tres rectas que se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a las tres.

3 **Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x \qquad + z = 2 \\ x - y \qquad = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x + y \qquad = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 3x \qquad + z = 4 \end{array}\right.$

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x \qquad + z = 2 \\ x - y \qquad = 0 \end{array}\right.$

Lo resolvemos por el método de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} x + y - \ z = 2 \\ -2y + 3z = -2 \\ -2z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y - \ z = 2 \\ -2y + 3z = -2 \\ z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + \ y = 2 \\ -2y = -2 \\ z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 - y = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Solución: (1, 1, 0)

Geométricamente, son tres planos que se cortan en el punto (1, 1, 0).

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$

Observamos que la 3.ª ecuación es la suma de la 1.ª y la 2.ª: podemos prescindir de ella.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 3 - y \\ x + z = 1 + y \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3-y}{2} \\ z = 1 + y - x = 1 + y - \dfrac{3-y}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3y}{2} \end{cases}$$

Hacemos $\lambda = \dfrac{y}{2}$.

Solución: $\left(x = \dfrac{3}{2} - \lambda,\ \ y = 2\lambda,\ \ z = -\dfrac{1}{2} + 3\lambda\right)$

Geométricamente, se trata de tres planos que se cortan en una recta que pasa por $\left(\dfrac{3}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$ con dirección (–1, 2, 3).

4 **Resuelve e interpreta geométricamente estos sistemas:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x + y - z = 5} \\ \boldsymbol{x - y + z = 3} \\ \boldsymbol{2x = 0} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{2x + y - z = 1} \\ \boldsymbol{2x + y - z = 3} \\ \boldsymbol{y - z = 0} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} y - z = 5 \\ -y + z = 3 \\ x = 0 \end{cases}$

La 2.ª ecuación contradice la opuesta de la 1.ª. No tiene solución.

Geométricamente, se trata de tres planos que se cortan dos a dos.

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$

La 1.ª y la 2.ª ecuación son contradictorias. No tiene solución.

Geométricamente, se trata de dos planos paralelos que son cortados por un tercero.

5 **Razona si estos sistemas tienen solución e interprétalos geométricamente:**

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{matrix}\right\}$ Si dividimos la 2.ª ecuación entre 2, obtenemos:

$x + 2y - z = \dfrac{1}{2}$, que contradice la 1.ª.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

b) $\left.\begin{matrix} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{matrix}\right\}$ Si multiplicamos por $-\dfrac{2}{3}$ la 1.ª ecuación, obtenemos:

$\dfrac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradice la 2.ª ecuación.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

Sistemas escalonados

6 **Resuelve los siguientes sistemas reconociendo previamente que son escalonados:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 23y = -69 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x = 0 \\ x + y - z = 9 \\ x - z = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} 2x - y = 7 \\ 23y = -69 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} y = -3 \\ x = \dfrac{7 + y}{2} = 2 \end{matrix}\right\}$

Solución: $(2, -3)$

b) $\left.\begin{matrix} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{matrix}\right\}$ $z = \dfrac{2}{9}$ $\quad y = z - 1 = \dfrac{-7}{9}$ $\quad x = \dfrac{3 + y - z}{3} = \dfrac{2}{3}$

Solución: $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-7}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$

c) $\left.\begin{matrix} -2x = 0 \\ x + y - z = 9 \\ x - z = 2 \end{matrix}\right\}$ $x = 0$ $\quad z = x - 2 = -2$ $\quad y = 9 + z - x = 7$

Solución: $(0, 7, -2)$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y \quad\;\; = 0 \\ \quad\;\; 2y \quad\;\; = 1 \end{array}\right\}$ $y = \dfrac{1}{2}$ $\quad x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6}$ $\quad z = -2x + 3y = \dfrac{7}{6}$

Solución: $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}\right)$

7 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y \quad\;\; = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ \quad\;\; y + z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z + \;\; t = 4 \\ \quad\;\; y + z - \;\; t = 3 \\ \quad\quad\quad z + 2t = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y - t \quad\;\; = 2 \\ \quad\;\; y \quad\;\; + z = 4 \\ \quad\;\; y + t - z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ \quad\; y \quad\;\; = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 5 \\ x = 2 - z + y = 7 - z \end{array}$

Soluciones: $(7 - \lambda, 5, \lambda)$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = 4 \\ \quad\;\; y + z = 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 - z \\ \quad\;\; y = 2 - z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 2 - z \\ x = \dfrac{4 - z - y}{2} = \dfrac{4 - z - 2 + z}{2} = 1 \end{array}$

Soluciones: $(1, 2 - \lambda, \lambda)$

c) $\left.\begin{array}{l} x + y - z + \;\; t = 4 \\ \quad\;\; y + z - \;\; t = 3 \\ \quad\quad\quad z + 2t = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 4 - \;\; t \\ \quad\;\; y + z = 3 + \;\; t \\ \quad\quad\quad z = 1 - 2t \end{array}\right\}$

$z = 1 - 2t \qquad y = 3 + t - z = 2 + 3t \qquad x = 4 - t + z - y = 3 - 6t$

Soluciones: $(3 - 6\lambda, 2 + 3\lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y - t \quad\;\; = 2 \\ \quad\;\; y \quad\;\; + z = 4 \\ \quad\;\; y + t - z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 4 - z \\ t = 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x = 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{array}$

Soluciones: $(-5 + 3\lambda,\; 4 - \lambda,\; \lambda,\; -3 + 2\lambda)$

8 **Transforma en escalonados y resuelve los sistemas siguientes:**

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ \;\; x + \;\; y = 0 \\ \;\; x - \;\; y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \;\; x + 2y = 1 \\ \;\; x + \;\; y = 0 \\ 2x + \;\; y = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 5 \\ (3.^a) : 2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ -y = 1 \end{array}\right\} \quad y = -1 \qquad x = -y = 1$

Solución: $(1, -1)$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$

La 2.ª y 3.ª filas son contradictorias. No tiene solución.

9 **Transforma en escalonados y resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -10 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & -10 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 3 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 11 & 0 & 11 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 11x = 11 \end{array}\right\} \quad x = 1 \qquad y = 2x - 7 = -5$

Solución: $(1, -5)$

b) $\left.\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 5 \cdot (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 2 \\ -y + z = 1 \\ 9z = 2 \end{array}\right\} \quad z = \frac{2}{9} \qquad y = z - 1 = \frac{-7}{9} \qquad x = 2 + 2y + z = \frac{2}{3}$

Solución: $\left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9}\right)$

Método de Gauss

s10 **Resuelve aplicando el método de Gauss:**

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ 2z = 0 \end{array}\right\}$

$z = 0 \qquad y = -2 - z = -2 \qquad x = 1 - y = 3$

Solución: $(3, -2, 0)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad y = -\dfrac{z}{2} \quad x = -y - z = -\dfrac{z}{2}$

Soluciones: $\left(-\dfrac{\lambda}{2}, -\dfrac{\lambda}{2}, \lambda\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{array}\right\}$

$y = 4z + 2$

$x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z$

$z = \lambda$

Soluciones: $(-1 - 3\lambda, \; 2 + 4\lambda, \; \lambda)$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(3.^a) \\ (2.^a)\,:\,2 \\ (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 3\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - 3\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)\,:\,(-5) \\ (3.^a)\,:\,7}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -6 \\ z = -2 \\ y - z = 3 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{array}$

Solución: $(-1, 1, -2)$

s11 **Resuelve aplicando el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{r} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + 2\cdot(3.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)\,:\,3 \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) - 5\cdot(2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} -3x = 6 \\ x + y = 2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 - x = 4 \\ z = 4 - x = 6 \end{array}$

Solución: $(-2, 4, 6)$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 5\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - 3\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ -2\cdot(3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 3 \\ 2z = 1 \end{array}\right\}$ $z = \dfrac{1}{2}$ $\quad y = \dfrac{3 + 2z}{-2} = -2$ $\quad x = -y - z = \dfrac{3}{2}$

Solución: $\left(\dfrac{3}{2}, -2, \dfrac{1}{2}\right)$

s12 **Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ x - y - z &= -10 \\ 2x - y + z &= 5 \end{aligned}\right.$ b) $\left\{\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= -1 \end{aligned}\right.$

c) $\left\{\begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 2x - 4y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}\right.$ d) $\left\{\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ 3x - y &= 0 \\ 4x + y - z &= 0 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ x - y - z &= -10 \\ 2x - y + z &= 5 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ -(2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (2.^a)+2\cdot(3.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ 3y + 2z &= 19 \\ -7y &= -7 \end{aligned}\right\}$

$y = 1 \qquad z = \dfrac{19 - 3y}{2} = 8 \qquad x = 9 - 2y - z = -1$

Solución: $(-1, 1, 8)$

b) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= -1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ -(2.^a)+2\cdot(1.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{aligned} x + 2y &= 3 - z \\ 5y &= 7 - z \end{aligned} \left|\begin{aligned} &y = \frac{7}{5} - \frac{z}{5} \\ &x = 3 - z - 2y = 3 - z - \frac{14}{5} + \frac{2z}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3z}{5} \end{aligned}\right.$

Si hacemos $z = 5\lambda$, las soluciones son: $\left(\dfrac{1}{5} - 3\lambda,\ \dfrac{7}{5} - \lambda,\ 5\lambda\right)$

c) $\left.\begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 2x - 4y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{matrix}(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a)+2\cdot(3.^a) \\ (3.^a)\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

La segunda ecuación es imposible: $0x + 0y + 0z = 5$

El sistema es *incompatible*.

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y \quad\;\; = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y \quad\;\; = 0 \end{array}\right\}$

$y = 3x$

$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$

$x = \lambda$

Soluciones: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

Página 45

s13 **Estudia y resuelve por el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} y + z = -1 \\ x - y \quad\;\; = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 4 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$

$\to$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema *compatible determinado.*

Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ $y = -\dfrac{1}{2}$ $x = y + 3z + 2 = \dfrac{3}{2}$

Solución: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 2 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & 3 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ y + z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 + y \\ z = -1 - y \\ y = \lambda \end{array}$

Soluciones: $(1 + \lambda,\ \lambda,\ -1 - \lambda)$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & | & 4 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & -2 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3 \\ 5 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 6 & -3 & | & 9 \\ 0 & 12 & -7 & | & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 3 \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$

Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{array}$

Solución: $(1, 1, -1)$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -4 \cdot (2.^a) + 3 \cdot (3.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & | & 0 \end{pmatrix}$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = 0 \\ z = 0 \\ x = y \\ y = \lambda \end{array}$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

14 **Clasifica los siguientes sistemas en compatibles o incompatibles:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+y-z=3 \\ z=0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+y-z=3 \\ z=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ x+y=3 \\ z=0 \end{array}\right\}$ *Compatible indeterminado.*

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \to$

$\to$ *Compatible determinado.*

s15 **Estudia y resuelve por el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+6\cdot(2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 23 & 69 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ y+3z=7 \\ 23z=69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=3 \\ y=7-3z=-2 \\ x=2-y-z=1 \end{array}\right\}$

El sistema es *compatible determinado*, con solución $(1, -2, 3)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema *compatible indeterminado.*

Lo resolvemos: $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ 3x-y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=3x \\ z=-2x+3y=-2x+9x=7x \\ x=\lambda \end{array}$

Soluciones: $(\lambda,\ 3\lambda,\ 7\lambda)$

Discusión de sistemas de ecuaciones

16 **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ 2y = m - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = m \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = 3 \\ mz = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ (m-5)z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ 2y = m - 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & m-2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 \end{array}\right)$

- Si $m = 4 \to$ Sistema *compatible determinado*.
- Si $m \neq 4 \to$ Sistema *incompatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinado* para todo m.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = 3 \\ mz = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{array}\right)$

- Si $m = 0 \to$ Sistema *incompatible*.
- Si $m \neq 0 \to$ Sistema *compatible determinado*.

d) $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ (m-5)z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-5 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m = 5 \to$ Sistema *compatible indeterminado*.
- Si $m \neq 5 \to$ Sistema *compatible determinado* con *solución* (0, 0, 0).

s17 **Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y \;\;=\;\; 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky \;\;=\;\; 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k + 1 & 0 \end{array}\right)$

- Si $k = -\dfrac{1}{2} \;\to$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$2x - y = 4 \;\to\; \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{cases}$$

Soluciones: $(\lambda, 2\lambda - 4)$

- Si $k \neq -\dfrac{1}{2} \;\to$ Sistema *compatible determinado*.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - \quad\quad y = 4 \\ (2k + 1)y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 2 \end{array}$$

Solución: $(2, 0)$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + \;\; y - \;\; z = 1 \\ x - 2y + \;\; z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \to$

$$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m - 15 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m - 10 \end{array}\right)$$

- Si $m = 10 \;\to$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + \;\; z = \;\; 3 \\ 5y - 3z = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-5 + 3z}{5} = -1 + \dfrac{3z}{5} \\ x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \dfrac{6z}{5} - z = 1 + \dfrac{z}{5} \end{array}$$

Hacemos $z = 5\lambda$.

Soluciones: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

- Si $m \neq 10 \;\to$ *Incompatible.*

s18 **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - \;\; y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - \;\; y - 2z = 2 \\ 2x + \;\; y + 3z = 1 \\ 3x \quad\quad + \;\; z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x - \ \ y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m - 12 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : (-5) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m - 7 \end{array}\right)$

- Si $m = 7 \to$ Sistema *compatible determinado.*

  $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \ x = 3 - 2y = 1$

  Solución: $(1, 1)$

- Si $m \neq 7 \to$ Sistema *incompatible.*

b) $\left.\begin{array}{r} x - \ \ y - 2z = 2 \\ 2x + \ \ y + 3z = 1 \\ 3x \qquad + \ \ z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m - 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m + 1 \end{array}\right)$

- Si $m = -1 \to$ Sistema *compatible indeterminado.*

  $\left.\begin{array}{r} x - \ \ y - 2z = \ \ 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3 - 7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$

  Haciendo $z = 3\lambda$:

  Soluciones: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \to$ Sistema *incompatible.*

PARA RESOLVER

s19 Resuelve por el método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{l} x \qquad + 2z = 11 \\ x + y \qquad\ \ = 3 \\ \quad\ \ y + \ \ z = 13 \\ x + y + \ \ z = 10 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = \ \ 1 \\ x - y + z - t = \ \ 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = \ \ 2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x \quad\;\; + 2z = 11 \\ x + y \quad\quad\; = \;\;3 \\ \quad\;\; y + \;\; z = 13 \\ x + y + \;\; z = 10 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 11 \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 13 \\ 1 & 1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)\\(4.^a)-(1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 11 \\ 0 & 1 & -2 & | & -8 \\ 0 & 1 & 1 & | & 13 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\\(4.^a)-(2.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 11 \\ 0 & 1 & -2 & | & -8 \\ 0 & 0 & 3 & | & 21 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-3\cdot(4.^a)\\(4.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 11 \\ 0 & 1 & -2 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \to$

$\to \left.\begin{array}{l} x \quad + 2z = 11 \\ \quad y - 2z = -8 \\ \quad\quad\;\; z = \;\;7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -8 + 2z = -8 + 14 = 6 \\ x = 11 - 2z = 11 - 14 = -3 \end{array}\right\}$

Solución: $(-3, 6, 7)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = \;\;1 \\ x - y + z - t = \;\;0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = \;\;2 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\\(4.^a)-(1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} x + y + z + \;\; t = \;\;1 \\ \;\; -2y \quad\quad - 2t = -1 \\ \quad\quad\quad\; z + \;\; t = \;\;1 \\ \quad\quad\quad\quad\; -2t = \;\;1 \end{array}\right\}$

$t = -\dfrac{1}{2} \qquad z = 1 - t = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \qquad y = \dfrac{2t - 1}{-2} = 1 \qquad x = 1 - y - z - t = -1$

Solución: $\left(-1, 1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

s20 Discute los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y - \;\; z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + \;\; y - \;\; z = 0 \\ x + 3y + \;\; z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + \;\; z = \;\;1 \\ mx + \;\; y - \;\; z = \;\;1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + \;\; y - \;\; z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y - \;\; z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & k \\ 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & k & | & 0 \end{pmatrix} \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & k \\ 0 & 0 & 3 & | & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & | & -2k \end{pmatrix}$

Sistema *compatible determinado* para todo k.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 7 \cdot (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $a = 10 \to$ Sistema *compatible indeterminado*.
- Si $a \neq 10 \to$ Sistema *compatible determinado*.

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (3.^a) \\ (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Compatible determinado para todo m.

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 5 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a+3 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & 1 \end{array}\right)$

$2 - 2a = 0 \to a = 1$

- Si $a = 1 \to$ Sistema *incompatible*.
- Si $a \neq 1 \to$ Sistema *compatible determinado*.

s21 **Discute y resuelve en función del parámetro:**

a) $\left\{\begin{array}{r} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x \qquad - 3z = -2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x \qquad - 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} -(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ -(2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m = 1 \;\to\;$ Sistema *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{array}{rl} x \quad\;\; + 3z &= 2 \\ y + 4z &= 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3z \\ y = 4 - 4z \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(2 - 3\lambda,\ 4 - 4\lambda,\ \lambda)$

- Si $m \neq 1 \;\to\;$ Sistema *compatible determinado.*

$$\left.\begin{array}{rl} x \qquad\qquad + 3z &= 2 \\ y + 4z &= 4 \\ (m-1)y \qquad\; &= 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{array}\right\}$$

Solución: $(-1,\ 0,\ 1)$

b) $\left.\begin{array}{rl} x + \;\; y + \;\; z &= 0 \\ 3x + 2y + az &= 5 \\ 2x + \;\; y + \;\; z &= 3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(3.^a)\\(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - 2\cdot(1.^a)\\(3.^a) - 3\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\-(2.^a)\\(3.^a) - (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right)$

- Si $a = 2 \;\to\;$ Sistema *incompatible.*
- Si $a \neq 2 \;\to\;$ Sistema *compatible determinado.* Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + \qquad z &= 0 \\ y + \qquad z &= -3 \\ (a-2)z &= 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{2}{a-2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a-2} = \frac{4-3a}{a-2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4+3a}{a-2} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a-6}{a-2}$$

Solución: $\left(\dfrac{3a-6}{a-2},\ \dfrac{4-3a}{a-2},\ \dfrac{2}{a-2}\right)$

s22 Discute los siguientes sistemas según los valores de α e interprétalos geométricamente:

a) $\left\{\begin{array}{rl} \alpha x - \;\; y &= 1 \\ x - \alpha y &= 2\alpha - 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{rl} x - \;\; y \qquad\; &= 1 \\ 2x + 3y - 5z &= -16 \\ x + \alpha y - \;\; z &= 0 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} \alpha x - \ \ y = \qquad 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \cdot \alpha - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array}\right)$$

$\alpha \neq 0$

- Si $\alpha \neq 1$, queda:

  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sistema *compatible indeterminado*. Son dos rectas coincidentes.

- Si $\alpha = -1$, queda:

  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sistema *incompatible*. Son dos rectas paralelas.

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$ $\to$ Sistema *compatible determinado*. Son dos rectas secantes.

b) $$\left.\begin{array}{r} x - \ \ y \qquad\quad = \quad 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - \ \ z = \quad 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 5 \cdot (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right)$$

- Si $\alpha \neq 0$ $\to$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.
- Si $\alpha = 0$ $\to$ Sistema *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

23 **A, B y C son tres amigos. A le dice a B: *si te doy la tercera parte de mi dinero, los tres tendremos la misma cantidad.***

Calcula lo que tiene cada uno si entre los tres tienen 60 €.

Llamamos: x dinero que tiene A

y dinero que tiene B

z dinero que tiene C

Con los datos planteamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y + \dfrac{x}{3} = \dfrac{2x}{3} \\ \dfrac{2x}{3} = z \\ x + y + z = 60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y - \dfrac{x}{3} = 0 \\ \dfrac{2}{3}x - z = 0 \\ x + y + z = 60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x + 3y \qquad = \ \ 0 \\ 2x \qquad - 3z = \ \ 0 \\ x + \ \ y + \ \ z = 60 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 30$, $y = 10$, $z = 20$

A tiene 30 €, B, 10 €, y C, 20 €.

s24 **Un almacenista dispone de tres tipos de café: el A, de 9,80 €/kg; el B, de 8,75 €/kg, y el C, de 9,50 €/kg. Desea hacer una mezcla con los tres tipos de 10,5 kg a 9,40 €/kg. ¿Cuántos kilos de cada tipo debe mezclar si tiene que poner del tipo C el doble de lo que ponga del A y del B?**

Llamamos x a la cantidad de A, y a la de B y z a la de C.

Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 10{,}5 \\ z = 2(x + y) \\ 9{,}8x + 8{,}75y + 9{,}5z = 10{,}5 \cdot 9{,}4 = 98{,}7 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 1{,}5$; $y = 2$; $z = 7$

Debe mezclar 1,5 kg de A, 2 kg de B y 7 kg de C.

s25 **Halla un número de tres cifras sabiendo que estas suman 9; que si al número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.**

☛ ***Si x es la cifra de las unidades; y, la de las decenas, y z, la de las centenas, el número será $x + 10y + 100z$.***

Llamamos x a la cifra de las unidades, y a la de las decenas y z a la cifra de las centenas.

$$z \;\; y \;\; x \;\; \rightarrow \;\; \text{n.}^\circ = x + 10y + 100z$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ x + 10y + 100z - (z + 10y + 100x) = 198 \\ y = \dfrac{x + z}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 9 \\ -99x + 99z = 198 \\ 2y = x + z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ -x + z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(2.^a)\\(1.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)+(1.^a)\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a):2\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} -x + z = 2 \\ y + 2z = 11 \\ 3z = 12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 4 \\ y = 11 - 2z = 11 - 8 = 3 \\ x = z - 2 = 2 \end{array}\right\}$$

Solución: El número es el 432.

Página 46

s26 **Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés; una cantidad B, al 5%, y el resto, al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%; la B, al 6%, y el resto, al 4%.**

Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1 050 €, y el segundo, de 950 €.

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ 0{,}04A + 0{,}05B + 0{,}06C = 1\,050 \\ 0{,}05A + 0{,}06B + 0{,}04C = 950 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ 4A + 5B + 6C = 105\,000 \\ 5A + 6B + 4C = 95\,000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 4 & 5 & 6 & 105\,000 \\ 5 & 6 & 4 & 95\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - 4\cdot(1.^a)\\(3.^a) - 5\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\-(3.^a) + (2.^a)\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 0 & 3 & 30\,000 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ B + 2C = 25\,000 \\ 3C = 30\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C = 10\,000 \\ B = 5\,000 \\ A = 5\,000 \end{array}$$

Solución: $A = 5\,000$ €; $B = 5\,000$ €; $C = 10\,000$ €

s27 **Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%.**

Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad que el de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se les aplicó el 30% de descuento.

Llamamos x al n.° de copias vendidas al precio original, 12 €; y al n.° de copias vendidas con un 30% de descuento, $0{,}7 \cdot 12 = 8{,}4$ €; y z al n.° de copias vendidas con un 40% de descuento, $0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$ €.

Así:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6\,384 \\ y + z = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6\,384 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8{,}4 & 7{,}2 & 6\,384 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\-(2.^a) + 12\cdot(1.^a)\\-(3.^a) + (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 3 & 3 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) : 3\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(3.^a)\\(3.^a) - 3{,}6\cdot(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1{,}2 & 96 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 600 \\ y + z = 200 \\ 1{,}2z = 96 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 80 \\ y = 120 \\ x = 400 \end{array}$$

Solución: El 30% de descuento se le aplicó a 120 copias.

28 **Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada una moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.**

Llamamos x al n.° de monedas que hay en la caja A, y al n.° de monedas que hay en la caja B, y z al n.° de monedas que hay en la caja C. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x = y + z + 2 \\ x + 1 = 2(y - 1) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x + 1 = 2y - 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones: $2x = 38 \rightarrow x = 19$

De la 3.ª ecuación $\rightarrow y = \dfrac{x+3}{2} = 11$

$z = 36 - y - x = 6$

Solución: Había 19 monedas en la caja A, 11 en la B y 6 en la C.

29 **Un automóvil sube las cuestas a 54 km/h, las baja a 90 km/h y en llano marcha a 80 km/h. Para ir de A a B tarda 2 horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 45 minutos. ¿Cuál es la longitud de camino llano entre A y B si sabemos que la distancia entre A y B es de 192 km?**

Llamamos x a la longitud de camino llano entre A y B, y a la longitud de cuesta arriba yendo de A a B y z a la longitud de cuesta abajo yendo de A a B. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 192 \text{ km} \\ \dfrac{x}{80} + \dfrac{y}{54} + \dfrac{z}{90} = 2{,}5 \text{ horas} \\ \dfrac{x}{80} + \dfrac{y}{90} + \dfrac{z}{54} = 2{,}75 \text{ horas} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 192 \\ 27x + 40y + 24z = 5\,400 \\ 27x + 24y + 40z = 5\,940 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 27 & 40 & 24 & 5\,400 \\ 27 & 24 & 40 & 5\,940 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 27 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 27 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 0 & 13 & -3 & 216 \\ 0 & -3 & 13 & 756 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \cdot 3 + (2.^a) \cdot 13 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 0 & 13 & -3 & 216 \\ 0 & 160 & 0 & 5\,076 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x + y + z = 192 \\ 13y - 3z = 216 \\ 160y = 5\,076 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 31{,}725 \text{ km} \\ z = 65{,}475 \text{ km} \\ x = 94{,}800 \text{ km} \end{array}$$

Solución: La longitud de camino llano entre A y B es de 94,8 km.

s30 **Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €. ¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar?**

Hacemos una tabla que resuma la situación:

	COMIENZO	1.ª PARTIDA	2.ª PARTIDA	3.ª PARTIDA
1.° QUE PIERDE	x	$x-y-z$	$2x-2y-2z$	$4x-4y-4z$
2.° QUE PIERDE	y	$2y$	$-x+3y-z$	$-2x+6y-2z$
3.° QUE PIERDE	z	$2z$	$4z$	$-x-y+7z$

$$\left.\begin{aligned}4x-4y-4z&=24\\-2x+6y-2z&=24\\-x-y+7z&=24\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x-y-z&=6\\-x+3y-z&=12\\-x-y+7z&=24\end{aligned}\right\}\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&6\\-1&3&-1&12\\-1&-1&7&24\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)+(1.^a)\end{subarray}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&6\\0&2&-2&18\\0&-2&6&30\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a):2\\(3.^a):2\end{subarray}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&6\\0&1&-1&9\\0&-1&3&15\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(2.^a)\end{subarray}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&6\\0&1&-1&9\\0&0&2&24\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}x-y-z&=6\\y-z&=9\\2z&=24\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}&z=12\\&y=9+z=21\\&x=6+y+z=39\end{aligned}\right\}$$

Solución: El jugador que perdió primero tenía 39 euros, el que perdió en 2.° lugar tenía 21 € y el que perdió en 3.^{er} lugar tenía 12 €.

s31 **Una persona ha obtenido 6 000 € de beneficio por invertir un total de 60 000 € en tres empresas: A, B y C. La suma del dinero invertido en A y B fue *m* veces el invertido en C, y los beneficios fueron el 5% en A, el 10% en B y el 20% en C.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad invertida en cada empresa.

b) Prueba que si $m > 0$, el sistema es compatible determinado.

c) Halla la solución para $m = 5$.

a) Sean x, y, z las cantidades invertidas en A, B y C, respectivamente. Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{aligned}x+y+z&=60\,000\\x+y&=mz\\0{,}05x+0{,}1y+0{,}2z&=6\,000\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x+y+z&=60\,000\\x+y-mz&=0\\0{,}05x+0{,}1y+0{,}2z&=6\,000\end{aligned}\right\}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&60\,000\\1&1&-m&0\\0{,}05&0{,}1&0{,}2&6\,000\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{subarray}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-0{,}05\cdot(1.^a)\end{subarray}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&60\,000\\0&0&-m-1&-60\,000\\0&0{,}05&0{,}15&3\,000\end{array}\right)$$

- Si $m = -1$: El sistema es *incompatible*.
- Si $m \neq -1$: El sistema es *compatible determinado*.

Por tanto, si $m > 0$, el sistema es *compatible determinado*.

c) $m = 5$, *solución*: $x = 20\,000$ €, $y = 30\,000$ €, $z = 10\,000$ €.

s32 **Las edades de un hijo, su padre y su abuelo cumplen las siguientes condiciones: La suma de las edades del padre, del hijo y el doble de la del abuelo es 182 años.**

El doble de la edad del hijo más la del abuelo es 100 años, y la del padre es α veces la de su hijo.

a) Halla sus edades suponiendo que $\alpha = 2$.

b) ¿Es posible que $\alpha = 3$?

c) Si $\alpha = 3$ y en la primera condición la suma es 200, ¿qué ocurre con el problema?

Sean x, y, z las edades del hijo, del padre y del abuelo.

Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 182 \\ 2x + z = 100 \\ y = \alpha x \end{array}\right\}$$

a) Si $\alpha = 2$: *solución*: $x = 18$, $y = 36$, $y = 64$

El hijo tiene 18 años, el padre, 36 años, y el abuelo, 64 años.

b) Si $\alpha = 3$: el sistema es *incompatible*. Por tanto, no es posible que $\alpha = 3$.

c) $$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 200 \\ 2x + z = 100 \\ y = 3x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x + 2z = 200 \\ 2x + z = 100 \end{array}\right\}$$

El sistema es *compatible indeterminado*, hay infinitas soluciones.

CUESTIONES TEÓRICAS

s33 **¿Es posible convertir este sistema en compatible indeterminado cambiando un signo?**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z = 1} \\ \boldsymbol{x - y + z = 1} \\ \boldsymbol{x + y - z = 1} \end{array}\right.$$

Sí. Si cambiamos la 2.ª ecuación por $x + y + z = 1$, o bien, si cambiamos la 3.ª ecuación por $x + y + z = 1$, el sistema resultante será *compatible indeterminado*.

s34 **Define cuándo dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes. Justifica si son equivalentes o no los siguientes sistemas:**

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando todas las soluciones del 1.^er^ sistema lo son también del 2.°, y al revés.

Los dos sistemas dados no son equivalentes, puesto que el 1.° es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) y el 2.° es determinado (solo tiene una solución).

35 **Si tenemos un sistema compatible indeterminado de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿se puede conseguir un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?**

Sí. Por ejemplo:

$$\textit{Incompatible}\ \begin{cases} \left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}\right\} \textit{Compatible indeterminado} \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

36 **Si a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas incompatible le agregamos otra ecuación, ¿podríamos lograr que fuera compatible indeterminado? ¿Y determinado? Justifica las respuestas.**

No. Si el sistema es *incompatible*, las dos ecuaciones iniciales son contradictorias. Añadiendo otra ecuación, no podemos cambiar este hecho; el sistema seguirá siendo *incompatible*.

s37 **Sean S y S' dos sistemas equivalentes con solución única que tienen iguales los términos independientes. ¿Podemos asegurar que tienen iguales los coeficientes de las incógnitas?**

No. Por ejemplo, los sistemas:

$$S: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

son equivalentes, con solución única (2, 1), tienen iguales los términos independientes, pero no los coeficientes de las incógnitas.

38 **Encuentra razonadamente un valor de a para el cual el siguiente sistema es incompatible:**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (a-1)x = 1 \\ x + 3z = 2 \\ (a-2)z = 0 \end{cases}$$

¿Puede ser compatible indeterminado para el valor $a = 2$?

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + \quad 2z &= 0 \\ (a-1)x \qquad\qquad &= 1 \\ x \quad + \quad 3z &= 2 \\ (a-2)z &= 0 \end{array}\right\}$$

- Si $a = 1$, la 2.ª ecuación es $0x = 1$. El sistema es *incompatible*.
- Si $a = 2$, la 4.ª ecuación es trivial, el sistema es *compatible determinado*. Luego no puede ser *compatible indeterminado*.

Página 47

PARA PROFUNDIZAR

s39 **Discute los siguientes sistemas en función del parámetro a y resuélvelos en el caso en que sean compatibles indeterminados:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - 2\cdot(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -a+2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ Sistema *incompatible*.

- Si $a = 2$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(3.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

  $\to$ Sistema *compatible indeterminado*.

  Lo resolvemos en este caso:

  $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x + z = 1 \to x = 1 - z \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\}$

  Soluciones: $(1 - \lambda, 0, \lambda)$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \to$ Sistema *compatible determinado*.

b) $\left.\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l}(3.^a)\\(2.^a)\\(1.^a)\end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(1.^a)\end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a-1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\-a \cdot (3.^a) + (2.^a)\end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -a^2+a+2 & 0 & 0 & 2-a \end{array}\right)$

$a \neq 0$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \to a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}$$

- Si $a = -1$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$ Sistema *incompatible*.

- Si $a = 2$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a):2\\(3.^a)\end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{l} -x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} z = 1 + x \\ y = 1 - x \\ x = \lambda \end{array}$

Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \to$ Sistema *compatible determinado*.

s40 **Encuentra razonadamente dos valores del parámetro a para los cuales el siguiente sistema sea incompatible:**

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + az = 3 \end{array}\right.$$

$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + az = 3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)\\(4.^a)\end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \to$

$\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)\\(4.^a)-2\cdot(3.^a)\end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-6 & -1 \end{array}\right)$ Si $a = 1$ o $a = 6$, el sistema es *incompatible*.

41 **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z + t = 17} \\ \boldsymbol{x + y + z + w = 16} \\ \boldsymbol{x + y + t + w = 15} \\ \boldsymbol{x + z + t + w = 14} \\ \boldsymbol{ y + z + t + w = 14} \end{array}\right.$$

☛ ***Si sumas las cinco igualdades, obtendrás otra con la que se te pueden simplificar mucho los cálculos.***

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 76$, o bien:

$x + y + z + t + w = 19$

Por tanto:

$$\begin{array}{lcl} (x + y + z + t) + w = 17 + w = 19 & \rightarrow & w = 2 \\ (x + y + z + w) + t = 16 + t = 19 & \rightarrow & t = 3 \\ (x + y + t + w) + z = 15 + z = 19 & \rightarrow & z = 4 \\ (x + z + t + w) + y = 14 + y = 19 & \rightarrow & y = 5 \\ (y + z + t + w) + x = 14 + x = 19 & \rightarrow & x = 5 \end{array}$$

42 **Una cuadrilla de cinco jardineros debía podar una plantación trabajando de lunes a viernes. Cada día, cuatro podaban y el otro les ayudaba. Cada jardinero podó el mismo número de árboles cada día.**

Los resultados de la poda fueron: lunes, 35 árboles podados; martes, 36; miércoles, 38; jueves, 39, y el viernes no sabemos si fueron 36 ó 38.

Calcula cuántos árboles diarios podó cada uno, sabiendo que fueron números enteros y que ninguno podó los cinco días.

Llamamos:

w = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el lunes.

t = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el martes.

z = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el miércoles.

y = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el jueves.

x = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el viernes.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 148 + k$, o bien:

$x + y + z + t + w = 37 + \frac{k}{4}$

Si x, y, z, t, w son números enteros, su suma también lo será; luego, k debe ser múltiplo de 4. Como nos dicen que vale 36 ó 38, tenemos que ha de ser $k = 36$ (pues 38 no es múltiplo de 4).

Resolvemos el sistema, ahora que sabemos que $k = 36$:

La suma de las cinco igualdades dará lugar a:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{36}{4} = 37 + 9 = 46$$

Por tanto:

$$\begin{array}{lll} (x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 & \rightarrow & w = 11 \\ (x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 & \rightarrow & t = 10 \\ (x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 & \rightarrow & z = 8 \\ (x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 & \rightarrow & y = 7 \\ (y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 & \rightarrow & x = 10 \end{array}$$

Así, el jardinero que descansa el lunes poda 11 árboles; el que descansa el martes, 10; el que descansa el miércoles, 8; el que descansa el jueves, 7, y el que descansa el viernes, 10.

AUTOEVALUACIÓN

1. Resuelve e interpreta geométricamente los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ y - z = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a)\end{array}}$ $\begin{array}{r} 2x + 6y = 0 \\ 9x - 6y = 33 \\ \hline 11x = 33 \end{array}$ Sumando la 1.ª fila con 3 veces la 2.ª

$\rightarrow x = 3 \rightarrow y = -1$

Comprobamos en la 3.ª ecuación:

$$-3 + 3(-1) \neq 0$$

El sistema es *incompatible*. Son tres rectas que se cortan dos a dos.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 5 \\ y - z = 3 \end{array}\right\}$ Hacemos $y = \lambda$: $\left\{\begin{array}{l} 2x = 5 + \lambda \;\rightarrow\; x = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\lambda}{2} \\ z = \lambda - 3 \end{array}\right.$

El sistema es *compatible indeterminado*.

Solución: $\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{\lambda}{2}, \lambda, -3 + \lambda\right)$

Representa dos planos que se cortan en una recta.

2. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema e interprétalo geométricamente:

$$\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x - 3y - z = -1} \\ \boldsymbol{x + 5y + 3z = 3} \\ \boldsymbol{x + y + z = 1} \\ \boldsymbol{3x + 7y + 5z = 5} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \\ (4.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 3 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda, \; \lambda, 1 - 2\lambda)$. Son cuatro planos con una recta en común.

3. Una compañía tiene tres camiones (P, Q y R), en los que caben exactamente un cierto número de contenedores de tres tipos (A, B y C), de acuerdo con la siguiente tabla:

	A	B	C
P	5	3	4
Q	2	5	5
R	4	3	6

Si se han de transportar 45 contenedores del tipo A, 44 del tipo B y 58 del tipo C, ¿cuántos viajes ha de hacer cada camión si todos los viajes los efectúan totalmente llenos?

Sean x, y, z el número de viajes que hacen los camiones P, Q y R, respectivamente.

$$\begin{cases} 5x + 2y + 4z = 45 \\ 3x + 5y + 3z = 44 \\ 4x + 5y + 6z = 58 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 3 & 5 & 3 & 44 \\ 4 & 5 & 6 & 58 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ 5 \cdot (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ 5 \cdot (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 0 & 19 & 3 & 85 \\ 0 & 17 & 14 & 110 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 19 \cdot (3.^a) - 17 \cdot (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 0 & 19 & 3 & 85 \\ 0 & 0 & 215 & 645 \end{array}\right) \to \begin{cases} 5x + 2y + 4z = 45 \\ \quad 19y + 3z = 85 \\ \quad\quad 215z = 645 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema escalonado:

$z = 3$

$$y = \frac{85 - 3z}{19} = \frac{85 - 9}{19} = 4$$

$$x = \frac{45 - 2y - 4z}{5} = \frac{45 - 8 - 12}{5} = 5$$

Por tanto, el camión P debe hacer 5 viajes, el camión Q debe hacer 4 viajes y el camión R debe hacer 3 viajes.

4. **Sean las ecuaciones:** $\begin{cases} \mathbf{3x - 2y + z = 5} \\ \mathbf{2x - 3y + z = -4} \end{cases}$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido.

a) Para que sea *incompatible*, la ecuación que añadamos ha de ser de la forma:

$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k$ con $k \neq 5a - 4b$.

Si tomamos, por ejemplo, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$3x - 2y + z = 1$

Añadiendo esta ecuación, el sistema sería *incompatible*.

b) Por ejemplo, añadiendo $y = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ y \quad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x \quad + z = 5 \\ 2x \quad + z = -4 \\ y \quad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x = 9 \\ y = 0 \\ z = -22 \end{array}\right\}$$ *Compatible determinado.*

5. **Se considera el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 3z = 1} \\ \boldsymbol{x + ay + 3z = 2} \\ \boldsymbol{2x + (2 + a)y + 6z = 3} \end{cases}$$

a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible.

b) Discute si existe algún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Resuelve el sistema para $a = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2+a)y + 6z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Si $a = 2$, la 2.ª ecuación no tiene solución: $0y = 1$. El sistema es *incompatible.*

b) No existe ningún valor de a para el cual el sistema sea *compatible determinado*, porque la 3.ª ecuación se puede suprimir $(0x + 0y + 0z = 0)$ y el sistema queda con dos ecuaciones y tres incógnitas.

c) Si $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \quad \rightarrow \quad x = 2 - 3z \\ z = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $\left(2 - 3\lambda, -\dfrac{1}{2}, \lambda\right)$

6. **Discute este sistema según los valores de a. Interprétalo geométricamente:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + y + z - 4 = 0} \\ \boldsymbol{x + y + z + 1 = 0} \\ \boldsymbol{x - ay + z - 1 = 0} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ x - ay + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

  Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

  Los dos últimos planos son paralelos y el primero los corta.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.

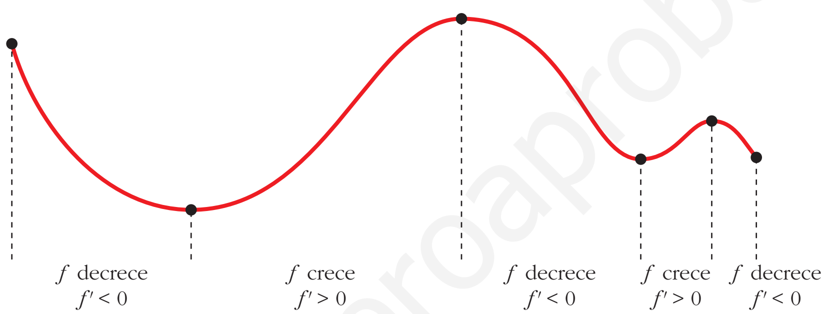
10 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Página 281

REFLEXIONA Y RESUELVE

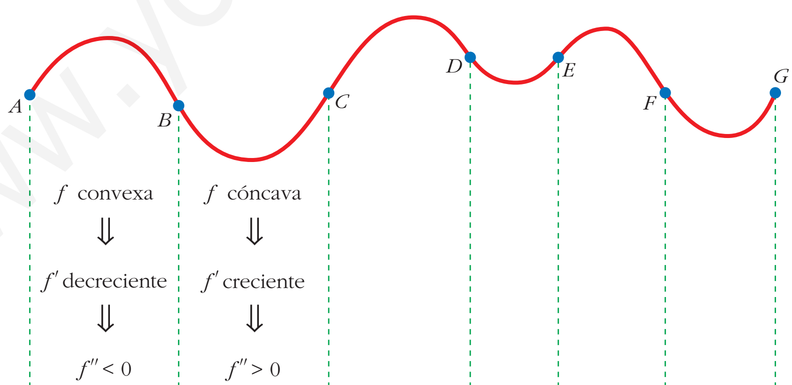
Relación del crecimiento con el signo de la primera derivada

■ **Analiza la curva siguiente:**



Relación de la curvatura con el signo de la segunda derivada

■ **Describe el tramo *CD* y los tramos *DE*, *EF* y *FG* siguientes:**



$CD \to f$ convexa $\to f'$ decreciente $\to f'' < 0$

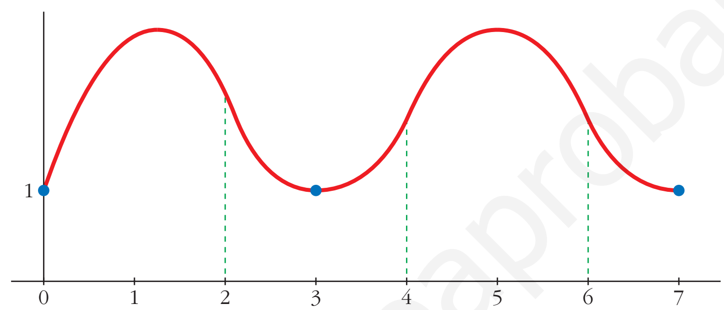
$DE \to f$ cóncava $\to f'$ creciente $\to f'' > 0$

$EF \to f$ convexa $\to f'$ decreciente $\to f'' < 0$

$FG \to f$ cóncava $\to f'$ creciente $\to f'' > 0$

■ **Dibuja la gráfica de una función, *f*, que cumpla las siguientes condiciones:**

- **La función está definida en [0, 7].**
- **Solo toma valores positivos.**
- **Pasa por los puntos (0, 1), (3, 1) y (7, 1).**
- **En el intervalo (1, 2), la función es convexa.**
- **En el intervalo (2, 4), $f'' > 0$.**
- **En el intervalo (4, 6), f' es decreciente.**
- **En el intervalo (6, 7), f es cóncava.**



Página 282

1. Halla las rectas tangentes a la curva:

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en los puntos de abscisas 0, 1, 3.

Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenadas de los puntos:

$y(0) = 0; \quad y(1) = 4; \quad y(3) = 150$

- **Recta tangente en (0, 0):** $y'(0) = 8$

  $y = 8x$

- **Recta tangente en (1, 4):** $y'(1) = -9$

  $y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$

- **Recta tangente en (3, 150):** $y'(3) = 11$

  $y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$

2. **Halla las rectas tangentes a la circunferencia:**

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$$

en los puntos de abscisa $x_0 = 3$.

Obtención de las ordenadas correspondientes:

$$3^2 + y^2 - 2 \cdot 3 + 4y - 24 = 0$$

$$9 + y^2 - 6 + 4y - 24 = 0$$

$$y^2 + 4y - 21 = 0$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} y = 3 \;\rightarrow\; \text{Punto } (3, 3) \\ y = -7 \;\rightarrow\; \text{Punto } (3, -7) \end{cases}$$

Para hallar la pendiente en esos puntos, derivamos implícitamente:

$$2x + 2yy' - 2 + 4y' = 0$$

$$y'(2y + 4) = 2 - 2x$$

$$y' = \frac{2 - 2x}{2y + 4} = \frac{1 - x}{y + 2}$$

Así: $y'(3, 3) = -\frac{2}{5}$; $y'(3, -7) = \frac{2}{5}$

- **Recta tangente en (3, 3):** $y = 3 - \frac{2}{5}(x - 3) = -\frac{2}{5}x + \frac{21}{5}$
- **Recta tangente en (3, –7):** $y = -7 + \frac{2}{5}(x - 3) = \frac{2}{5}x - \frac{41}{5}$

Página 283

1. **Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, averigua:**

a) Dónde crece. **b) Dónde decrece.**

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \;\rightarrow\; y' > 0 \;\rightarrow\; f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \;\rightarrow\; y' > 0 \;\rightarrow\; f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \;\rightarrow\; y' < 0 \;\rightarrow\; f$ es decreciente en $(-1, 3)$

Página 285

2. **Comprueba que la función $y = x^3/(x - 2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.**

Averigua de qué tipo es cada uno de esos dos puntos singulares; para ello, debes estudiar el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2)-2x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \quad \to \quad x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\}$ En $x = 0$ hay un punto de inflexión.

$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\}$ En $x = 6$ hay un mínimo relativo.

3. a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.

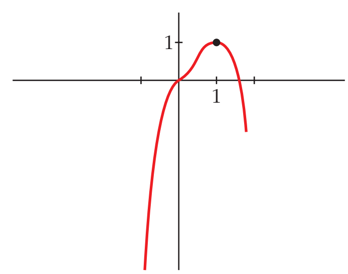
b) Ídem para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x + 1)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \to \quad \text{Punto } (0, 0) \\ x = 1 \quad \to \quad \text{Punto } (1, 1) \end{cases} \Bigg\} \text{ Dos puntos singulares.}$$

Los dos puntos están en el intervalo $[-1; 1{,}5]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-1) = -7$ y $f(1{,}5) = -1{,}7$.



- En $(0, 0)$ hay un punto de inflexión.
- En $(1, 1)$ hay un máximo relativo.

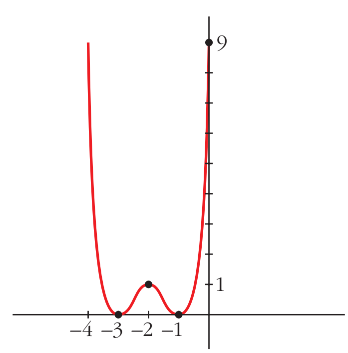
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = -1 \quad \to \quad \text{Punto } (-1, 0) \\ x = -2 \quad \to \quad \text{Punto } (-2, 1) \\ x = -3 \quad \to \quad \text{Punto } (-3, 0) \end{cases} \Bigg\} \text{ Tres puntos singulares.}$$

Los tres puntos están en el mismo intervalo $[-4, 0]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un mínimo relativo en $(-3, 0)$, un máximo relativo en $(-2, 1)$ y un mínimo relativo en $(-1, 0)$.



Página 287

1. **Estudia la curvatura de esta función:**

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2; \quad f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \;\to\; 12x(3x - 4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \;\to\; \text{Punto } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \;\to\; \text{Punto } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48; \; f'''(0) \neq 0; \; f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2. **Estudia la curvatura de la función siguiente:**

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9; \quad f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \;\to\; 6x - 12 = 0 \;\to\; x = 2 \;\to\;$ Punto $(2, 2)$

$(f'''(x) = 6; \; f'''(2) \neq 0)$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función es convexa en $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función es cóncava en $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

Página 289

1. **Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.**

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

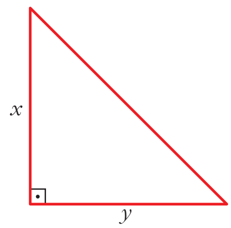
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \quad \begin{cases} x = 5 \;\to\; f(5) = 10 \\ x = -5 \;\; (\text{no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; hay un mínimo en $x = 5$).

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2. **De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.**



$$x + y = 10 \quad \rightarrow \quad y = 10 - x$$

$$\textit{Área} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

Tenemos que maximizar la función:

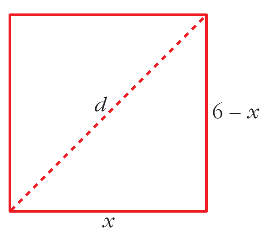
$$f(x) = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5 \quad \rightarrow \quad y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\ f(10) = 0;\ f(5) = \frac{25}{2};\ \text{y } f \text{ es continua. Luego en } x = 5 \text{ está el máximo} \right).$

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3. **Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?**



$$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

Tenemos que minimizar la función:

$$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

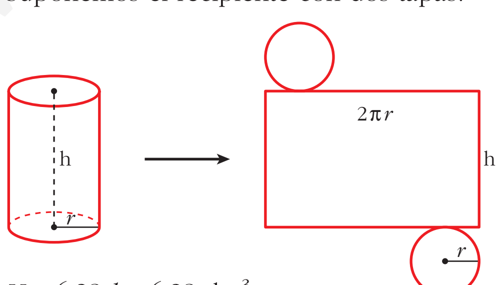
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -6 + 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24$; y $f(x)$ es continua. Luego en $x = 3$ hay un mínimo).

El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

4. **Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.**

Suponemos el recipiente con dos tapas:



$$\textit{Área total} = 2\pi r\mathrm{h} + 2\pi r^2 = 2\pi r(\mathrm{h} + r)$$

$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$

Como $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot h = 6{,}28 \quad \to \quad h = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2}$

Así: $\text{Área total} = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = 2\pi\left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \quad \to \quad -2 + 2r^3 = 0 \quad \to \quad r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim\limits_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$$r = 1 \quad \to \quad h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$$

El cilindro tendrá radio 1 dm y altura 2 dm.

Página 290

1. Calcula, aplicando L'Hôpital:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x\,(1 + \cos x)}{x \cos x}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{x \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x(1 + \cos x) + \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos x + x(-\operatorname{sen} x)} = 2$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

2. Calcula:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{-e^{-x} + 1}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{6x + 4}{6x + 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Página 291

3. **Aplica L'Hôpital:**

$$\lim_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$$

Para poner $\lim_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$ en forma de cociente, tomamos logaritmos en $f(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\ln[f(x)]\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \ln(\cos x + \operatorname{sen} x)\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(-\operatorname{sen} x + \cos x)/(\cos x + \operatorname{sen} x)}{1} = 1 \to \lim_{x \to 0} f(x) = e^1 = e$$

4. **Calcula:**

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})x$$

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2^{1/x}}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2^{1/x} \cdot (-1/x^2) \cdot \ln 2}{(-1/x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-2^{1/x} \cdot \ln 2) = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$$

Página 293

1. **a) Explica por qué $y = \operatorname{sen} x$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, \pi]$.**

b) ¿En qué punto se verifica la tesis del teorema de Rolle?

a) $y = \operatorname{sen} x$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$.

Además, $f(0) = f(\pi) = 0$. Por tanto, cumple las hipótesis del teorema de Rolle.

b) $\left.\begin{array}{l} y' = \cos x = 0 \\ x \in (0, \pi) \end{array}\right\} \to x = \dfrac{\pi}{2}$

2. **Demuestra que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿En qué punto cumple la tesis?**

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4} (2x - 3) = 5 \\ \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4} (-x^2 + 10x - 19) = 5 \\ f(4) = 5 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 4.$$

Luego $f(x)$ es continua en el intervalo $[2, 6]$. (Para $x \neq 4$ está formada por dos polinomios).

Veamos si es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

En $x = 4$, tenemos que $f'(4^-) = f'(4^+) = 2$. Por tanto, la función es derivable en $(2, 6)$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Luego, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$f'(c) = 1 \;\rightarrow\; -2x + 10 = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{9}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{9}{2}$.

3. **Aplica el teorema del valor medio, si es posible, a la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x + 2 \;\; \text{en } [-2, -1]}$$

Calcula el valor correspondiente a c.

$f(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. En particular, es continua en $[-2, -1]$ y derivable en $(-2, -1)$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{6 - 12}{-1 + 2} = -6$$

$$f'(x) = 2x - 3 = -6 \;\rightarrow\; x = \frac{-3}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{-3}{2}$.

4. **Repite el ejercicio anterior para la función:**

$$\boldsymbol{g(x) = x^3 - x^2 - x + 1}$$

$g(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. En particular, es continua en $[-2, -1]$ y derivable en $(-2, -1)$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{0 - (-9)}{-1 + 2} = 9$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 9 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 2x - 10 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 120}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{124}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{31}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{3} \begin{cases} x \approx 2{,}19 \\ x \approx -1{,}52 \end{cases}$$

Por tanto, se cumple la tesis en $c = \dfrac{1 - \sqrt{31}}{3}$.

5. Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$ cualquiera que sea el valor de b. (Hazlo por reducción al absurdo: empieza suponiendo que hay dos raíces en ese intervalo).

- $f(x) = x^3 - 3x + b$ es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$.

  $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

  La derivada solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$.

- Supongamos que $f(x)$ tiene dos raíces en $[-1, 1]$, sean c_1 y c_2. Por el teorema de Rolle, como $f(c_1) = f(c_2) = 0$, existiría un $c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

  Pero $f'(x)$ solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$, que no están incluidos en (c_1, c_2), pues $-1 \le c_1, c_2 \le 1$.

  Hemos llegado a una contradicción.

- Por tanto, $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera que sea el valor de b.

6. Calcula p, m y n para que

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ mx + n & \text{si } \ 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 5]$. ¿Dónde cumple la tesis? Represéntala.

- Si $x \neq 3$, la función es continua, pues está formada por polinomios. Su dominio es $[-1, 5]$.

- En $x = 3$, para que sea continua, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + px) = -9 + 3p \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (mx + n) = 3m + n \\ f(3) = 3m + n = -9 + 3p \end{array}\right\} \quad -9 + 3p = 3m + n$$

- Si $x \in (-1, 5)$ y $x \neq 3$, su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + p & \text{si } -1 < x < 3 \\ m & \text{si } 3 < x < 5 \end{cases}$$

- Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 3$, ha de ser:

$$\left.\begin{aligned} f'(3^-) &= -6 + p \\ f'(3^+) &= m \end{aligned}\right\} \; 6 + p = m$$

- Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle, además, debe tenerse que $f(-1) = f(5)$; es decir:

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= -1 - p \\ f(5) &= 5m + n \end{aligned}\right\} \; -1 - p = 5m + n$$

- Uniendo las tres condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} -9 + 3p &= 3m + n \\ -6 + \;\; p &= m \\ -1 - \;\; p &= 5m + n \end{aligned}\right\} \; m = -\frac{8}{3}; \;\; n = 9; \;\; p = \frac{10}{3}$$

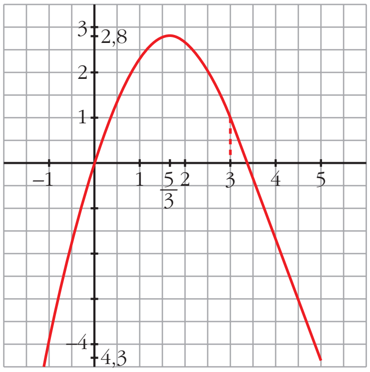
- Con estos valores:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + \dfrac{10}{3} & \text{si } -1 < x < 3 \\ -\dfrac{8}{3} & \text{si } 3 \le x < 5 \end{cases}$$

$$-2x + \frac{10}{3} = 0 \;\; \to \;\; x = \frac{5}{3} \in (-1, 5)$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{5}{3}$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \dfrac{10}{3}x & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ -\dfrac{8}{3}x + 9 & \text{si } 3 \le x \le 5 \end{cases}$$



Página 297

1. Demuestra que: "Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) < 0$ para $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$".

Si tomamos dos puntos cualesquiera $x_1 < x_2$ de $[a, b]$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$ y, por tanto, su tesis:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0$$

Se deduce que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ y, por tanto, $f(x_2) < f(x_1)$.

La función es, pues, decreciente en $[a, b]$.

2. Demuestra que: "Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f presenta un máximo en x_0".

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} < 0$$

Si $h < 0$, entonces:

$f'(x_0 + h) > 0 \rightarrow f$ es creciente a la izquierda de x_0 (1)

Si $h > 0$, entonces:

$f'(x_0 + h) < 0 \rightarrow f$ es decreciente a la derecha de x_0 (2)

Por (1) y (2), f presenta un máximo en x_0, ya que es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a su derecha.

Página 304

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Recta tangente

1 **Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:**

a) $y = \ln(tg\ 2x)$ **en** $x = \frac{\pi}{8}$ **b)** $y = \sqrt{sen\ 5x}$ **en** $x = \frac{\pi}{6}$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ **en** $x = 2$ **d)** $y = (x^2 + 1)^{sen\ x}$ **en** $x = 0$

a) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{8} \rightarrow y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{2(1 + tg^2\ 2x)}{tg\ 2x} \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4$

• Recta tangente: $y = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 4x - \frac{\pi}{2}$

b) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Pendiente de la recta:

$$y' = \frac{5\ cos\ 5x}{2\sqrt{sen\ 5x}} \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5(-\sqrt{3}/2)}{2\sqrt{2}/2} = \frac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{6}}{4}$$

• Recta tangente: $y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) • Ordenadas en los puntos:

$$4 + y^2 - 4 - 8y + 15 = 0 \rightarrow y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{4} = \frac{8 \pm 2}{2} \begin{cases} y = 5 \rightarrow \text{Punto } (2, 5) \\ y = 3 \rightarrow \text{Punto } (2, 3) \end{cases}$$

• Pendiente de las rectas:

$$2x + 2yy' - 2 - 8y' = 0$$

$$y'(2y - 8) = 2 - 2x \rightarrow y' = \frac{2 - 2x}{2y - 8} = \frac{1 - x}{y - 4}$$

$$y'(2, 5) = \frac{1 - 2}{5 - 4} = -1$$

$$y'(2, 3) = \frac{1 - 2}{3 - 4} = 1$$

- Recta tangente en (2, 5): $y = 5 - 1 \cdot (x - 2) \;\rightarrow\; y = -x + 7$
- Recta tangente en (2, 3): $y = 3 + 1 \cdot (x - 2) \;\rightarrow\; y = x + 1$

d) • Ordenada en el punto: $x = 0 \;\rightarrow\; y = (0 + 1)^{sen\ 0} = 1^0 = 1 \;\rightarrow\; P(0, 1)$

- Pendiente de la recta tangente:

$$y = (x^2 + 1)^{sen\ x} \;\rightarrow\; ln\ y = sen\ x \cdot ln\ (x^2 + 1) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{y'}{y} = cos\ x\ ln\ (x^2 + 1) + sen\ x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; y' = \left[cos\ x\ ln\ (x^2 + 1) + \frac{2x\ sen\ x}{x^2 + 1}\right] (x^2 + 1)^{sen\ x}$$

$m = [cos\ 0 \cdot ln\ 1 + 0] \cdot 1^0 = (1 \cdot 0 + 0) \cdot 1 = 0$

- Recta tangente: $y = 1 + 0(x - 0) \;\rightarrow\; y = 1$

s2 Halla las tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x - 1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x - 1) - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \;\rightarrow\; \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = -2 \;\rightarrow\; -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \;\rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2, 4) \end{cases}$$

Recta tangente en (0, 0): $y = -2x$

Recta tangente en (2, 4): $y = 4 - 2(x - 2) \;\rightarrow\; y = -2x + 8$

3 Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:

a) $y = x\ ln\ x$ **b)** $y = x^2 e^x$ **c)** $y = sen\ 2x$

Una recta paralela al eje de abscisas tiene pendiente cero.

a) $y' = ln\ x + x \cdot \dfrac{1}{x} = ln\ x + 1$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; ln\ x + 1 = 0 \;\rightarrow\; ln\ x = -1 \;\rightarrow\; x = e^{-1} = \frac{1}{e} \;\rightarrow\; y = \frac{-1}{e}$$

La recta tangente en el punto $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{e}\right)$ es: $y = \dfrac{-1}{e}$

b) $y' = 2x\, e^x + x^2\, e^x = (2x + x^2)e^x$. Como $e^x \neq 0$ para todo x:

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2x + x^2 = 0 \;\rightarrow\; x(2 + x) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punto $(0, 0)$, la recta tangente es: $y = 0$
- En el punto $\left(-2, \dfrac{4}{e^2}\right)$, la recta tangente es: $y = \dfrac{4}{e^2}$

c) $y' = 2\cos 2x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2\cos 2x = 0 \;\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \;\rightarrow\; y = 1 \\ 2x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k \;\rightarrow\; y = -1 \end{cases}$$

- En los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k, 1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = 1$
- En los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = -1$

4 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^y \cdot y^x = 1$ en el punto (1, 1).**

Para hallar la derivada, tomamos logaritmos:

$$x^y \cdot y^x = 1 \;\rightarrow\; y \ln x + x \ln y = \ln 1 \;\rightarrow\; y \ln x + x \ln y = 0$$

Derivamos:

$$y' \ln x + y \cdot \frac{1}{x} + \ln y + x \cdot \frac{y'}{y} = 0$$

$$y' xy \ln x + y^2 + xy \ln y + x^2 y' = 0$$

$$y'(xy \ln x + x^2) = -y^2 - xy \ln y$$

$$y' = \frac{-y^2 - xy \ln y}{xy \ln x + x^2}$$

$$y'(1, 1) = -1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es:

$$y = 1 - (x - 1); \text{ es decir, } y = -x + 2$$

5 **Halla el punto de la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el que la tangente forma un ángulo de 60° con el eje X. Escribe la ecuación de esa tangente.**

- Si la recta tangente forma un ángulo de 60° con el eje X, su pendiente es $tg\ 60° = \sqrt{3}$.

- Buscamos un punto en el que la derivada valga $\sqrt{3}$:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \sqrt{3} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} \rightarrow 1 = 3x \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El punto es $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

- La recta tangente en ese punto será:

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

s6 Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $y = \dfrac{x^3(3x - 8)}{12}$

c) $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$

e) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

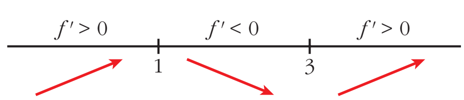
f) $y = e^x(x - 1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



Hay un mínimo en $(3, 0)$ y un máximo en $(1, 4)$.

Puntos de inflexión:

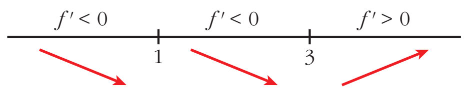
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 2$$

Como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2$, el punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

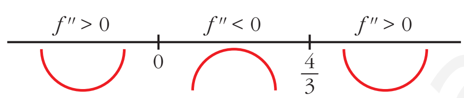
$f'(x) = \dfrac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x - 2) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 2 \;\rightarrow\; y = -4/3 \end{cases}$



Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

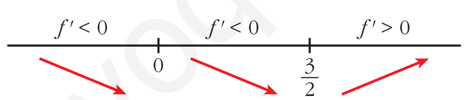
$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x(3x - 4) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 4/3 \;\rightarrow\; y = -(64/81) \end{cases}$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

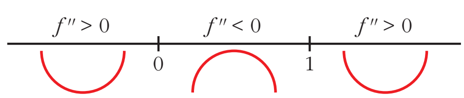
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(4x - 6) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 3/2 \;\rightarrow\; y = -27/16 \end{cases}$



Hay un mínimo en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

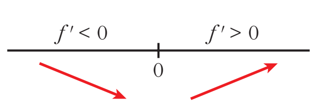
$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = -1 \end{cases}$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2 + 1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$



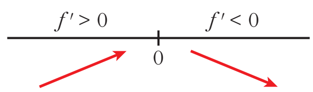
Hay un mínimo en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

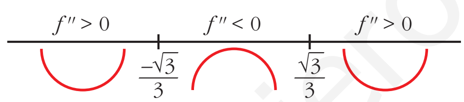
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

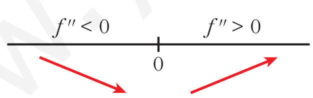
$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

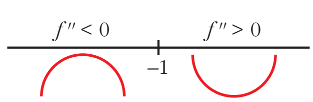
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x) $\rightarrow\; y = -1$



Hay un mínimo en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \dfrac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \dfrac{-2}{e}\right)$.

s7 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

d) $y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ **e)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

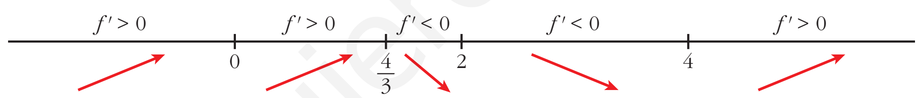
$$f'(x) = \frac{-3(x^2-2x)-(8-3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+6x-16x+16+6x^2-6x}{(x^2-2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2-16x+16}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2-16x+16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$.

tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$.

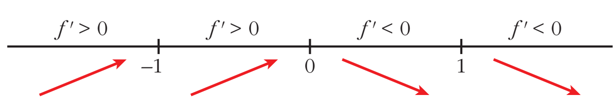
tiene un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

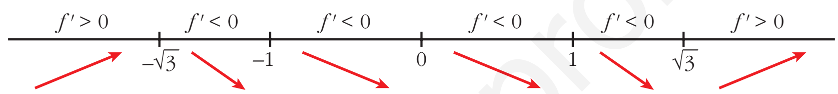
tiene un máximo en $(0, -1)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 3) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

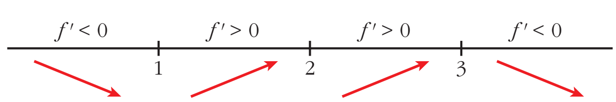
$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \;\begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$.

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(1, -1)$.

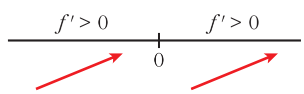
tiene un máximo en $(3, -9)$.

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2xx - (x^2 - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \;\;\to\;\; \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0$. No tiene solución.

Signo de la derivada:



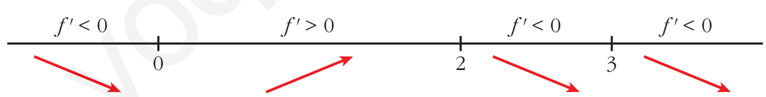
La función es creciente en todo su dominio.

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x - 3)^2} = \frac{-8x(3x - 6)}{x^4(x - 3)^2} = \frac{-8(3x - 6)}{x^3(x - 3)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\;\to\;\; 3x - 6 = 0 \;\;\to\;\; x = 2$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(0, 2)$.

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un máximo en $(2, -2)$.

s8 **Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x - 2)^4$

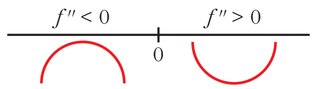
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$ **f)** $y = ln(x + 1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\;\to\;\; 6x = 0 \;\;\to\;\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, 0)$.

es cóncava en $(0, +\infty)$.

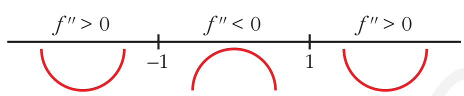
tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$.

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12(x^2 - 1) = 0 \;\left\langle\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Signo de $f''(x)$:



La función: es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

es convexa en $(-1, 1)$.

tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$.

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

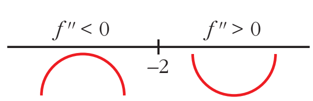
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\,e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -2$ ($e^x \neq 0$ para todo x)

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -2)$.

es cóncava en $(-2, +\infty)$.

tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$.

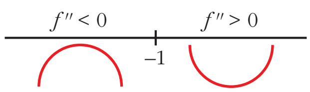
e) $y = \dfrac{2-x}{x+1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x+1) - (2-x)}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-2+x}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -1)$.

es cóncava en $(-1, +\infty)$.

no tiene puntos de inflexión.

f) $y = ln(x+1)$. *Dominio* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

9 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x-1)^3$

b) $y = 2 + (x-1)^4$

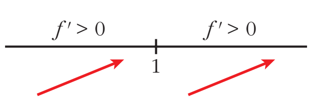
c) $y = 3 - (x-1)^6$

d) $y = -3 + 2(x-1)^5$

a) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3(x-1)^2 \rightarrow 3(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiamos el signo de la derivada:



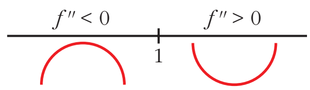
La función crece a la izquierda y a la derecha de $x = 1$.

No hay ni un máximo ni un mínimo.

- Puntos de inflexión: buscamos los puntos en los que $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 6(x-1) \rightarrow 6(x-1) = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiamos el signo de $f''(x)$:



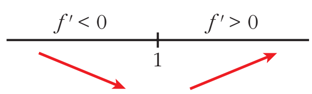
Es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en (1, 1).

b) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 4(x-1)^3 \rightarrow 4(x-1)^3 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 2$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a su derecha.

Hay un mínimo en (1, 2).

- Podemos comprobar que no hay puntos de inflexión con el signo de $f''(x)$:

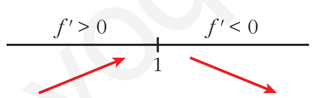
$f''(x) = 12(x-1)^2 \rightarrow f''(x) \ge 0$ para cualquier x.

La función es cóncava en todo su dominio.

c) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = -6(x-1)^5 \rightarrow -6(x-1)^5 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 3$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función crece a la izquierda de $x = 1$ y decrece a su derecha.

Hay un máximo en (1, 3).

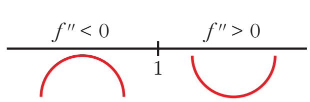
- Como $f''(x) = -30(x-1)^4 \le 0$, la función es convexa en todo su dominio.

d) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 10(x-1)^4 \rightarrow 10(x-1)^4 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = -3$

Como $f'(x) = 10(x-1)^4 \ge 0$, la función es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos.

- Estudiamos el signo de $f''(x) = 40(x-1)^3$



La función es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en (1, –3).

Problemas de optimización

10 **Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.**

Llamamos x e y a los números que buscamos.

$$x + y = 10 \;\rightarrow\; y = 10 - x$$

Producto de sus cuadrados:

$$P = x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot (10 - x)^2 = x^2(100 + x^2 - 20x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2, \text{ con } 0 < x < 10.$$

Tenemos que maximizar la función:

$$P = x^4 - 20x^3 + 100x^2, \quad 0 < x < 10$$

$$P'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x; \quad 4x^3 - 60x^2 + 200x = 0 \;\rightarrow$$

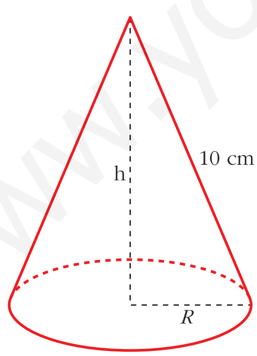
$$\rightarrow\; 4x(x^2 - 15x + 50) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \text{ no vale, pues } 0 < x < 10 \\ x = 5 \;\rightarrow\; y = 10 - 5 = 5 \\ x = 10 \text{ no vale, pues } 0 < x < 10 \end{cases}$$

($f(0) = 0$; $f(10) = 0$; $f(5) = 625$; y f es continua. Luego en $x = 5$ está el máximo).

Los dos números son el 5. El producto de sus cuadrados es 625.

11 **Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**

☛ $\boldsymbol{V = \dfrac{\pi}{3} R^2 h}$



$$h^2 + R^2 = 100 \;\rightarrow\; R^2 = 100 - h^2$$

$$Volumen = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \;\rightarrow\; 100 - 3h^2 = 0 \;\rightarrow\; h = \pm\sqrt{\frac{100}{3}}$$

(consideramos la raíz positiva, pues $h \geq 0$).

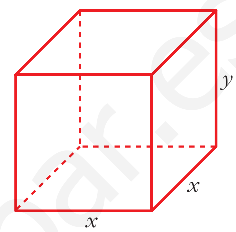
$\left(f'(h) > 0 \right.$ a la izquierda de $h = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ y $f'(h) < 0$ a la derecha de $h = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$.

Luego en $h = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ hay un máximo$\left. \right)$.

Por tanto, el radio de la base será:

$$R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{200}{3}}$$

s12 **Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm³. Averigua las dimensiones de la caja para que su superficie exterior sea mínima.**



$$\textit{Volumen} = x^2y = 8 \text{ dm}^3 \quad \rightarrow \quad y = \frac{8}{x^2}$$

$$\textit{Superficie} = 4xy + 2x^2 = 4x\frac{8}{x^2} + 2x^2 = \frac{32}{x} + 2x^2$$

Tenemos que hallar el mínimo de la función superficie:

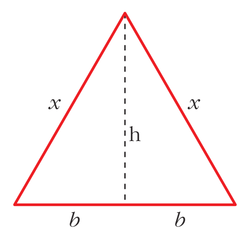
$$f(x) = \frac{32}{x} + 2x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{-32}{x^2} + 4x = \frac{-32 + 4x^3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -32 + 4x^3 = 0 \quad \rightarrow \quad x^3 = 8 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

(En $x = 2$ hay un mínimo, pues $f'(x) < 0$ para $x < 2$ y $f'(x) > 0$ para $x > 2$).

Por tanto, la caja ha de ser un cubo de lado 2 dm.

s13 **Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?**



☛ ***Llama 2b a la base del triángulo.***

Llamemos $2b$ a la base:

$$\textit{Perímetro} = 2x + 2b = 30 \quad \rightarrow \quad x + b = 15 \quad \rightarrow \quad b = 15 - x$$

$$\textit{Altura} = h = \sqrt{x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - (15 - x)^2} = \sqrt{30x - 225}$$

$$\textit{Área} = \frac{2b \cdot h}{2} = (15 - x)\sqrt{30x - 225} = \sqrt{(15 - x)^2(30x - 225)} =$$

$$= \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

Tenemos que maximizar la función área:

$$f(x) = \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

$$f'(x) = \frac{90x^2 - 2\,250x + 13\,500}{2\sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 90x^2 - 2\,250x + 13\,500 = 0$$

$$90(x^2 - 25x + 150) = 0$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

$$= \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \quad (\text{no vale}) \\ x = 10 \quad \rightarrow \quad b = 15 - 10 = 5 \quad \rightarrow \quad 2b = 10 \end{cases}$$

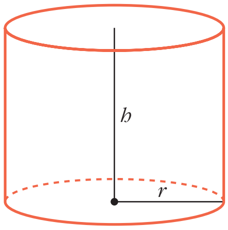
($x = 15$ no vale, pues quedaría $b = 0$, al ser perímetro = 30)

($f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 10$. Por tanto, en $x = 10$ hay un máximo).

Luego, el triángulo de área máxima es el equilátero de lado 10 cm, cuya área es $25\sqrt{3} \approx 43,3$ cm^2.

s14 Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.

☛ $A_T = 2\pi R h + 2\pi R^2;\ V = \pi R^2 h$



Área total $= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 54$ cm^2

$$h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$\textit{Volumen} = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$$

Tenemos que maximizar la función $V(r) = 27r - \pi r^3$:

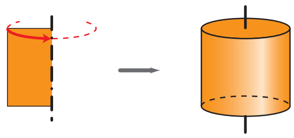
$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$$

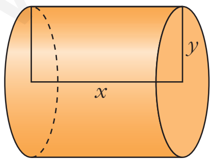
$$V'(r) = 0 \ \to\ 27 - 3\pi r^2 = 0 \ \to\ r^2 = \frac{27}{3\pi} = \frac{9}{\pi} \ \to\ r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

(En $r = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$ hay un mínimo, pues $V'(r) < 0$ a la izquierda de este valor y $V'(r) > 0$ a su derecha).

Para $r = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}} \ \to\ h = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$, dimensiones del cilindro de volumen máximo.

15 Halla la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar la vuelta completa alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.





Perímetro cartulina $= 2x + 2y = 60 \ \to\ x + y = 30 \ \to$

$\to\ x = 30 - y$

Volumen $= \pi y^2 x = \pi y^2 (30 - y) = \pi(30y^2 - y^3)$

Tenemos que maximizar la función:

$$V(y) = \pi(30y^2 - y^3)$$

$$V'(y) = \pi(60y - 3y^2)$$

$$V'(y) = 60y - 3y^2 = 0 \ \to\ 3y(20 - y) = 0 \ \begin{cases} y = 0 \ \text{(no vale)} \\ y = 20 \ \to\ x = 10 \end{cases}$$

(En $y = 20$ hay un máximo, pues $V'(y) > 0$ a la izquierda de este valor y $V'(y) < 0$ a su derecha).

Los lados de la cartulina medirán 20 cm y 10 cm.

Página 305

Regla de L'Hôpital

s16 **Calcula, utilizando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites, que son del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^x + x^3)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{1 - \cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{arctg } x - x}{x - \text{sen } x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\text{sen } x}}{1 - \cos x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{\sqrt[4]{x^3}}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x}\right)$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{e^x - 1}$

l) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\text{tg } x - 8}{\sec x + 10}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2}{2x - 3} = \dfrac{3}{-5} = -\dfrac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^x + x^3)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{\text{sen } x} = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{\text{sen } x} = +\infty$$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{arctg } x - x}{x - \text{sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}}{\text{sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}}{\cos x} = -2$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{sen\, x}}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{sen\, x} \cdot \cos x}{sen\, x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{sen\, x} \cos^2 x + e^{sen\, x} sen\, x}{\cos x} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{-3\, sen\, 3x}{\cos 3x}}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-3\, tg\, 3x}{2x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-9(1 + tg^2\, 3x)}{2} = -\dfrac{9}{2}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1 + x}}{\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\sqrt[4]{x}}{3(1 + x)} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos(2x)\, sen\,(2x) \cdot 2}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\, sen\, 4x}{6x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, 4x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\cos 4x}{3} = \dfrac{4}{3}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - sen\, x}{x\, sen\, x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{sen\, x + x\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{\cos x + \cos x - x\, sen\, x} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{e^x} = 0$

l) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{tg\, x - 8}{\sec x + 10} = \lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{sen\, x}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1}{sen\, x} = 1$

Coeficientes de una función

17 **Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que la función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.**

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = 0 \;\to\; 12a + 18b - 6 = 0 \\ f''(1/2) = 0 \;\to\; 3a + 9b - 6 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2a + 3b - 1 = 0 \\ a + 3b - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Restando las igualdades: $a + 1 = 0 \;\to\; a = -1$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $3b - 3 = 0 \;\to\; b = 1$

s18 **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Halla a, b, c y d.**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \to & a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 2 & \to & c = 2 \\ f'(1) = 0 & \to & 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 & \to & 12a + 4b + c = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a + b + d = -2 \\ c = 2 \\ 3a + 2b = -2 \\ 6a + 2b = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{-3}{2} \\ c = 2 \\ d = \dfrac{-5}{6} \end{array}$$

Así: $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - \dfrac{5}{6}$; $\quad f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$

19 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por $(1, 1)$ y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Halla a y b.**

$f(x) = ax^3 + bx$; $\quad f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \to & a + b = 1 \\ f'(1) = -3 & \to & 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

s20 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en $(2, 1)$. Calcula a, b y c.**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(-1) = 0 & \to & -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 & \to & 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 & \to & 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

21 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

☛ ***Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber una inflexión en $x = 1$.***

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \rightarrow & 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 & \rightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 & \rightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

s22 Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.

Si la curva tiene un punto de inflexión en $x = 1$, debe ser $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a \rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 + 2a \rightarrow 6 + 2a = 0$

Si en $x = 1$ la tangente es horizontal, su pendiente será 0; y, por tanto, $f'(1) = 0$.

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 3 + 2a + b = 0$

Resolvemos: $\begin{cases} 6 + 2a = 0 \rightarrow a = -3 \\ 3 + 2a + b = 0 \rightarrow b = -3 - 2(-3) = 3 \end{cases}$

La curva será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$.

PARA RESOLVER

23 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{x}$ en el punto $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.

Comprueba que el segmento de esa recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$; $f'(3) = \dfrac{-1}{9}$

- Ecuación de la recta tangente en $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$:

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x - 3)$$

- Puntos de corte de la recta tangente con los ejes coordenados:

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{2}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

$$y = 0 \rightarrow x = 6 \rightarrow \text{Punto } (6, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} dist\left[\left(3, \frac{1}{3}\right), \left(0, \frac{2}{3}\right)\right] = (3 - 0)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{82}}{3} \\ dist\left[\left(3, \frac{1}{3}\right), (6, 0)\right] = (6 - 3)^2 + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{82}}{3} \end{array}\right\} \text{La distancia es la misma.}$$

24 **Dada la parábola $y = 3x^2$, encuentra un punto en el que la recta tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos (0, 0) y (4, 48).**

- La cuerda que une los puntos $(0, 0)$ y $(4, 48)$ tiene pendiente:

$$m = \frac{48}{4} = 12$$

- Buscamos un punto de la función $y = 3x^2$ en el que la derivada valga 12:

$$f'(x) = 6x$$

$$f'(x) = 12 \ \rightarrow \ 6x = 12 \ \rightarrow \ x = 2$$

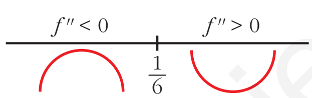
- El punto es $(2, 12)$.

s25 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.**

- Hallamos su punto de inflexión:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x; \quad f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 24x - 4 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{1}{6}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27}\right)$.

- Pendiente de la recta tangente en ese punto: $f'\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

26 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función dada por $y = |x^2 + 2x - 3|$.**

Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos donde $f(x) = 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos la derivada de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

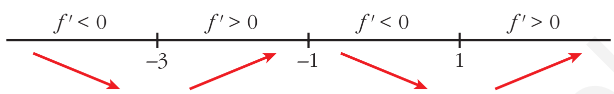
  $2x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

  Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$ y $f'(x) = -2x - 2$ para $-3 < x < 1$

  Por tanto, $f'(x)$ se anula en $x = -1 \rightarrow f(-1) = 4$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$.

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$.

  tiene un máximo en $(-1, 4)$.

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$. Son los puntos donde f no es derivable.

27 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.**

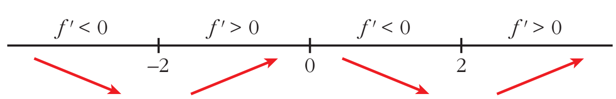
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.
- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en $(0, 4)$.

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\right)$.

- Tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \geq 0$ para todo x.

s28 **Halla el valor de c de modo que la función $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único extremo relativo. ¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + c) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + c)^2} = \frac{e^x(x^2 + c - 2x)}{(x^2 + c)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x + c = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2}$$

Para que solo haya un extremo relativo, ha de ser: $4 - 4c = 0 \;\rightarrow\; c = 1$

En este caso sería:

$$y = \frac{e^x}{x^2 + 1}; \quad f'(x) = \frac{e^x(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 1$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 1 \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente si $x \neq 1$.

Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

s29 **La curva $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ corta al eje de abscisas en $x = 1$ y tiene un punto de inflexión en (3, 2). Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje OX.**

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma; \quad f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta; \quad f''(x) = 6x + 2\alpha$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \rightarrow & 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ f(3) = 2 & \rightarrow & 27 + 9\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ f''(3) = 0 & \rightarrow & 18 + 2\alpha = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = -9 \\ \beta = 24 \\ \gamma = -16 \end{array}$$

Así: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16; \quad f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

- Puntos con tangente horizontal:

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} \begin{array}{l} \nearrow x = 4 \\ \searrow x = 2 \end{array}$$

- Los puntos son $(4, 0)$ y $(2, 4)$.

s30 **Halla los puntos de la curva $y = 3x^2 - 5x + 12$ en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas. Escribe las ecuaciones de dichas tangentes.**

☛ ***Mira el ejercicio resuelto 1.***

$y = 3x^2 - 5x + 12; \quad f'(x) = 6x - 5$

- La recta tangente en un punto $(a, f(a))$ es:

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$; es decir:

$y = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (x - a)$

- Para que pase por el origen de coordenadas, ha de ser:

$$0 = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (-a)$$

$$0 = 3a^2 - \cancel{5a} + 12 - 6a^2 + \cancel{5a}$$

$$3a^2 = 12 \quad \to \quad a^2 = 4 \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Hay dos puntos: $(-2, 34)$ y $(2, 14)$

- Recta tangente en $(-2, 34)$: $f'(-2) = -17$

$$y = 34 - 17(x + 2) \quad \to \quad y = -17x$$

- Recta tangente en $(2, 14)$: $f'(2) = 7$

$$y = 14 + 7(x - 2) \quad \to \quad y = 7x$$

31 **Halla los puntos de la curva $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en los que la recta tangente a esta pase por el punto (0, –8).**

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

La ecuación de la tangente en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Como $f(a) = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4$ y $f'(a) = \frac{1}{2}a + 4$, queda:

$$y = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(x - a)$$

Si la recta tangente pasa por $(0, -8)$:

$$-8 = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(-a)$$

$$-8 = \frac{1}{4}a^2 + \cancel{4a} - 4 - \frac{1}{2}a^2 - \cancel{4a}$$

$$-4 = -\frac{1}{4}a^2 \quad \to \quad -16 = -a^2 \quad \to \quad a^2 = 16 \begin{cases} a = -4 \\ a = 4 \end{cases}$$

- Hay dos puntos: $(-4, -16)$ y $(4, 16)$

- Recta tangente en $(-4, -16)$: $f'(-4) = 2$

$$y = -16 + 2(x + 4) \quad \to \quad y = 2x - 8$$

- Recta tangente en $(4, 16)$: $f'(4) = 6$

$$y = 16 + 6(x + 4) \quad \to \quad y = 6x - 8$$

Página 306

32 **Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa 2:**

$$f(x) = 2x - x^2 \qquad g(x) = x^2 - x - 2$$

☛ ***Recuerda que el ángulo de dos rectas se puede calcular así:*** $tg\ \alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$, ***donde*** m_1 ***y*** m_2 ***son las pendientes de las rectas.***

- La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es:

$$f'(x) = 2 - 2x \;\rightarrow\; f'(2) = -2$$

- La pendiente de la recta tangente a $g(x)$ en $x = 2$ es:

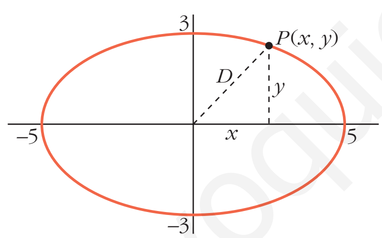
$$g'(x) = 2x - 1 \;\rightarrow\; g'(2) = 3$$

- El ángulo que forman las dos rectas será:

$$tg\ \alpha = \left|\frac{-2-3}{1-6}\right| = 1 \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

s33 **El punto $P(x, y)$ recorre la elipse de ecuación:** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto (0, 0) es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.



La distancia de P a $(0, 0)$ es:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como P es un punto de la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \;\rightarrow\; y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$$

Así, la distancia es:

$$D(x) = \sqrt{x^2 + 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)} = \sqrt{\frac{16x^2 + 225}{25}} = \frac{\sqrt{16x^2 + 225}}{5}$$

El dominio de la función es el intervalo $[-5, 5]$.

Hallamos el máximo y el mínimo de $D(x)$:

$$D'(x) = \frac{32x}{10\sqrt{16x^2 + 225}}$$

$$D'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

(En $x = 0$ hay un mínimo relativo, pues $D'(x) < 0$ para $x < 0$ y $D'(x) > 0$ para $x > 0$).

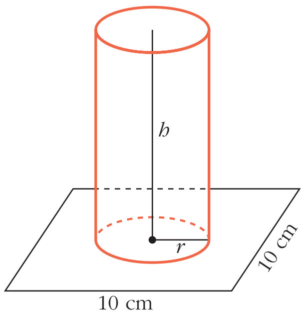
Veamos el valor de $D(x)$ en $x = 0$ y en los extremos del intervalo $[-5, 5]$:

$$D(0) = 3; \quad D(-5) = D(5) = 5$$

Por tanto, las posiciones de P que nos dan la distancia máxima son $P(5, 0)$ y $P(-5, 0)$; y las que nos dan la distancia mínima son $P(0, 3)$ y $P(0, -3)$.

s34 **En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm^2. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea el mayor posible?**

☛ ***Busca el máximo absoluto en los extremos del intervalo de definición.***



Área lateral cilindro = $2\pi r\text{h} = 50$ cm^2 $\rightarrow$ $\text{h} = \dfrac{50}{2\pi r}$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2\text{h} = \pi r^2 \cdot \frac{50}{2\pi r} = 25r \quad \rightarrow \quad V(r) = 25r$$

Al estar apoyada la base sobre el cuadrado, tenemos que el dominio de $V(r)$ es el intervalo $(0, 5]$.

Tenemos que maximizar $V(r) = 25r$, con $r \in (0, 5]$.

Como $V(r)$ es una función creciente, su máximo se alcanza en $r = 5$.

s35 **Dada la función $f\colon [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$. Tenemos que hallar el máximo de:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$$

Calculamos la derivada de $f'(x)$; es decir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2 - x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hay un máximo relativo de $f'(x)$, pues $f''(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $f''(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos $f'(x)$ en $x = 2$ y en los extremos del intervalo $[1, e]$:

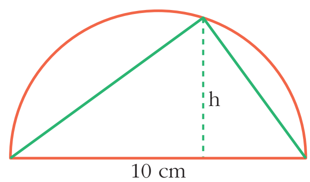
$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0{,}25; \quad f'(1) = 0; \quad f'(e) = \frac{e - 1}{e^2} \approx 0{,}23$$

Por tanto, la recta tangente con pendiente máxima es la recta tangente en $x = 2$. La hallamos:

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2; \quad f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta es: $y = \dfrac{1}{2} + \ln 2 + \dfrac{1}{4}(x - 2)$

s36 **Entre todos los triángulos inscritos en una semicircunferencia de 10 cm de diámetro, ¿cuál es el de área máxima?**



La base mide 10 cm. El área es:

$$\text{Área} = \frac{10 \cdot \text{h}}{2} = 5\text{h}; \quad \text{h} \in (0, 5].$$

El de área máxima será el que tenga la máxima altura; es decir, h = 5 cm. Su área es 25 cm^2.

37 **El valor, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t viene dado por $f(t) = 9 - (t - 2)^2$, $0 \le t \le 4{,}5$. Deduce en qué valor de t alcanzó su máximo valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo.**

Derivamos la función $f(t)$: $f'(t) = -2(t - 2)$

Los puntos críticos son: $f'(t) = 0 \;\to\; -2(t - 2) = 0 \;\to\; t - 2 = 0 \;\to\; t = 2$

La función f tiene un punto crítico en $(2, 9)$.

$f''(t) = -2$

$f''(t) = -2 < 0 \;\to\; (2, 9)$ es un máximo.

Además, como la función es una parábola con las ramas hacia abajo, el mínimo se alcanzará en uno de los extremos del intervalo:

$f(0) = 5$

$f(4{,}5) = 2{,}75 \;\to\; (4{,}5;\ 2{,}75)$ es un mínimo.

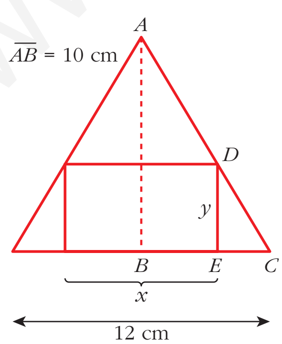
Por tanto, el máximo se alcanza para $t = 2$ y el mínimo para $t = 4{,}5$.

s38 **En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:**

a) Expresa el área, A, del rectángulo en función de la longitud de su base, x, y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.

a)



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEC}$ son semejantes; luego:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Como: $\overline{AB} = 10$ cm $\qquad \overline{DE} = y$

$\overline{BC} = 6$ cm $\qquad \overline{EC} = \dfrac{12 - x}{2}$

Tenemos que:

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{\dfrac{12 - x}{2}} \;\to\; \frac{10}{y} = \frac{12}{12 - x}$$

$$10(12 - x) = 12y \;\to\; y = \frac{10(12 - x)}{12} = \frac{5(12 - x)}{6} = \frac{60 - 5x}{6}$$

Por tanto, el área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{(60 - 5x)}{6} = \frac{60x - 5x^2}{6} \quad \to \quad A(x) = \frac{60x - 5x^2}{6}$$

x puede tomar valores entre 0 y 12. Por tanto, el dominio de $A(x)$ es:

Dominio = (0, 12)

b) Hallamos el máximo de $A(x)$:

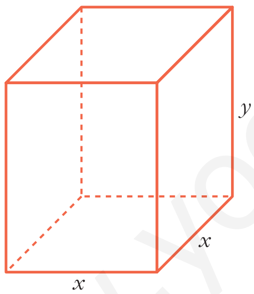
$$A'(x) = \frac{60 - 10x}{6}$$

$$A'(x) = 0 \quad \to \quad 60 - 10x = 0 \quad \to \quad x = 6 \quad \to \quad y = 5$$

(En $x = 6$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ para $x < 6$ y $A'(x) < 0$ para $x > 6$).

El máximo de la función $A(x)$ se alcanza en $x = 6$, que corresponde al rectángulo de base 6 cm y altura 5 cm. En este caso, el área es de 30 cm^2 (que es el área máxima).

39 **Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base, debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.**



$$\textit{Volumen} = x^2 y = 80 \text{ cm}^3 \quad \to \quad y = \frac{80}{x^2}$$

Para la tapa y el lateral $\to$ z €/cm^2

Para la base $\to$ $1{,}5z$ €/cm^2

El precio total será:

$$P = z(x^2 + 4xy) + 1{,}5z(x^2) = z\left(x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2}\right) + 1{,}5x^2 z =$$

$$= z\left(x^2 + \frac{320}{x}\right) + 1{,}5x^2 z = z\left(x^2 + \frac{320}{x} + 1{,}5x^2\right) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

Tenemos que minimizar la función que nos da el precio:

$$P(x) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

$$P'(x) = z\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = z\left(\frac{5x^3 - 320}{x^2}\right)$$

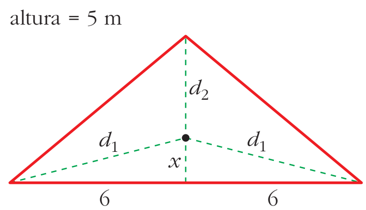
$$P'(x) = 0 \quad \to \quad 5x^3 - 320 = 0 \quad \to \quad x^3 = 64 \quad \to \quad x = 4 \quad \to \quad y = 5$$

(En $x = 4$ hay un mínimo, pues $P'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $P'(x) > 0$ a su derecha).

El envase debe tener la base cuadrada de lado 4 cm y 5 cm de altura.

40 **Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m.**

Encuentra un punto *P* sobre la altura tal que la suma de distancias de *P* a los tres vértices sea mínima.



La suma de las distancias a los tres vértices es:

$$S = 2d_1 + d_2$$

Pero: $d_1 = \sqrt{x^2 + 36}$ y $d_2 = 5 - x$

Por tanto:

$$S(x) = 2\sqrt{x^2 + 36} + 5 - x$$

Tenemos que minimizar la función $S(x)$:

$$S'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 36}}{\sqrt{x^2 + 36}}$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 36} = 0 \rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 36}$$

$$4x^2 = x^2 + 36 \rightarrow 3x^2 = 36 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

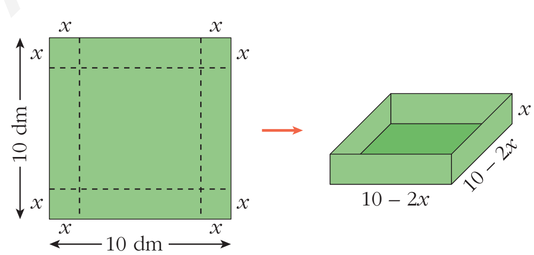
(consideramos solo la raíz positiva, pues $x \geq 0$).

(En $x = 2\sqrt{3}$ hay un mínimo, pues $S'(x) < 0$ a la izquierda de este valor y $S'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto buscado se encuentra a $2\sqrt{3}$ m de la base, situado sobre la altura.

41 **Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices.**

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.



El volumen de la caja es:

$$V(x) = x(10 - 2x)^2, \quad x \in (0, 5)$$

Tenemos que maximizar esta función:

$$V(x) = x(10 - 2x)^2 = x(100 + 4x^2 - 40x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25)$$

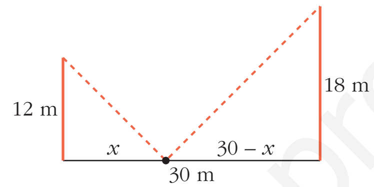
$$V'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} \begin{cases} x = 5 \quad \text{(no vale)} \\ x = 5/3 \end{cases}$$

(En $x = 5/3$ hay un máximo, pues la derivada es positiva a la izquierda de este valor y es negativa a su derecha).

Por tanto, el lado del cuadradito es $x = 5/3$.

42 **Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos.**

¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?



La longitud total del cable es:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}; \text{ es decir:}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{(x^2 + 144)(x^2 - 60x + 1\,224)}}$$

$$L'(x) = 0 \;\rightarrow\; x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1\,224) = (x - 30)^2(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8\,640x + 900x^2 + 129\,600$$

$$180x^2 + 8\,640x - 129\,600 = 0$$

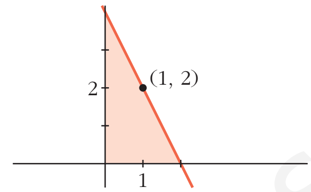
$$x^2 + 48x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2\,304 + 2\,880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \quad \text{(no vale)} \end{cases}$$

(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).

43 **De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2), encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.**



Las rectas que pasan por el punto $(1, 2)$ son de la forma:

$$y = 2 + m(x - 1)$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes de la recta:

- Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 2 - m \rightarrow$ Punto $(0, 2 - m)$
- Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 1 - \dfrac{2}{m} \rightarrow$ Punto $\left(1 - \dfrac{2}{m}, 0\right)$

El área del triángulo es:

$$A(m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{m}\right)(2 - m) = \frac{1}{2}\left(2 - m - \frac{4}{m} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(4 - m - \frac{4}{m}\right)$$

Hallamos el mínimo de la función:

$$A'(m) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{4}{m^2}\right) = \frac{-m^2 + 4}{2m^2}$$

$$A'(m) = 0 \rightarrow -m^2 + 4 = 0 \begin{cases} m = 2 \ \text{(no vale)} \\ m = -2 \end{cases}$$

($m = 2$ no vale, pues no formará un triángulo en el primer cuadrante la recta con los ejes).

(En $m = -2$ hay un mínimo, pues $A'(m) < 0$ a la izquierda de ese valor y $A'(m) > 0$ a su derecha).

Por tanto, la recta es:

$$y = 2 - 2(x - 1); \text{ es decir: } y = -2x + 4$$

44 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln(\operatorname{tg} x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$

c) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x^3)^{1/x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{1 + x}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{\operatorname{cotg} 3x}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$

a) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln(\operatorname{tg} x) = (0) \cdot (+\infty)$. Es una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

La expresamos en forma de cociente para transformarla en $\dfrac{\infty}{\infty}$ y poder aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln (tg\, x) = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\ln (tg\, x)}{\dfrac{1}{\cos x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\dfrac{1 + tg^2\, x}{tg\, x}}{\dfrac{sen\, x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\dfrac{1 + tg^2\, x}{tg^2\, x}}{\cos x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\cos x (1 + tg^2\, x)}{tg^2\, x} =$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \left(\frac{1}{tg^2\, x} + 1\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + sen\, x)^{1/x}$. Es una indeterminación del tipo 1^∞. Tomamos logaritmos para transformarlo en cociente:

$$\lim_{x \to 0} \ln (\cos x + sen\, x)^{1/x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\ln (\cos x + sen\, x)}{x} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-sen\, x + \cos x}{\cos x + sen\, x} = 1$$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + sen\, x)^{1/x} = e$

(1) Aplicamos el logaritmo de una potencia.

(2) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

c) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (tg\, x)^{\cos x}$. Es una indeterminación del tipo $(+\infty)^0$. Tomamos logaritmos para transformarlo en cociente:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \ln (tg\, x)^{\cos x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \cdot \ln (tg\, x) \stackrel{(*)}{=} 0 \qquad \text{(*) (ver apartado a))}$$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (tg\, x)^{\cos x} = e^0 = 1$

(1) Aplicamos el logaritmo de una potencia.

d) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x^3)^{1/x}$. Es una indeterminación del tipo 1^∞. Tomamos logaritmos para transformarlo en cociente:

$$\lim_{x \to 0} \ln (e^x + x^3)^{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln (e^x + x^3)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = 1$$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x^3)^{1/x} = e$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$. Es una indeterminación del tipo $(+\infty)^0$. Tomamos logaritmos para transformalo en cociente:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln (1 + x)^{1/x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln (1 + x)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + x} = 0$$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x} = e^0 = 1$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

f) $\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$. Es una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$$

$$= \ln\left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = \ln e = 1$$

g) $\lim_{x \to 0} (1 - sen\ 2x)^{cotg\ 3x} = \lim_{x \to 0} (1 - sen\ 2x)^{1/tg\ 3x}$. Es una indeterminación del tipo 1^∞. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x \to 0} \ln (1 - sen\ 2x)^{1/tg\ 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 - sen\ 2x)}{tg\ 3x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{-2 \cos 2x}{1 - sen\ 2x}}{(1 + tg^2\ 3x) \cdot 3} = \frac{-2}{3}$$

Por tanto: $\lim_{x \to 0} (1 - sen\ 2x)^{cotg\ 3x} = e^{-2/3}$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

h) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\ x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\ x} = \lim_{x \to 0} tg\ x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} [tg\ x (-\ln x)] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\ln x}{\dfrac{\cos x}{sen\ x}} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{-1}{x}}{\dfrac{-1}{sen^2\ x}} = \lim_{x \to 0} \frac{sen^2\ x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\ sen\ x \cos x}{1} = 0$$

Por tanto: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\ x} = e^0 = 1$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

45 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{sen\ x} - \frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x \to \pi/4} \left(\frac{1}{\cos 2x} - \frac{tg\ x}{1 - (4x/\pi)}\right)$

c) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x - 1}\right)$

a) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{sen\ x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - sen\ x}{x\ sen\ x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{sen\ x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{\cos x + \cos x - x\ sen\ x} = \frac{0}{2} = 0$$

b) $\displaystyle \lim_{x \to \pi/4} \left(\frac{1}{\cos 2x} - \frac{tg\, x}{1 - (4x/\pi)} \right) = \lim_{x \to \pi/4} \frac{1 - (4x/\pi) - tg\, x \cdot \cos 2x}{(\cos 2x)(1 - (4x/\pi))} =$

$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{-4/\pi - \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + 2\, tg\, x \cdot sen\, 2x}{-2\, sen\, 2x(1 - (4x/\pi)) + \cos 2x \cdot (-4/\pi)} = \frac{2 - 4/\pi}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to (\pi/4)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to (\pi/4)^+} f(x) = +\infty \quad \left(\text{siendo } f(x) = \frac{1}{\cos 2x} - \frac{tg\, x}{1 - (4x/\pi)}\right).$$

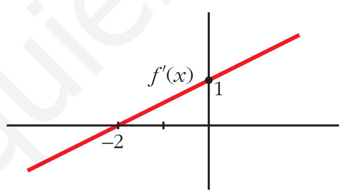
c) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{e \cdot x - e - e^x + e}{(e^x - e)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{e \cdot x - e^x}{(e^x - e)(x - 1)} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{e - e^x}{e^x(x - 1) + (e^x - e)} = \lim_{x \to 1} \frac{-e^x}{e^x(x - 1) + e^x + e^x} = \frac{-e}{2e} = \frac{-1}{2}$$

Página 307

CUESTIONES TEÓRICAS

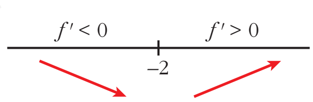
46 **La gráfica adjunta corresponde a la función derivada, f', de una función f.**



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y di si tiene máximo o mínimo.

b) Estudia la concavidad y convexidad de f. ¿Tiene punto de inflexión?

a) Signo de la derivada:



$f'(-2) = 0$

Por tanto, la función f es decreciente en $(-\infty, -2)$.

es creciente en $(-2, +\infty)$.

tiene un mínimo en $x = -2$.

b) Como $f'(x)$ es una recta con pendiente $\frac{1}{2}$, entonces $f''(x) = \frac{1}{2} > 0$.

Por tanto, f es una función cóncava. No tiene puntos de inflexión.

47 **Halla una función f cuya gráfica no sea una recta y en la que existan infinitos puntos en los que la recta tangente a su gráfica sea $y = 1$.**

$f(x) = \cos x$

Veamos que la recta tangente a $f(x)$ en los puntos de la forma $x = 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$, es $y = 1$.

$f(2\pi k) = \cos(2\pi k) = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \;\rightarrow\; f'(2\pi k) = -\operatorname{sen}(2\pi k) = 0$

La recta tangente es:

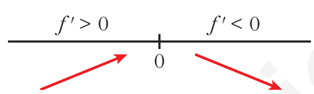
$y = 1$

48 **Si la función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$, ¿puede presentar f un máximo relativo en el punto a?**

En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí puede presentar un máximo. Por ejemplo:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ es tal que:



$f'(x) = -4x^3$ $\quad f''(x) = -12x^2$

Por tanto: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hay un máximo relativo.

s49 **Un polinomio de 3.er grado $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un máximo relativo en el punto $x = p$.**

Ese máximo relativo, ¿puede ser máximo absoluto de la función? Razónalo.

Un polinomio de tercer grado no tiene máximo absoluto.

Veamos por qué:

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a > 0$, entonces:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;\rightarrow\; f(x)$ no tiene máximo absoluto.

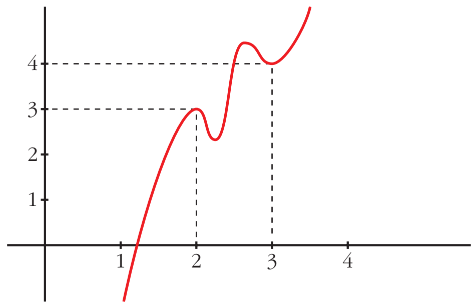
- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a < 0$, entonces:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \;\rightarrow\; f(x)$ no tiene máximo absoluto.

s50 **a) Si es posible, dibuja la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4).**

b) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

a) Por ejemplo:

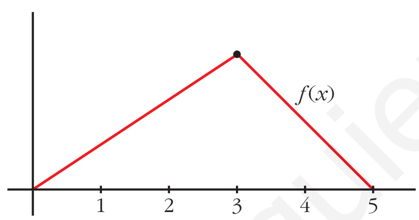


b) Si $f(x)$ es derivable, para que sea posible lo anterior, debe haber, al menos, otro máximo y otro mínimo.

Por tanto, la derivada se anularía, al menos, en cuatro puntos. Luego la función, si fuera polinómica, tendría, al menos, grado 5.

s51 **¿Puede existir una función f definida en el intervalo $I = [0, 5]$ continua en todos los puntos de I, que tenga un máximo local en el punto $x = 3$, pero que no sea derivable en $x = 3$?**

Sí. Por ejemplo:



- $f(x)$ es continua en $[0, 5]$.
- $f(x)$ no es derivable en $x = 3$, pues $f'(3^-) \neq f'(3^+)$.
- $f(x)$ tiene un máximo en $x = 3$.

52 **Si $y = f(x)$ es una función creciente en $x = a$, ¿se puede asegurar que $g(x) = -f(x)$ es decreciente en $x = a$?**

$f(x)$ es creciente en $x = a \;\rightarrow\; \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$

Como $g(x) = -f(x)$, tenemos que:

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{-f(x) + f(a)}{x - a} = -\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) < 0 \;\rightarrow$$

$\rightarrow\; g(x)$ es decreciente en $x = a$.

53 **Si $f''(x) > 0$ para todo x del dominio de f, ¿qué podemos decir de la gráfica de f?**

Será una función cóncava.

s54 **De una función f sabemos que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 5$. ¿Podemos asegurar que f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = a$?**

f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Veamos por qué:

$f'''(a) = 5 > 0 \;\rightarrow\; f''$ es creciente en $x = a$.

Como, además, $f''(a) = 0$, tenemos que $f''(x) < 0$ a la izquierda de a y $f''(x) > 0$ a su derecha. Es decir, $f(x)$ cambia de convexa a cóncava en $x = a$.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = a$.

s55 **Si $f'(a) = 0$, ¿cuál de estas proposiciones es cierta?:**

a) f tiene un máximo o un mínimo en $x = a$.

b) f tiene una inflexión en $x = a$.

c) f tiene en $x = a$ tangente paralela al eje OX.

Si $f'(a) = 0$, solo podemos asegurar que f tiene en $x = a$ tangente horizontal (paralela al eje OX).

Podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$.

Por tanto, solo es cierta la proposición c).

56 **Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $\left[0, 3\sqrt{2}\right]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in \left(0, 3\sqrt{2}\right)$ para el que $f'(c) = 0$.**

$f(x) = x^3 - 18x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ y derivable en $(0, 3\sqrt{2})$.

Además, $f(0) = f(3\sqrt{2}) = 0$. Luego verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 3\sqrt{2}]$.

Existe, pues, un $c \in (0, 3\sqrt{2})$ tal que $f'(c) = 0$.

Lo calculamos: $f'(x) = 3x^2 - 18 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{6}$ $\begin{cases} x = -\sqrt{6} \notin (0, 3\sqrt{2}) \\ x = \sqrt{6} \in (0, 3\sqrt{2}) \end{cases}$

Por tanto, $c = \sqrt{6}$.

s57 **Se tiene la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x \le -1 \\[2mm] \dfrac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

Prueba que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en [–2, 0] y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.

Veamos que $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$:

- **Si $x \ne -1$** $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

- **Si $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x^2 - 3}{2}\right) = -1 \\[2ex] f(1) = -1 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$.

Veamos que $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$:

- **Si $x \neq -1$ y $x \in (-2, 0)$,** f es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

- **En $x = -1$,** tenemos que:

$$f'(-1^-) = -1 = f'(-1^+)$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $(-2, 0)$.

Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Como $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$, existe algún punto, $c \in (-2, 0)$, tal que $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{-3/2 - (-1/2)}{2} = \dfrac{-1}{2}$.

Calculamos c:

- $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ si $-2 < x \leq -1$

$$-\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2} \;\to\; x^2 = 2 \qquad \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \in (-2, -1) \\ x = \sqrt{2} \notin (-2, -1) \end{array}$$

- $f'(x) = x$ si $-1 \leq x < 0$

$$x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0)$$

- Por tanto, hay dos soluciones:

$$c_1 = -\frac{1}{2} \text{ y } c_2 = -\sqrt{2}$$

58 **¿Es posible calcular a, b, c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, c]?

El teorema de Rolle dice: Si f es una función continua en $[0, c]$ y derivable en $(0, c)$ y $f(0) = f(c)$, existe algún punto $x \in (0, c)$ tal que $f'(x) = 0$.

Calculamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable.

- Continuidad:

—**Si $x \neq 1$** $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

—**En $x = 1$,** tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (5x + 1) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax^2 + bx + 3) = a + b + 3 \\ f(1) = a + b + 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser} \\ a + b + 3 = 6; \text{ es decir:} \\ a + b = 3 \end{array}$$

- Derivabilidad:

—**Si $x \neq 1$** $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable. Además: $f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

—**En $x = 1$,** tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 5 \\ f'(1^+) = 2a + b \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } 2a + b = 5$$

- Con las dos condiciones obtenidas, hallamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 3 - a \\ 2a + 3 - a = 5 \rightarrow a = 2 \rightarrow b = 1 \end{array}$$

- Con estos valores de a y b, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 + x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $f(x)$ es creciente $\rightarrow$ No existe ningún valor de c tal que $f(0) = f(c)$ puesto que:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(c) = 2c^2 + c + 3 \end{array}\right\} 2c^2 + c + 3 = 1 \rightarrow 2c^2 + c + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow c = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{4} \text{ no tiene solución.}$$

No existe ningún c tal que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, c]$.

s59 **La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4]?**

En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es continua en $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$; luego cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 4]$.

Veamos en qué punto, o puntos, cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-6 - (-2)}{4} = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

$$f'(x) = -1 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = -1 \rightarrow 3x^2 - 10x + 4 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Hay dos puntos: $x_0 = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{3}$ y $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{3}$

60 **Calcula b para que $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$.**

¿Dónde cumple la tesis?

$f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en $[0, b]$ y derivable en $(0, b)$, cualquiera que sea el valor de b.

Para que cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, b]$, ha de tenerse que $f(0) = f(b)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f(b) = b^3 - 4b + 3 \end{array}\right\} \quad b^3 - 4b + 3 = 3 \rightarrow b^3 - 4b = 0$$

$$b(b^2 - 4) = 0 \left\langle \begin{array}{l} b = 0 \text{ (no vale)} \\ b = -2 \text{ (no vale)} \\ b = 2 \end{array} \right.$$

(Como consideramos el intervalo $[0, b]$, ha de ser $b > 0$).

Por tanto, el teorema de Rolle se cumple en $[0, 2]$.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

La tesis se cumple en $c = \sqrt{\dfrac{4}{3}} \in (0, 2)$; es decir, $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

61 **La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable.**

¿Puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.

No es posible, si la función es derivable (y nos dicen que lo es, pues $f'(x) > 0$ para todo x).

Lo probamos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$.

$f(x)$ es derivable para todo x. Por el teorema de Rolle, habría un punto c, en el que $f'(c) = 0$.

Esto contradice el que $f'(x) > 0$ para todo x.

62 **La función $f(x) = |cos\ x|$ toma en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ el valor 1.**

¿Cumplirá el teorema de Rolle?

$$f(x) = \begin{cases} cos\ x & \text{si } 0 \le x \le \pi/2 \\ -cos\ x & \text{si } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases} \quad \text{es continua en } [0, \pi].$$

Además, $f(0) = f(\pi) = 1$.

La derivada de $f(x)$, si $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} -sen\ x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ sen\ x & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

Como $f'\left(\dfrac{\pi}{2}^-\right) = -1 \neq f'\left(\dfrac{\pi}{2}^+\right) = 1$, $f(x)$ no es derivable en $x = \dfrac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(0, \pi)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

Página 308

63 **Calcula a y b para que:**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6].

¿Dónde cumple la tesis?

El teorema del valor medio dice: si f es una función continua en [2, 6] y derivable en $(2, 6)$, existe algún punto $c \in (2, 6)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f'(6) - f'(2)}{6 - 2}$.

- Continuidad:

  — **Si** $x \neq 4$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

  — **En** $x = 4$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (ax - 3) = 4a - 3 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (-x^2 + 10x - b) = 24 - b \\ f(4) = 24 - b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 4a - 3 = 24 - b; \text{ es decir:} \\ 4a + b = 27 \end{array}$$

- Derivabilidad:

  — **Si** $x \neq 4$ $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

  — **En** $x = 4$**:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = a \\ f'(4^+) = 2 \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } a = 2$$

- Uniendo los dos resultados obtenidos:

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 27 \\ a = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 19 \end{array}$$

- Por tanto, si $a = 2$ y $b = 19$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$.

  En este caso, quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$-2x + 10 = 1 \rightarrow x = \frac{9}{2} \in (2, 6)$$

  La tesis se cumple en $c = \frac{9}{2}$.

64 **Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.**

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} \rightarrow \text{No existe } f'(0)$$

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(-1, 1)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

65 **Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en [0, 5] existe un c tal que $f'(c) = 8$.**

Si $f(x)$ es continua en $[0, 5]$ y derivable en $(0, 5)$, por el teorema del valor medio, podemos asegurar que existe $c \in (0, 5)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$$

En este caso: $f'(c) = \dfrac{f(5) - 3}{5 - 0} = \dfrac{f(5) - 3}{5} = 8 \ \rightarrow \ f(5) = 43$

66 **Calcula a, b y c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4].

¿En qué punto se cumple la tesis?

- Continuidad:

—**Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

—**En $x = 2$**, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (cx + 1) = 2c + 1 \\ f(2) = 2c + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser} \\ 4 + 2a + b = 2c + 1; \\ \text{es decir: } 2a + b - 2c = -3 \end{array}$$

- Derivabilidad:

—**Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

—**En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } 4 + a = c$$

- $$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ f(4) = 4c + 1 \end{array}\right\} b = 4c + 1$$

- Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 4]$, ha de cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b - 2c = -3 \\ 4 + a = c \\ b = 4c + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{array}$$

En este caso, sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y se cumplirían las hipótesis del teorema de Rolle.

- Veamos dónde se cumple la tesis:

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - 3 = 0 \quad \to \quad x = \frac{3}{2} \in (0, 4)$$

Por tanto, la tesis se cumple en $x = \dfrac{3}{2}$.

67 **Enuncia el teorema de Rolle. ¿Es posible asegurar, utilizando dicho teorema, que la función $f(x) = sen(x^2) + x^2$ es tal que su derivada se anula en algún punto del intervalo [–1, 1]? Justifica la respuesta.**

- **Teorema de Rolle:**

Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Si $f(x) = sen\,(x^2) + x^2$, tenemos que:

—Es continua en $\mathbb{R}$; y, por tanto, en $[-1, 1]$.

—Es derivable en $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x\,cos\,(x^2) + 2x$; y, por tanto, en $(-1, 1)$.

—Además, $f(-1) = f(1) = (\text{sen } 1) + 1$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema de Rolle.

Por tanto, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

PARA PROFUNDIZAR

68 **Dado $r > 0$, prueba que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2 + y^2 = r$, la suma $x + y$ es máxima cuando $x = y$.**

Como $x^2 + y^2 = r$ y nos dicen que $y > 0$, entonces: $y = \sqrt{r - x^2}$

Así, la suma es: $S = x + y = x + \sqrt{r - x^2}$

Tenemos que maximizar la función $S(x) = x + \sqrt{r - x^2}$:

$$S'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{r - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{r - x^2}} = \frac{\sqrt{r - x^2} - x}{\sqrt{r - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \quad \to \quad \sqrt{r - x^2} = x \quad \to \quad r - x^2 = x^2 \quad \to \quad r = 2x^2 \quad \to \quad x^2 = \frac{r}{2}$$

Como $x > 0 \;\;\rightarrow\;\; x = \sqrt{\dfrac{r}{2}}$

(En $x = \sqrt{\dfrac{r}{2}}$ hay un máximo, pues $S'(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $S'(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos y: $y = \sqrt{r - x^2} = \sqrt{r - \dfrac{r}{2}} = \sqrt{\dfrac{r}{2}}$

Por tanto, la suma es máxima cuando $x = y = \sqrt{\dfrac{r}{2}}$.

69 **Sea $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$, con a y b números positivos. Demuestra que el valor mínimo de f en $(0, +\infty)$ es $2\sqrt{ab}$.**

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; ax^2 - b = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$f''(x) = \frac{2b}{x^3}$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) > 0 \;\;\rightarrow\;\; \text{en } x = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ hay un mínimo.}$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) < 0 \;\;\rightarrow\;\; \text{en } x = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ hay un máximo.}$$

Además, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Luego, en $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ se encuentra el mínimo absoluto de $f(x)$.

Este mínimo vale:

$$f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{\sqrt{b/a}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{ab} + \sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}$$

Es decir, el mínimo de $f(x)$ en $(0, +\infty)$ es $2\sqrt{ab}$.

70 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$. Tomamos logaritmos:

$$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln (e^{1/x} + e^{2/x})^x = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln (e^{1/x} + e^{2/x}) = (0 \cdot +\infty) =$$

$$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln (e^{1/x} + e^{2/x})}{1/x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{e^{1/x} \cdot (-1/x^2) + e^{2/x} \cdot (-2/x^2)}{e^{1/x} + e^{2/x}}}{-1/x^2} =$$

$$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x} + 2e^{2/x}}{e^{1/x} + e^{2/x}} \stackrel{(*)}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x} + 2}{e^{-1/x} + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

((*) Dividimos numerador y denominador entre $e^{2/x}$).

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^2$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$. Tomamos logaritmos:

$$\lim\limits_{x \to 0^-} \ln (e^{1/x} + e^{2/x})^x = \lim\limits_{x \to 0^-} x \ln (e^{1/x} + e^{2/x}) = (0 \cdot -\infty) =$$

$$= \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\ln (e^{1/x} + e^{2/x})}{1/x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x} + 2e^{2/x}}{e^{1/x} + e^{2/x}} \stackrel{(*)}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1 + 2e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \frac{1}{1} = 1$$

((*) Dividimos numerador y denominador entre $e^{1/x}$).

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^1 = e$

71 **Calcula a y b para que se verifique $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = 1$**

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{(*)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{2ax + b + \operatorname{sen} x}{2x \cos x^2}$$

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2ax + b + \operatorname{sen} x}{2x \cos x^2} = \pm\infty \text{ salvo que } b = 0$$

Tomando $b = 0$:

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{ax^2 + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{(*)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{2ax + \operatorname{sen} x}{2x \cos x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{(*)}{=}$$

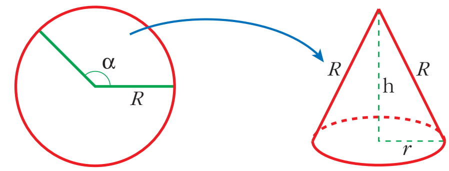
$$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{2ax + \cos x}{2[\cos x^2 - 2x^2 \operatorname{sen} x^2]} = \frac{2a + 1}{2(1 - 0)} = a + \frac{1}{2}$$

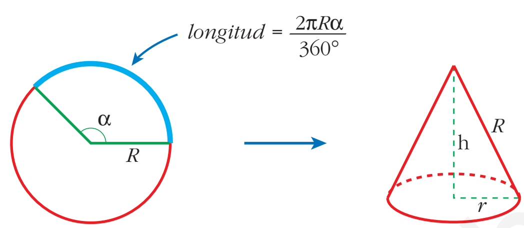
Como $a + \dfrac{1}{2} = 1 \to a = \dfrac{1}{2}$

(*) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

Así: $a = \dfrac{1}{2}$ y $b = 0 \to \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2/2) + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = 1$

72 **Si de un disco metálico quitamos un sector circular, podemos construir un vaso cónico. Determina el sector circular que debemos quitar para que el volumen del vaso sea máximo.**





- Longitud de la circunferencia de la base del cono:

$$L = 2\pi r = \frac{2\pi R\alpha}{360} \quad \rightarrow \quad r = \frac{R\alpha}{360}$$

- Altura del cono: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2\alpha^2}{129\,600}} = \dfrac{R}{360}\sqrt{129\,600 - \alpha^2}$

- Volumen del cono:

$$V = \frac{\pi}{3}r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2\alpha^2}{360^2} \cdot \frac{R}{360} \cdot \sqrt{129\,600 - \alpha^2} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}$$

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}$$

- Hallamos α para que el volumen sea máximo:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \cdot \frac{518\,400\alpha^3 - 6\alpha^5}{2\sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}}$$

$$V'(\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad 518\,400\alpha^3 - 6\alpha^5 = 0$$

$$6\alpha^3(86\,400 - \alpha^2) = 0 \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 293°\ 56'\ 20'' \\ \alpha = -293°\ 56'\ 20'' \end{cases}$$

El máximo se alcanza en $\alpha = 293°\ 56'\ 20''$ (la derivada es positiva a su izquierda y negativa a su derecha, y estamos considerando x entre 0° y 360°).

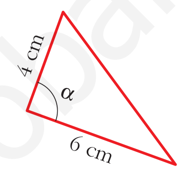
Así, el cono tendrá radio $r = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$ y altura $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Su volumen sería $\dfrac{2\pi R^3 \cdot \sqrt{3}}{27}$.

73 **Las manecillas de un reloj miden 4 cm y 6 cm, y uniendo sus extremos se forma un triángulo. Determina el instante entre las 12 h y las 12 h 30 min en el que el área del triángulo es máxima.**

☛ ***¿Qué ángulo recorre la aguja horaria en t minutos? ¿Y el minutero? ¿Cuál es el ángulo que forman entre las dos en t minutos?***

- La aguja horaria recorre un ángulo de 360° en 12 horas; es decir, $\dfrac{360}{720} = 0{,}5°$ en 1 minuto; o bien, $0{,}5t°$ en t minutos.
- El minutero recorre 360° en 1 hora; es decir, 6° en 1 minuto; o bien $6t°$ en t minutos.
- Al cabo de t minutos, las dos agujas formarán un ángulo de $\alpha = 6t° - 0{,}5t° = 5{,}5t°$.
- El área del triángulo será:



$$Área = \frac{4 \cdot 6 \cdot sen\,(5{,}5t)}{2} = 12\ sen\,(5{,}5t)$$

$$A(t) = 12\ sen\,(5{,}5t)$$

- Hallamos el máximo de $A(t)$, teniendo en cuenta que $t \in (0, 30)$ (pues estamos considerando entre las 12 h y las 12 h 30 min):

$$A'(t) = 12 \cdot 5{,}5 \cdot cos\,(5{,}5t) = 0 \xrightarrow{(*)} 5{,}5t = 90 \rightarrow t = \frac{90}{5{,}5} = 16{,}\widehat{36} =$$

$$= 16 \text{ minutos y } 22 \text{ segundos}$$

(*) Si igualamos $5{,}5t$ a un ángulo mayor de 90°, obtenemos $t > 30$ min.

(En $t = 16{,}\widehat{36}$ minutos hay un máximo, pues la derivada es positiva a su izquierda y negativa a su derecha).

Por tanto, el triángulo de área máxima se forma a las 12 h 16 min 22 segundos.

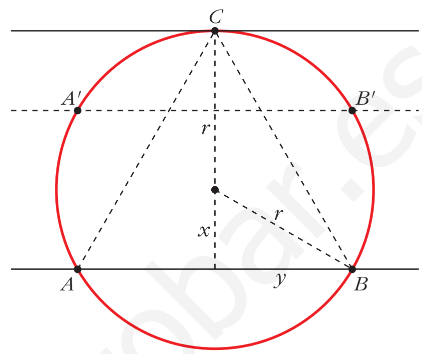
74 **Comprueba que, en la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \dfrac{k}{x}$, se tiene que el punto c, que cumple $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, es, precisamente, la media geométrica de a y b, $c = \sqrt{ab}$.**

$$\left.\begin{array}{l} f'(c) = \dfrac{-k}{c^2} \\[2ex] \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{\dfrac{k}{b} - \dfrac{k}{a}}{b - a} = \dfrac{\dfrac{ka - kb}{ab}}{b - a} = \dfrac{-k(b - a)}{ab(b - a)} = \dfrac{-k}{ab} \end{array}\right\}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow \frac{-k}{c^2} = \frac{-k}{ab} \rightarrow c^2 = ab \rightarrow c = \sqrt{ab}$$

(Suponemos $k > 0$, $a > 0$, $b > 0$).

75 **En una circunferencia de radio r se traza la tangente en un punto cualquiera C y una cuerda AB paralela a dicha tangente. Obtenemos, así, un triángulo ABC cuya área queremos que sea la mayor posible. Demuestra que, para ello, la distancia de C a la cuerda debe ser $\frac{3}{2}$ del radio.**



- La altura del triángulo ha de ser mayor que el radio, pues, si trazamos la cuerda por $A'B'$, podemos conseguir otro triángulo con la misma base, AB, y mayor altura; y, así, con mayor área.

- Expresamos el área del triángulo en función de x:

  $altura = x + r$

  $$\left.\begin{array}{l} base = 2y \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} \end{array}\right\} \rightarrow \quad base = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

  $$Área = \frac{2(x + r)\sqrt{r^2 - x^2}}{2} = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2}$$

  $$A(x) = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2}; \quad x \in [0, r)$$

- Obtenemos el valor de x para el que $A(x)$ alcanza el máximo:

  $$A'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + (x + r) \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - x^2 - x(x + r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

  $$= \frac{r^2 - x^2 - x^2 - rx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

  $$A'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -2x^2 - rx + r^2 = 0$$

  $$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{-4} = \frac{r \pm \sqrt{9r^2}}{-4} = \frac{r \pm 3r}{-4} \begin{cases} x = -r \ \text{(no vale)} \\ x = -2r/-4 = r/2 \end{cases}$$

  (En $x = \frac{r}{2}$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(x) < 0$ a su derecha).

- El máximo se alcanza en $x = \frac{r}{2}$.

  Por tanto, la distancia de C a la cuerda, que es la altura del triángulo, es:

  $$h = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

- **Observación:**

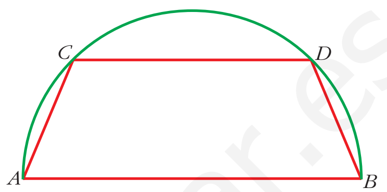
  Vamos a calcular la longitud de los lados del triángulo:

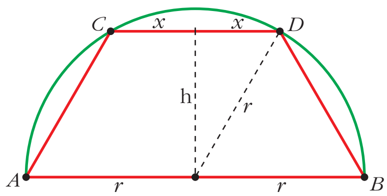
  $$AB = base = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

$$AC = BC = \sqrt{y^2 - h^2} = \sqrt{(r^2 - x^2) + \left(\frac{3r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{9r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

Por tanto, hemos obtenido que el triángulo inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el triángulo equilátero.

76 **En una semicircunferencia de diámetro *AB* = 2*r* se traza una cuerda *CD* paralela a *AB*. ¿Cuál debe ser la longitud de esa cuerda para que el área del trapecio *ABDC* sea máxima?**





- Llamamos x a la mitad de la base CD; es decir, a la mitad de la longitud de la cuerda.
- La altura del trapecio será:

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}$$

- El área del trapecio es:

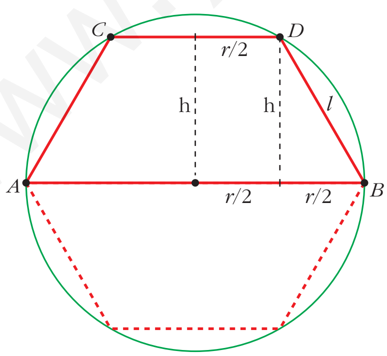
$$Área = \frac{(2r + 2x) \cdot h}{2} = (r + x) \cdot h = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A(x) = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in (0, r)$$

Esta función es la misma que obtuvimos en el ejercicio 75; por tanto, alcanza el máximo en $x = \frac{r}{2}$ (ver dicho ejercicio).

- Así, la longitud de la cuerda es $2x = r$; es decir, $CD = r$.

Observación:



Si completamos la figura de forma simétrica, obtenemos un hexágono de área máxima inscrito en una circunferencia. Veamos que se trata de un hexágono regular:

$$CD = r$$

$$h = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

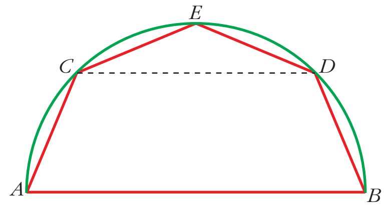
$$l = \sqrt{h^2 + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4} + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{r^2} = r$$

Luego el lado del hexágono es r, igual al radio de la circunferencia.

Por tanto, el hexágono inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el hexágono regular.

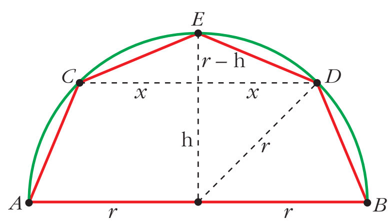
Página 309

77 **En la figura del problema anterior, llamamos *E* al punto medio del arco *CD* y dibujamos el pentágono *ACEDB* que ves a continuación:**



a) Calcula la longitud de la cuerda *CD* para que el área del pentágono sea máxima.

b) Calcula, también, el valor del área máxima del pentágono.



- Llamamos x a la mitad de la longitud de la cuerda CD.
- El área del pentágono es igual a la suma de las áreas del trapecio $CDBA$ y del triángulo CDE:

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$Área = \frac{(2r + 2x) \cdot h}{2} + \frac{2x \cdot (r - h)}{2} = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + x(r - \sqrt{r^2 - x^2}) =$$

$$= \cancel{x\sqrt{r^2 - x^2}} + r\sqrt{r^2 - x^2} + xr - \cancel{x\sqrt{r^2 - x^2}} = xr + r\sqrt{r^2 - x^2} = r\left[x + \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$A(x) = r\left[x + \sqrt{r^2 - x^2}\right], \quad x \in (0, r)$$

a) Hallamos el máximo de $A(x)$:

$$A'(x) = r\left[1 + \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}}\right] = r\left[\frac{\sqrt{r^2 - x^2} - x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]$$

$$A'(x) = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r^2 - x^2} - x = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r^2 - x^2} = x$$

$$r^2 - x^2 = x^2 \;\rightarrow\; r^2 = 2x^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

(No consideramos la raíz negativa, pues $x \in (0, r)$).

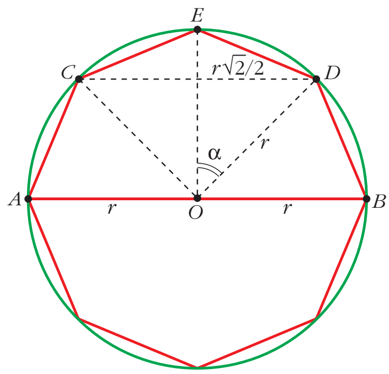
(En $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(x) < 0$ a su derecha).

- El máximo se alcanza en $x = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$; es decir, la longitud de la cuerda para la que obtenemos el área máxima es $CD = r\sqrt{2}$.

b) $A\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right) = r\left[\dfrac{r}{\sqrt{2}} + \sqrt{r^2 - \dfrac{r^2}{2}}\right] = r\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}} + \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,r^2$

Observación 1:

Si completamos la figura anterior de forma simétrica, vemos que obtenemos un octógono regular:



$$sen\ \alpha = \frac{r\sqrt{2}/2}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45°$$

es decir: $EOD = 45°$

Además:

$$\begin{cases} \widehat{EOC} = \widehat{EOD} \rightarrow \widehat{EOC} = 45° \\ \widehat{DOB} = 90° - \widehat{EOD} = 45° \\ \widehat{COA} = 90° - \widehat{EOC} = 45° \end{cases}$$

y $OA = OC = OE = OD = OB = r$

Por tanto, se trata de un octógono regular.

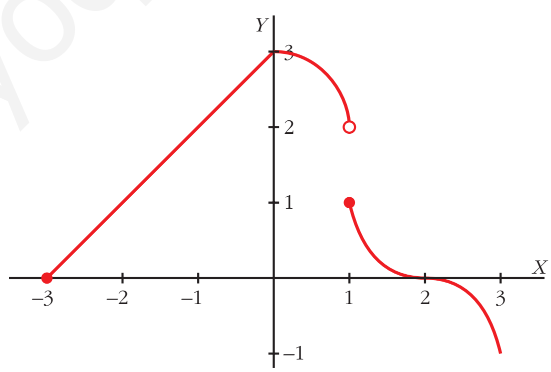
Así, hemos obtenido que el octógono inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el octógono regular.

Observación 2:

En el ejercicio 75 obtuvimos el resultado para un triángulo, en el ejercicio 76 para un hexágono y en este ejercicio para un octógono.

En general, se tiene que el polígono de n lados inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el polígono regular de n lados.

s78 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)$ definida en [–3, 3] cuya gráfica es la siguiente:**



Dibuja razonadamente la gráfica de $f'(x)$.

- La función es continua en todo su dominio, excepto en $x = 1$; puesto que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \text{En } x = 1 \text{ hay una discontinuidad de salto finito.}$$

- La función es derivable, excepto en $x = 0$ y en $x = 1$.

  En $x = 0$ hay "un pico"; es decir, $f'(0^-) \neq f'(0^+)$.

  En $x = 1$ no es continua la función; por tanto, no puede ser derivable.

  Observamos que:

  $f'(0^-) = 1$ (pendiente de la recta que pasa por $(-3, 0)$ y $(0, 3)$).

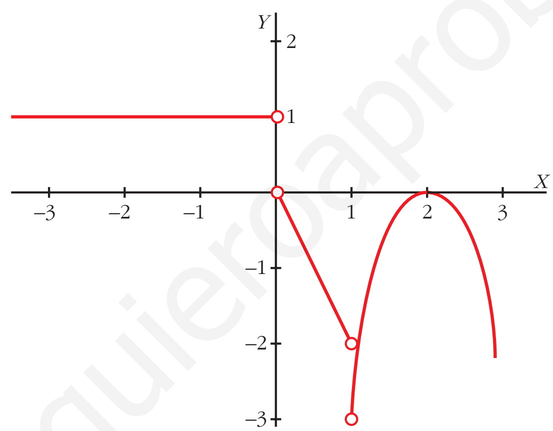
  $f'(0^+) = 0$ (en el punto $(0, 3)$ la recta tangente a f es horizontal).

  $f'(2) = 0$ por la misma razón que en $x = 0^+$.

  En los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 3)$ f' es negativa, por ser f una función decreciente.

  En $x = 1$, f' no existe.

- La gráfica de f' puede ser así:



Página 309

AUTOEVALUACIÓN

1. Halla un punto de la gráfica $y = x^2 + x + 5$ en el cual la recta tangente sea paralela a $y = 3x + 8$.

- La pendiente de la recta $y = 3x + 8$ es $m = 3$.
- Buscamos un punto en el que la derivada valga 3:

$$f'(x) = 2x + 1$$

$$f'(x) = 3 \;\rightarrow\; 2x + 1 = 3 \;\rightarrow\; x = 1 \;\rightarrow\; y = 7$$

- El punto es $(1, 7)$.

2. Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, estudia si tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión.

- El dominio de definición de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
- Los máximos y mínimos están entre las soluciones de $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{1(x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \;\rightarrow\; \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = 0 \quad \text{No tiene solución.}$$

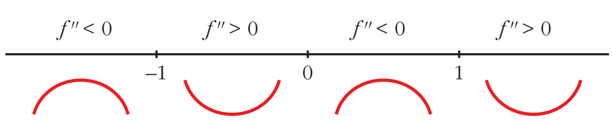
$f'(x)$ es decreciente para todo $x \rightarrow f$ y no tiene máximos ni mínimos.

- Los puntos de inflexión están entre las soluciones de $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)\,2x(-x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x^3 + 6x = 0 \;\rightarrow\; 2x(x^2 + 3) = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; f(0) = 0$$

Estudiamos el signo de f''. Señalamos los puntos donde f no existe y donde f'' es 0.



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

3. **Estudia el crecimiento de la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)}$$

y determina los máximos y los mínimos de la función para $x \in [0, 2\pi]$.

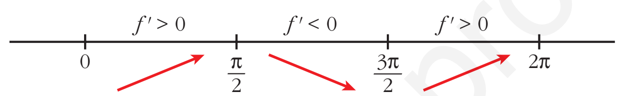
Consideramos la función: $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x(-\operatorname{sen} x + \cos x) = e^x(2 \cos x) = 2e^x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \cos x = 0 \;\left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \left(\text{para } x \in [0, 2\pi]\right)$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, e^{\pi/2}\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2}\right)$.

4. **a) Estudia la curvatura de la siguiente función: $f(x) = x^2 \ln x$**

b) Escribe la ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión.

a) • El dominio de definición de la función es $(0, +\infty)$.

• f es cóncava en los intervalos donde $f'' > 0$ y convexa si $f'' < 0$.

• Calculamos f' y f'':

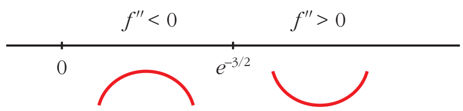
$$f(x) = x^2 \ln x \;\rightarrow\; f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$$f''(x) = 1(2 \ln x + 1) + x\left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 2 \ln x + 3$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 2 \ln x + 3 = 0 \;\rightarrow\; \ln x = -\frac{3}{2} \;\rightarrow\; x = e^{-3/2} \;\rightarrow\; f(e^{-3/2}) = -\frac{3}{2}e^{-3}$$

• Estudiamos el signo de f'' teniendo en cuenta el dominio de f, $(0, +\infty)$, y el punto donde $f''(x) = 0$, $x = e^{-3/2} \simeq 0{,}22$:

Signo de la derivada:



- Conclusiones:

— f es convexa en $(0, e^{-3/2})$.

— f es cóncava en $(e^{-3/2}, +\infty)$.

— Punto de inflexión: $\left(e^{-3/2}, -\dfrac{3}{2}e^{-3}\right)$

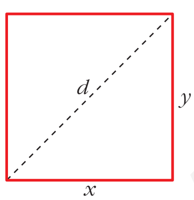
b) • Pendiente de la recta tangente en $x = e^{-3/2}$:

$$m = f'(e^{-3/2}) = e^{-3/2}\,(2\ ln\ e^{-3/2} + 1) = e^{-3/2}\left[2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1\right] = -2e^{-3/2}$$

- Ecuación de la recta tangente en $\left(e^{-3/2}, -\dfrac{3}{2}e^{-3}\right)$:

$$y = -\frac{3}{2}e^{-3} - 2e^{-3/2}(x - e^{-3/2})$$

5. **De todos los rectángulos de área 100 dm², halla las dimensiones del que tenga la diagonal mínima.**



$$Área = x \cdot y = 100\ \text{dm}^2 \;\rightarrow\; y = \frac{100}{x}$$

La diagonal mide:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{100}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2}}$$

Tenemos que minimizar la función:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2}}$$

$$d'(x) = \frac{2x - \dfrac{20\,000}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \dfrac{10\,000}{x^2}}} = \frac{2x^4 - 20\,000}{2x^3\,\dfrac{\sqrt{x^4 + 10\,000}}{x}} = \frac{x^4 - 10\,000}{x^2\sqrt{x^4 + 10\,000}}$$

$$d'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^4 - 10\,000 = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt[4]{10\,000} = 10 \;\rightarrow\; x = 10 \;\rightarrow\; y = 10$$

(En $x = 10$ hay un mínimo, pues $d'(x) < 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $d'(x) > 0$ a la derecha de $x = 10$).

Por tanto, la diagonal mínima corresponde al cuadrado de lado 10 dm.

6. **Calcula el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en x es $f'(x)$. Tenemos que hallar el máximo de $f'(x)$.

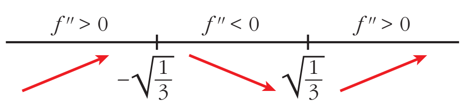
$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$

Buscamos los puntos donde la derivada de $f'(x)$ es 0:

$$f''(x) = \frac{-2(1 + x^2)^2 + 2x \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2(1 + x^2) + 8x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x^2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \begin{cases} f'(\sqrt{3}/3) = (-3\sqrt{3})/8 \\ f'(-\sqrt{3}/3) = (3\sqrt{3})/8 \end{cases}$$

Estudio del signo de f'':



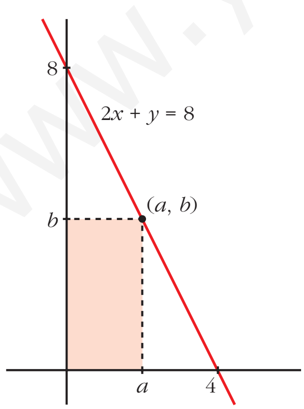
$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$

En $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay un máximo de $f'(x)$ y en $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay un mínimo de $f'(x)$.

Por tanto, el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

7. **Dentro del triángulo limitado por los ejes OX y OY y la recta $2x + y = 8$, se inscribe un rectángulo de vértices $(a, 0)$, $(0, 0)$, (a, b) y $(0, b)$. Determina el punto (a, b) al que corresponde el rectángulo de área máxima.**



- El punto (a, b) es un punto de la recta $2x + y = 8$. Por tanto, $2a + b = 8$; es decir, $b = 8 - 2a$.
- Como el rectángulo está inscrito en el triángulo, $0 < a < 4$
- El área del rectángulo es:

  $Área = a \cdot b = a \cdot (8 - 2a) = 8a - 2a^2$, $0 < a < 4$.
- Tenemos que maximizar la función:

  $A(a) = 8a - 2a^2$, $0 < a < 4$

  $A'(a) = 8 - 4a = 0 \;\rightarrow\; a = 2 \;\rightarrow\; b = 4$

(En $a = 2$ hay un máximo, pues $A'(a) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(a) < 0$ a su derecha).

- Por tanto, el punto es $(2, 4)$.

8. **Calcula** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - (1/3)x^3}{x - tg\, x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 - (1/3)x^3}{x - tg\, x} = \left(\frac{0}{0}\right) \to \lim_{x \to 0} \frac{4x^3 - x^2}{1 - (1 + tg^2\, x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4x^3 - x^2}{-tg^2\, x} = \left(\frac{0}{0}\right) \to$$

$$\to \lim_{x \to 0} \frac{12x^2 - 2x}{-2tg\, x(1 + tg^2\, x)} = \lim_{x \to 0} \frac{12x^2 - 2x}{-2tg\, x - 2tg^3\, x} = \left(\frac{0}{0}\right) \to$$

$$\to \lim_{x \to 0} \frac{24x - 2}{-2(1 + tg^2\, x) - 6tg^2\, x(1 + tg^2\, x)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

9. **Calcula el valor de** k **para que la expresión** $\displaystyle \lim_{x \to 0} (e^x + kx)^{1/x}$ **sea igual a** e^4.

$A = \displaystyle \lim_{x \to 0} (e^x + kx)^{1/x}$. Tomamos logaritmos en $ln\, A = ln[\displaystyle \lim_{x \to 0} (e^x + kx)^{1/x}]$:

$$\lim_{x \to 0} ln\, (e^x + kx)^{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{ln\, (e^x + kx)}{x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + k}{e^x + kx} = \frac{1 + k}{1} = 1 + k$$

(*) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

Si $ln\, A = 1 + k \to A = e^{1 + k}$. Por tanto: $\displaystyle \lim_{x \to 0} (e^x + kx)^{1/x} = e^{1+x}$

Para que sea igual a e^4, ha de ser:

$$e^{1+x} = e^4 \quad \to \quad 1 + k = 4 \quad \to \quad k = 3$$

10. **Dada la función** $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, **halla** a **y** b **para que las rectas tangentes a la gráfica de** $f(x)$ **en los puntos de abscisas** $x = 2$ **y** $x = 4$ **sean paralelas a** OX.

- La pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es $f'(2)$:

  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to m_1 = f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + b = 12 + 4a + b$

- La pendiente de la recta tangente en $x = 4$ es $f'(4)$:

  $m_2 = f'(4) = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot a \cdot 4 + b = 48 + 8a + b$

- Como las rectas tangentes en $x = 2$ y $x = 4$ deben ser paralelas a OX, su pendiente será 0. Por tanto:

  $$\left.\begin{array}{l} f'(2) = 0 \to 12 + 4a + b = 0 \\ f'(4) = 0 \to 48 + 8a + b = 0 \end{array}\right\} a = -9, \; b = 24$$

  Así:

  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

11. **La función $f(x) = 1 - |x|$ si $x \in [-2, 2]$ verifica $f(-2) = f(2)$. Justifica si es posible encontrar algún $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.**

$$f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

El teorema de Rolle dice que si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Comprobaremos si la función f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$:

- Veamos si f es continua en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} 1 + x = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - x = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$$

  f es continua en $[-2, 2]$.

- Estudiamos la derivabilidad de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  $f'(1^-) \neq f'(1^+)$. f no es derivable en $x = 0 \Rightarrow f$ no es derivable en $(-2, 2)$.

- f no cumple las hipótesis del teorema de Rolle; por tanto, no podemos asegurar que exista un $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

11 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Página 311

REFLEXIONA Y RESUELVE

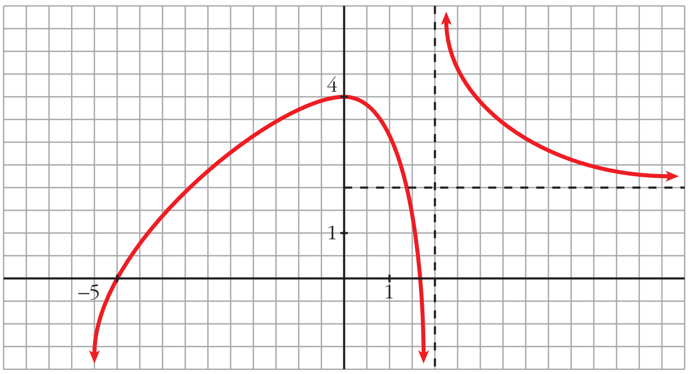
Descripción de una gráfica

- **Copia en tu cuaderno los datos encuadrados en rojo. A partir de ellos, y sin mirar la gráfica que aparece al principio, representa esta función sobre unos ejes coordenados dibujados en papel cuadriculado.**

  (La solución está en el propio ejercicio).

- **Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:**

  - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
  - $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
  - $f(0) = 4;\ f'(0) = 0$
  - $f(-5) = 0;\ f(1{,}75) = 0$
  - f **es derivable en todo** $\mathbb{R}$**, salvo en** $x = 2$**.**



■ **Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar a la de los apartados anteriores, la siguiente función:**

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0;\ f(0) = 0;\ f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4;\ f'(4) = 0$

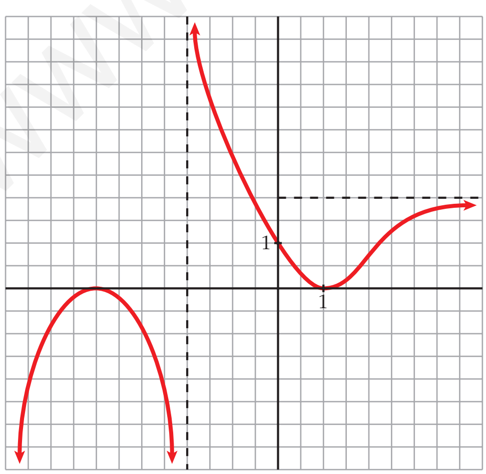
■ **Representa sobre unos ejes en papel cuadriculado una gráfica inventada por ti. Descríbela en papel aparte. Dale la descripción a tu compañera o compañero para que la represente.**

Representa tú la suya.

Comparad cada representación con la curva original. Discutid las diferencias que observéis.

¿Hay algún error en la representación? ¿Hay, acaso, error en la descripción?

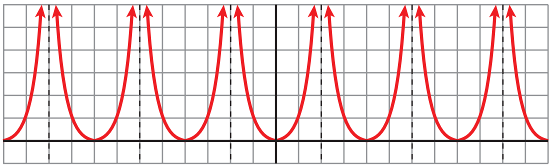
¿Es todo correcto?



Por ejemplo:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0;\ f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0;\ f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

■ **Observa esta gráfica:**



- **Halla la ordenada para las siguientes abscisas:**

  $x = 0,\ x = 1,\ x = 3,\ x = -7,\ x = 12,\ x = -400,\ x = 13,\ x = -199$

- **¿En qué puntos no está definida esta función?**
- **¿Qué tramo de la función te bastaría conocer para hacerte una idea exacta de cómo es la gráfica?**
- **¿Te sugiere esta curva algún tipo de simetría o periodicidad?**

- $f(0) = 0;\ f(1) = 1;\ f(3) = 1;\ f(-7) = 1$

  $f(12) = 0;\ f(-400) = 0;\ f(13) = 1;\ f(-199) = 1$

  (En general, $f(4k) = 0;\ f(4k + 1) = f(4k - 1) = 1$ y no existe $f(x)$ en $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$).

- La función no está definida en los puntos de la forma $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- Bastaría con conocer la función para $x \in [0, 2)$, si supiéramos que es par y que es periódica de período 4.

- Simetría $\rightarrow$ Es una función par (simétrica respecto al eje Y).

  Periodicidad $\rightarrow$ Es periódica de período 4.

Página 312

1. Halla el dominio de estas funciones:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $y = \dfrac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$

c) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) *Dominio* = $\mathbb{R}$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

Dominio = $\mathbb{R} - \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \rightarrow$ *Dominio* = $\mathbb{R}$

2. **Halla el dominio de:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = ln(x^2 + 1)$ **c)** $y = ln(x^2 - 1)$ **d)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R}$

c) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

Página 313

3. **Halla las simetrías y las periodicidades; di dónde son continuas y dónde derivables:**

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = sen\ x + 1/2\ (sen\ 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y.

No es periódica.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) *Dominio* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e) *Dominio* = $\mathbb{R}$

$$f(-x) = sen\,(-x) + \frac{1}{2}\,(sen\,(-2x)) = -sen\,x - \frac{1}{2}\,(sen\,(2x)) = -f(x)$$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

Es periódica de período 2π.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Página 314

4. Halla las ramas infinitas de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

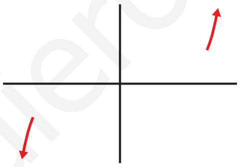
d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

e) $y = ln(x^2 + 1)$

f) $y = 2^{x-1}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

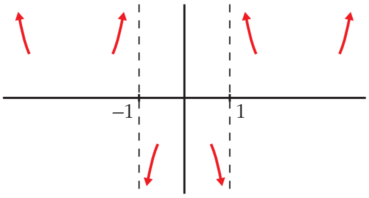
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

- *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\}$ Ramas parabólicas
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$



c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = \dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = x + 4 + \dfrac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4}$

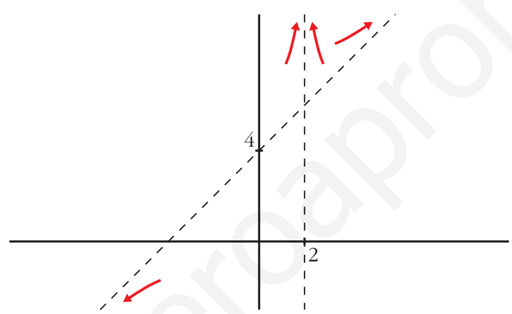
- *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $y = x + 4$ es una asíntota oblicua.

  $f(x) - (x + 4) = \dfrac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) - (x + 4) > 0 & \text{si } x \to +\infty \\ f(x) - (x + 4) < 0 & \text{si } x \to -\infty \end{cases}$

- $\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \quad x = 2$ es asíntota vertical



d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

- *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = -1 \quad \rightarrow \quad$ Hay asíntota oblicua.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 - 2x} + x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x} - x\right] =$

  $= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)} =$

  $= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \dfrac{2}{2} = 1$

  $y = -x + 1$ es una asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = 1 \quad \rightarrow \quad$ Hay asíntota oblicua.

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 2x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)} =$$

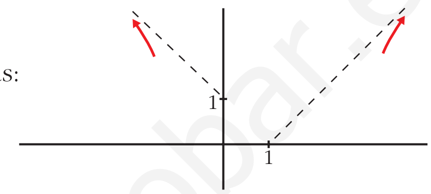
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -1$$

$y = x - 1$ es una asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- No hay asíntotas verticales.
- Posición de la curva respecto a las asíntotas:

  $f(x) - (-x + 1) < 0$ si $x \to -\infty$

  $f(x) - (x - 1) < 0$ si $x \to +\infty$



e) $y = ln(x^2 + 1)$

- *Dominio* = $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

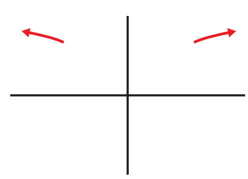
  $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$

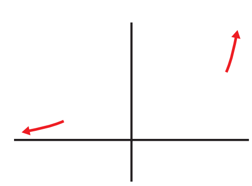
  Ramas parabólicas

- No hay asíntotas verticales.



f) $y = 2^{x-1} > 0$ para todo x.

- *Dominio* = $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \ \to \ y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
- No hay asíntotas verticales.



Página 315

5. Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

b) $y = ln(x^2 + 1)$

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- $f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	1	$f' < 0$	3	$f' > 0$

Hay un máximo en $(1, 9)$ y un mínimo en $(3, 5)$.

- $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

Signo de $f''(x)$:

$f'' < 0$	2	$f'' > 0$

Hay un punto de inflexión en $(2, 7)$.

b) $y = ln(x^2 + 1)$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ para } x < 0 \\ f'(x) > 0 \text{ para } x > 0 \end{array}\right\} \text{Hay un mínimo en } (0, 0).$$

- $f''(x) = \dfrac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:

$f'' < 0$	–1	$f'' > 0$	1	$f'' < 0$

Hay un punto de inflexión en $(-1, ln\ 2)$ y otro en $(1, ln\ 2)$.

6. **Halla los puntos singulares de:**

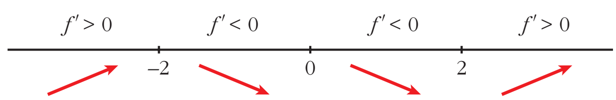
a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 15x^2(x^2 - 4) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



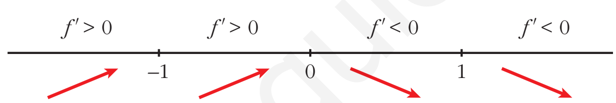
Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:



Hay un máximo en $(0, 0)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x - 6) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:

Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $\left(6, \dfrac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; x - 1 = 0 \;\to\; x = 1 \notin$ *Dominio.*

No hay puntos singulares.

Página 317

1. Representa estas funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 4x^3 - 16x$

  $$f'(x) = 0 \;\to\; 4x(x^2-4) = 0 \;\to\; \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

  Puntos singulares: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 7 \;\to\;$ Punto: $(0, 7)$

  — Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

  $$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \;\to\; x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \;\to\; x = \pm 1 \end{cases}$$

  Puntos: $\left(-\sqrt{7}, 0\right)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $\left(\sqrt{7}, 0\right)$

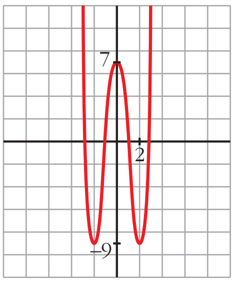
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 12x^2 - 16$

  $$f''(x) = 0 \;\to\; 12x^2 - 16 = 0 \;\to\; x^2 = \frac{4}{3} \;\to\; x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

  Puntos $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$

  Puntos: (0, 0); (2, –64); (–3, –189)

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: (0, 0)

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

  $\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 432}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \begin{cases} x \approx 2{,}86 \\ x \approx -4{,}19 \end{cases} \end{cases}$

  Puntos: (0, 0); (2,86; 0); (–4,19; 0)

- **Puntos de inflexión:**

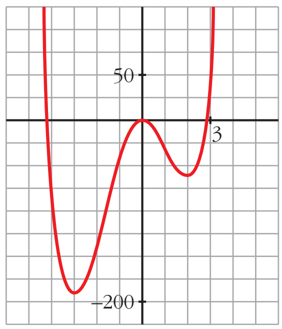
  $f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$

  $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1{,}12 \\ x \approx -1{,}79 \end{cases}$

  Puntos: (1,12; –34,82) y (–1,79; –107,22)

• **Gráfica:**



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

• **Simetrías:**

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right\}$ Puntos (1, 7); (–1, –9); (3, –9)

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ Punto: (0, 0)

— Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

$x = 0$

$x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 6) = 0$ $\begin{array}{l} x = 2 \\ x \approx 3{,}65 \\ x \approx -1{,}65 \end{array}$

Puntos: (0, 0); (2, 0); (3,65; 0); (–1,65; 0)

• **Puntos de inflexión:**

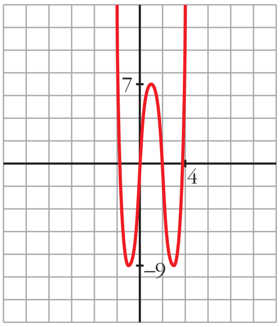
$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$

$f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \dfrac{6 \pm \sqrt{48}}{6}$ $\begin{array}{l} x \approx 2{,}15 \\ x \approx -0{,}15 \end{array}$

Puntos: (2,15; –1,83) y (–0,15; –1,74)

• **Gráfica:**



2. **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$ **b)** $y = x^3 - 3x$ **c)** $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

• **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x^2(x - 1) = 0 \;<\; \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}$

Puntos: $(0, -16)$; $(1, -17)$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = -16 \;\rightarrow$ Punto: $(0, -16)$

— Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; 3x^4 - 4x^3 - 16 = 0 \;\rightarrow$

$<$ $x = 2$

$3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \;\rightarrow$ tiene una sola raíz, que está entre -2 y -1; pues, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ y $g(-1) = 3 > 0$.

Puntos $(2, 0)$ y $(k, 0)$, con k entre -2 y -1.

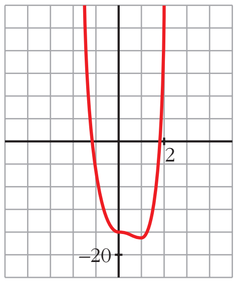
• **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 36x^2 - 24x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x(3x - 2) = 0 \;<\; \begin{matrix} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{matrix}$

Puntos: $(0, -16)$ y $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-448}{27}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = x^3 - 3x$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 3x^2 - 3$

  $f'(x) = 0 \;\to\; 3(x^2 - 1) = 0 \;\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

  Puntos: $(-1, 2)$; $(1, -2)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\;$ Punto: $(0, 0)$

  — Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; x^3 - 3x = 0 \;\to\; x(x^2 - 3) = 0$

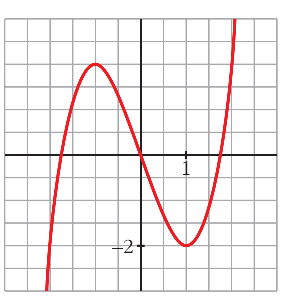
  $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right\}$ Puntos: $(0, 0)$; $(-\sqrt{3}, 0)$; $(\sqrt{3}, 0)$

- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 6x$

  $f''(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\;$ Punto $(0, 0)$

- **Gráfica:**



c) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = x^3 - 4x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(-2, -4)$; $(2, -4)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$; $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$

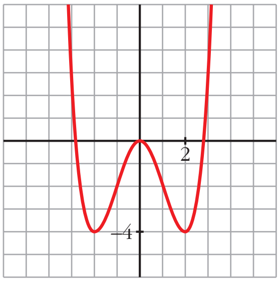
- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 3x^2 - 4$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$; $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

- **Gráfica:**



Página 319

1. Representa:

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{1 - x^2} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2} \;\to\; y = -x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (-x) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (-x) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2}$$

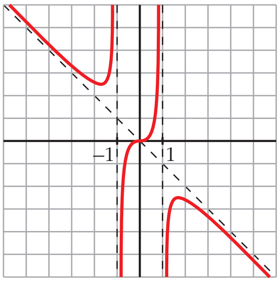
$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2(-x^2 + 3) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Cortes con los ejes:**

Corta a los ejes en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{-x}$.

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x} \;\to\; y = x - 2$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^2} > 0$ para todo x del dominio.

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

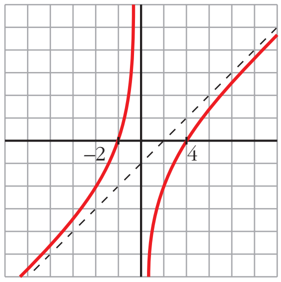
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Puntos: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

— No corta el eje Y, pues no está definida en $x = 0$.

- **Gráfica:**



2. **Representa:**

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

- **Asíntota horizontal:**

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4} \quad \to \quad y = 1$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 10x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to$ Punto: $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

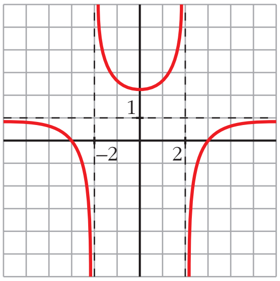
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} \rightarrow$ Punto: $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0$ $\begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \dfrac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - x < 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - x > 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por encima)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

No hay puntos singulares.

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \rightarrow$

  $\rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

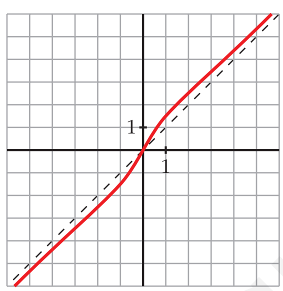
- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \Bigg\} \quad \text{Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right); \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

- **Gráfica:**



Página 321

1. Representa:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

- **Dominio:**

$$x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

  Dominio $= (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntotas oblicuas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$y = -x - 1$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$y = x + 1$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x + 1 = 0 \ \rightarrow \ x = -1$

Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

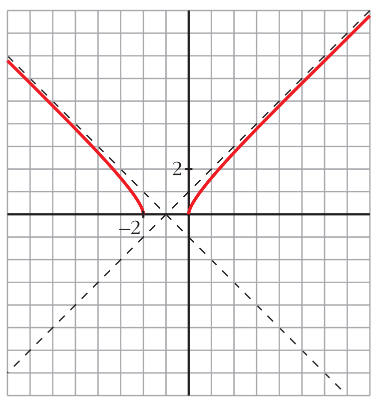
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \;\to\; y = 0 \;\to\; \sqrt{x^2 + 2x} \;\to\; x^2 + 2x = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Puntos: $(0, 0)$ y $(-2, 0)$

— Con el eje $Y \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\;$ Punto: $(0, 0)$

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

- **Dominio:**

$x^2 - 9 = 0 \;\begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Dominio $= (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 9} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntotas oblicuas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 9} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 9} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 9} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 9} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

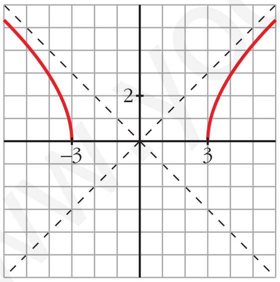
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \ \to \ y = 0 \ \to \ \sqrt{x^2 - 9} \ \to \ x^2 - 9 = 0 \ \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

— No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

- **Gráfica:**



2. **Representa:**

a) $y = ln(x^2 + 4)$ **b)** $y = ln(x^2 - 1)$

a) $y = ln\ (x^2 + 4)$

- **Dominio:**

Como $x^2 + 4 > 0$ para todo x, *Dominio* = $\mathbb{R}$.

- **Simetrías:**

$f(-x) = ln\ (x^2 + 4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2 + 4)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

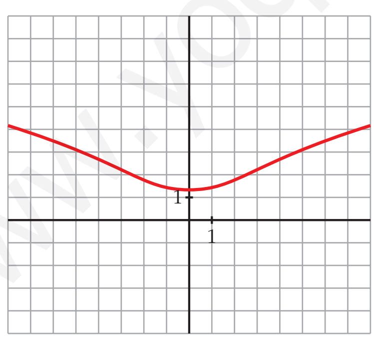
$f'(x) = 0 \;\to\; 2x = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\;$ Punto: $(0, ln\ 4)$

- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \;\to\; 8 - 2x^2 = 0 \;\to\; \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right\} \text{Puntos: } (-2,\ ln\ 8) \text{ y } (2,\ ln\ 8)$$

- **Gráfica:**



b) $y = ln\,(x^2 - 1)$

- **Dominio:**

$x^2 - 1 > 0 \;\to\;$ *Dominio* $= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetrías:**

$f(-x) = ln\,(x^2 - 1) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en $x = 0$.

- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

No tiene puntos de inflexión.

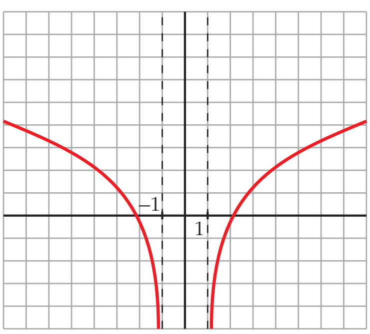
- **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow ln\,(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1$

$$x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \Bigg\} \text{ Puntos: } \left(-\sqrt{2},\, 0\right) \text{ y } \left(\sqrt{2},\, 0\right)$$

— No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

- **Gráfica:**



Página 322

3. Representa:

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ **b)** $y = \dfrac{e^{-x}}{-x}$ **c)** $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \cos x$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

- **Dominio:** $D = \mathbb{R} - \{0\}$
- **No es simétrica.**
- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Además, $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

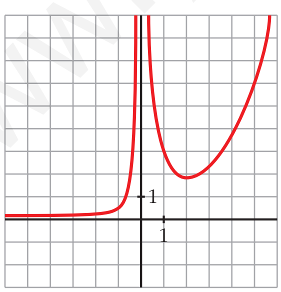
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Rama parabólica.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 2 \quad \to \quad \text{Punto } \left(2, \frac{e^2}{4}\right)$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{e^{-x}}{-x}$

- **Dominio**: $D = \mathbb{R} - \{0\}$
- **No es simétrica.**

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Rama parabólica.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. $f(x) < 0$ para todo x positivo.

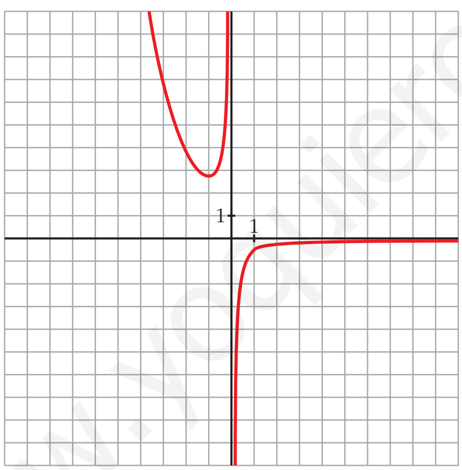
  $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(-x)^2} = \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

  $f'(x) = 0 \;\to\; x = -1 \;\to\;$ Punto: $(-1, -e)$

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{1}{2} \cos 2x + \cos x$

- El período de $\cos x$ es 2π y el de $sen\ 2x$ es π. Por tanto, la función es periódica de período 2π. La estudiamos solo en este intervalo.

- Es **derivable** en todo $\mathbb{R}$ (es suma de funciones derivables).

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = -sen\ 2x - sen\ x = -2sen\ x \cos x - sen\ x = -sen\ x\ (2\cos x + 1)$

  $$f'(x) = 0 \;\to\; -sen\ x(2\cos x + 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} sen\ x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$sen\,x = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(0, \dfrac{3}{2}\right) \\ x = \pi \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(\pi, -\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$cos\,x = -\frac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{3}{4}\right) \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto: } \left(\dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

- **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = \dfrac{3}{2} \;\rightarrow\;$ Punto: $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

— Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; cos\,2x + 2cos\,x = 0$

$$cos^2 x - sen^2 x + 2cos\,x = 0$$

$$cos^2 x - (1 - cos^2 x) + 2cos\,x = 0$$

$$cos^2 x - 1 + cos^2 x + 2cos\,x = 0$$

$$2cos^2 x + 2cos\,x - 1 = 0$$

$$cos\,x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} \begin{cases} cos\,x = 0{,}366 \\ cos\,x = -1{,}366 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$cos\,x = 0{,}366 \begin{cases} x = 1{,}2 \\ x = 5{,}09 \end{cases}$$

Puntos: (1,2; 0); (5,09; 0)

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -2cos\,2x - cos\,x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; -2cos\,2x - cos\,x = 0$

$$-2(cos^2 x - sen^2 x) - cos\,x = 0$$

$$-2cos^2 x + 2sen^2 x - cos\,x = 0$$

$$-2cos^2 x + 2(1 - cos^2 x) - cos\,x = 0$$

$$-2cos^2 x + 2 - 2cos^2 x - cos\,x = 0$$

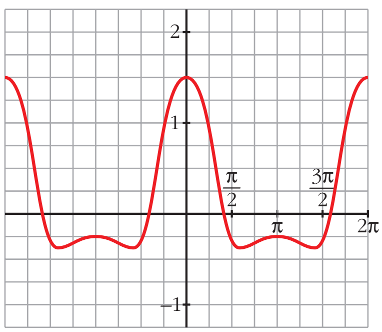
$$-4cos^2 x - cos\,x + 2 = 0$$

$$cos\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{-8} \begin{cases} cos\,x = -0{,}843 \\ cos\,x = 0{,}593 \end{cases}$$

$$\cos x = -0{,}843 \begin{cases} x = 2{,}57 \\ x = 3{,}71 \end{cases} \qquad \text{Puntos:} \quad (2{,}57; -0{,}63) \quad (3{,}71; -0{,}63)$$

$$\cos x = 0{,}593 \begin{cases} x = 0{,}94 \\ x = 5{,}35 \end{cases} \qquad (0{,}94; 0{,}44) \quad (5{,}35; 0{,}45)$$

- **Gráfica:**



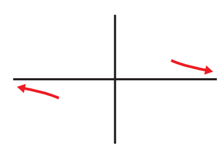
Página 323

1. ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen?

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{3x}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{x^4}{x+1}$

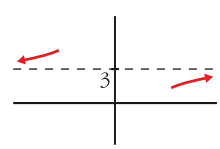
a) $y = \dfrac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \;\to\;$ Asíntota horizontal: $y = 0$

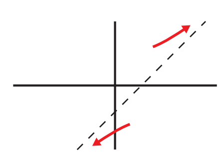


b) $y = \dfrac{3x}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3 \;\to\;$ Asíntota horizontal: $y = 3$

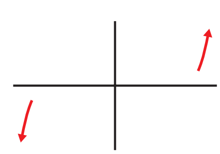


c) $y = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} \;\to\;$ Asíntota oblicua: $y = x - 1$



d) $y = \dfrac{x^4}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$



2. **¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen?**

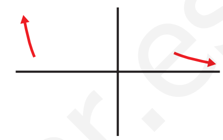
a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$ **c)** $y = x + \sqrt{x}$

d) $y = tg\ x$ **e)** $y = x\ sen\ x$ **f)** $y = x - cos\ x$

a) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

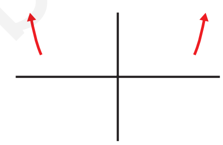
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Rama parabólica.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Asíntota horizontal: $y = 0$



b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

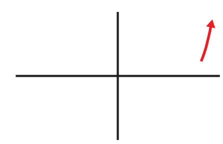


c) $y = x + \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe, pues solo está definida en $[0, +\infty)$.

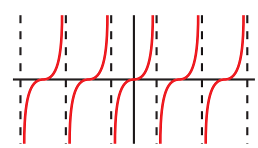
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\sqrt{x}}{x}\right) = 1 = m$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$



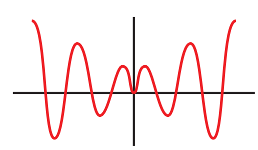
d) $y = tg\ x$

No existen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ni $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.



e) $y = x\ sen\ x$

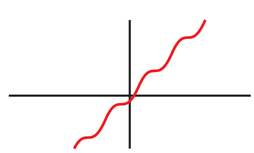
No existen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ni $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.



f) $y = x - cos\ x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - cos\ x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + sen\ x}{1}$ no existe

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - cos\ x}{x}$ no existe



Página 325

1. Representa:

a) $y = x - |x - 3| + |x + 1|$

b) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$

c) $y = |x - 5|x$

a) Intervienen dos valores absolutos, $|x + 1|$ y $|x - 3|$, que cambian de signo en las abscisas $x = -1$ y $x = 3$, respectivamente.

Por tanto:

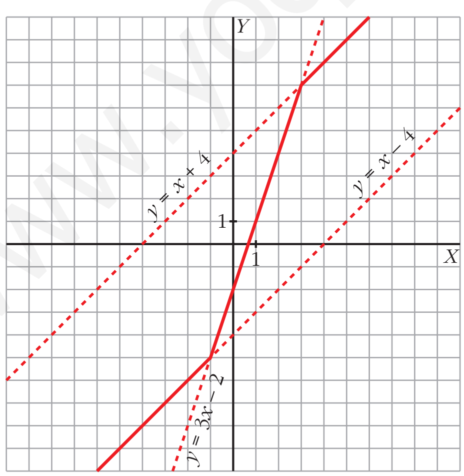
$x < -1$, $|x + 1| = -x - 1$ y $|x - 3| = -x + 3 \;\rightarrow\; y = x + x - 3 - x - 1 = x - 4$

$-1 \le x < 3$, $|x + 1| = x + 1$ y $|x - 3| = -x + 3 \;\rightarrow\; y = x + x - 3 + x + 1 = 3x - 2$

$x \ge 3$, $|x + 1| = x + 1$ y $|x - 3| = x - 3 \;\rightarrow\; y = x - x + 3 + x + 1 = x + 4$

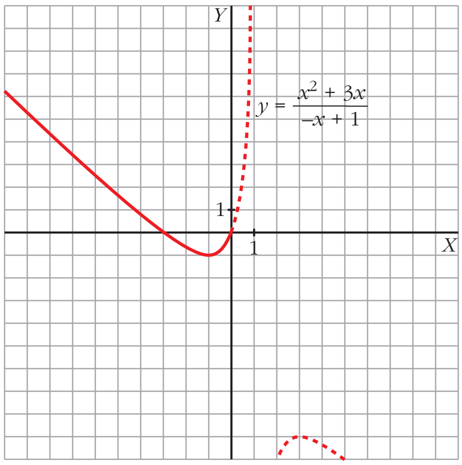
Representamos, pues, esta función:

$$y = x - |x - 3| + |x + 1| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

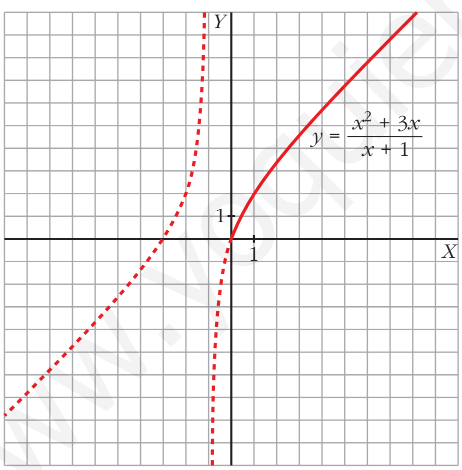


b) El único valor absoluto que interviene es $|x|$. La abscisa en donde cambia de signo x es 0. Por tanto:

$$x < 0, \quad |x| = -x \;\rightarrow\; y = \frac{x^2 + 3x}{-x + 1}$$

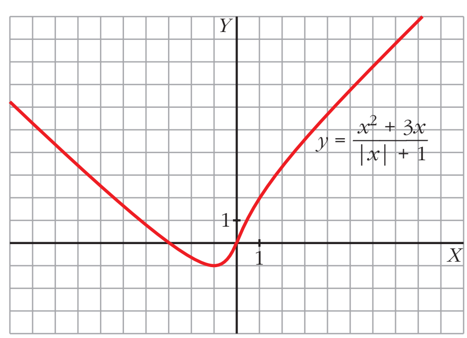


$$x \geq 0, \quad |x| = x \;\rightarrow\; y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$



Representamos, pues, esta función:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1} = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x}{-x + 1} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

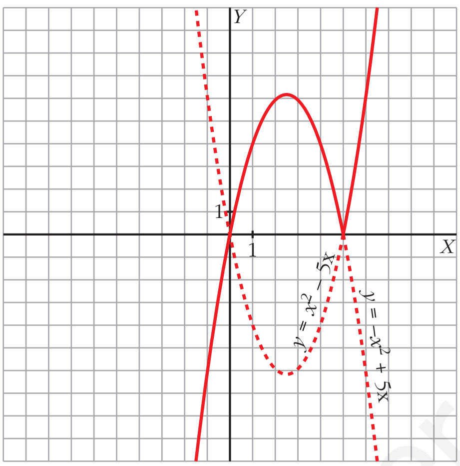


c) El único valor absoluto que interviene es $|x - 5|$. La abscisa donde cambia de signo $x - 5$ es 5. Por tanto, analizamos cómo queda la función a la izquierda y a la derecha de 5:

$x < 5 \rightarrow |x - 5| = -x + 5 \rightarrow y = (-x + 5)x = -x^2 + 5x$

$x \geq 5 \rightarrow |x - 5| = x - 5 \rightarrow y = (x - 5)x = x^2 - 5x$

$$y = |x - 5|x = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } x < 5 \\ x^2 - 5x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

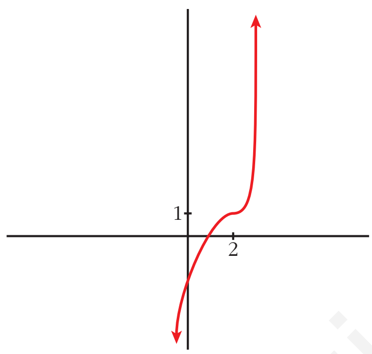
PARA PRACTICAR

Descripción de una gráfica

1 **Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$f(2) = 1$, $f'(x) \geq 0$ **para cualquier** x.



2 **De una función** $y = f(x)$ **tenemos esta información:**

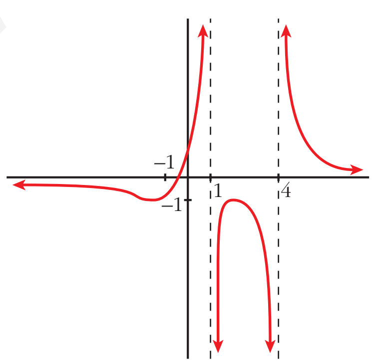
$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$)

$f'(2) = 0$, $f(2) = -1$; $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -1$

Represéntala.

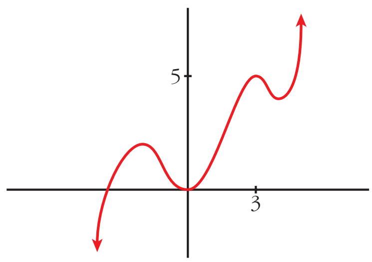


3 **Dibuja la gráfica de una función de la que se conocen las siguientes propiedades:**

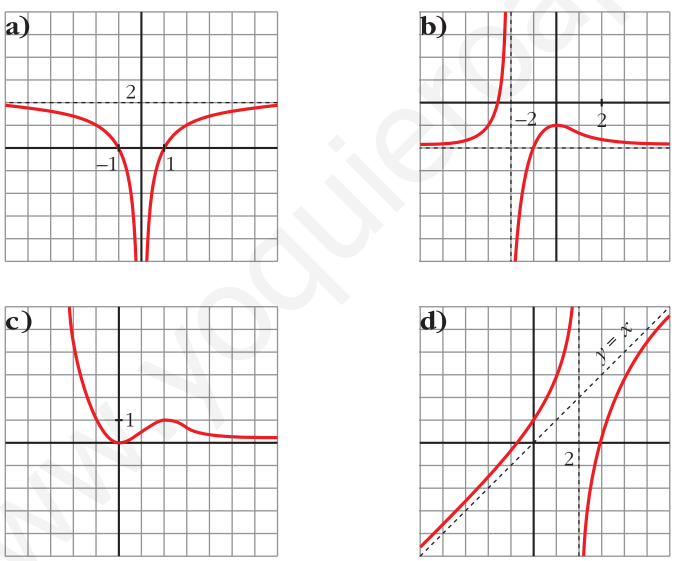
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = 0$ **si** $x = -2,\ x = 0,\ x = 3,\ x = 4$

$f(-2) = 2;\ f(0) = 0;\ f(3) = 5;\ f(4) = 4$



4 **Describe las siguientes funciones indicando sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**



a) • Asíntotal horizontal: $y = 2$. Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

• $f(x)$ no tiene puntos singulares.

• Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

b) • Asíntotal horizontal: $y = -2$. Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

• Puntos singulares: $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$

• Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal si $x \to +\infty$: $y = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

• Puntos singulares:

$f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$

$f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$

• Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

• Asíntota oblicua: $y = x$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

• No tiene puntos singulares.

• Creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

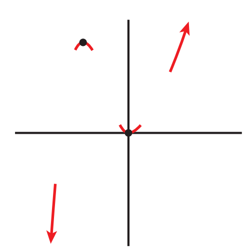
Funciones polinómicas

5 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 3x^2$ **b)** $y = x^3 - 3x^2 + 5$ **c)** $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$

d) $y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$ **e)** $y = x^5 - 5x^3$ **f)** $y = (x-1)^3 - 3x$

a) $y = x^3 + 3x^2$



• Ramas infinitas:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

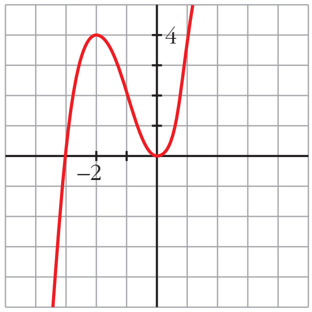
• Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 + 6x$; $3x^2 + 6x = 0 \to x(3x + 6) = 0$

$x = 0$, $f(0) = 0 \to (0, 0)$ es un mínimo.

$x = -2$, $f(-2) = -8 + 3 \cdot 4 = 4 \to (-2, 4)$ es un máximo.

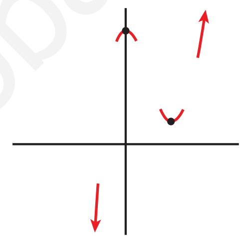
- Representación:



b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



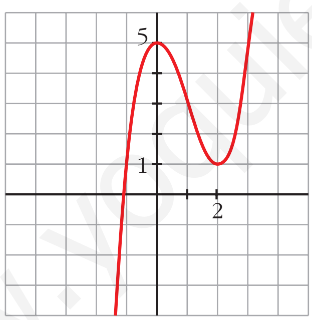
- Puntos singulares:

$$f(x) = 3x^2 - 6x; \quad 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(3x - 6) = 0$$

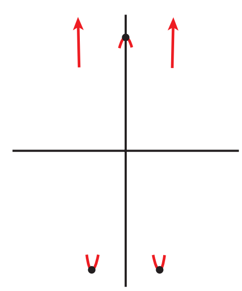
$x = 0$, $f(0) = 5 \rightarrow (0, 5)$ es un máximo.

$x = 2$, $f(2) = 1 \rightarrow (2, 1)$ es un mínimo.

- Representación:



c) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9}{2}x^2 + 10$



- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

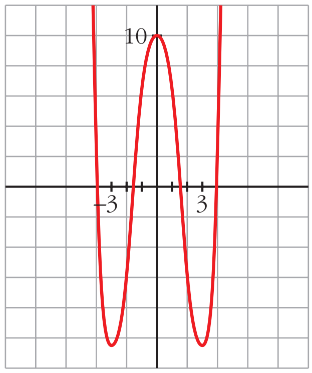
$$f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{9}{2} \cdot 2x = x^3 - 9x; \quad x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 9) = 0$$

$x = 0$, $f(0) = 10 \rightarrow$ Máximo en $(0, 10)$.

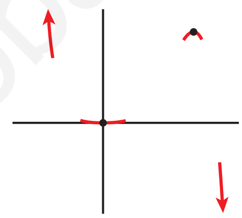
$x = 3$, $f(3) = -41/4 \rightarrow$ Mínimo en $(3, -41/4)$.

$x = -3$, $f(-3) = -41/4 \rightarrow$ Mínimo en $(3, -41/4)$.

- Representación:



d) $y = \dfrac{5x^4 - x^5}{64}$



- Ramas infinitas:

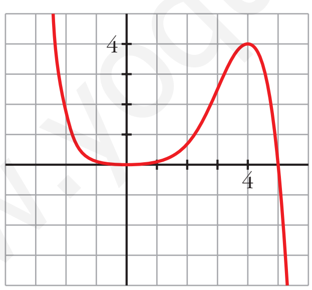
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

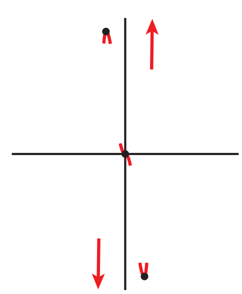
$f'(x) = \dfrac{1}{64}(20x^3 - 5x^4); \quad \dfrac{1}{64}(20x^3 - 5x^4) = 0 \ \to$

$\to \ x^3(20 - 5x) = 0 \ \begin{cases} x = 0, \ f(0) = 0 \ \to \ \text{Mínimo en } (0, 0). \\ x = 4, \ f(4) = 4 \ \to \ \text{Máximo en } (4, 4). \end{cases}$

- Representación:



e) $y = x^5 - 5x^3$



- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

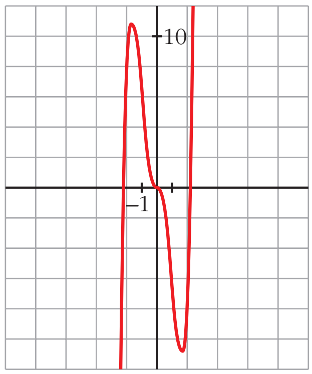
- Puntos singulares:

$f'(x) = 5x^4 - 15x^2; \quad 5x^4 - 15x^2 = 0 \ \to \ 5x^2(x^2 - 3) = 0$

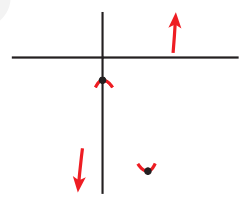
$\begin{cases} x = 0 \ \to \ f(0) = 0 \\ x = \sqrt{3} \ \to \ f(\sqrt{3}) = \sqrt{3^5} - 5\sqrt{3^3} = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \ \to \ f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3^5} + 5\sqrt{3^3} = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{cases}$

Tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right)$, un mínimo en $\left(\sqrt{3}, -6\sqrt{3}\right)$ y un punto de inflexión en (0, 0).

- Representación:



f) $y = (x-1)^3 - 3x$



- Ramas infinitas:

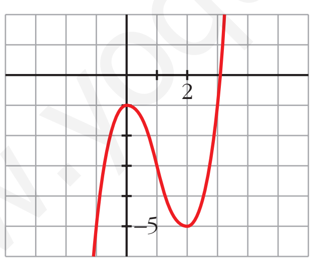
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3(x-1)^2 - 3; \;\; 3(x-1)^2 - 3 = 0 \;\to$

$\to \;(x-1)^2 = 1 \;\Big<\; \begin{array}{l} x = 0, \;\; f(0) = -1 \;\to\; \text{Máximo en } (0, -1) \\ x = 2, \;\; f(2) = -5 \;\to\; \text{Mínimo en } (2, -5) \end{array}$

- Representación:

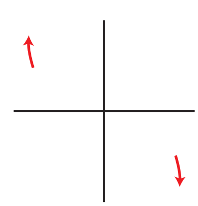


6 **Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Represéntalas gráficamente:**

a) $\boldsymbol{y = 3 + (2-x)^3}$ **b)** $\boldsymbol{y = 2 - (x-3)^4}$

c) $\boldsymbol{y = (x+1)^6 - 5}$ **d)** $\boldsymbol{y = 3 - (1-x)^3}$

a) $y = 3 + (2-x)^3$



- Ramas infinitas $\Big< \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{array}$

- Puntos singulares:

$f'(x) = -3(2 - x)^2;\ \ -3(2 - x)^2 = 0 \ \rightarrow\ x = 2;\ f(2) = 3$

Signo de f': $f' < 0$ | 2 | $f' < 0$

f es decreciente en $\mathbb{R}$.

No tiene máximos ni mínimos.

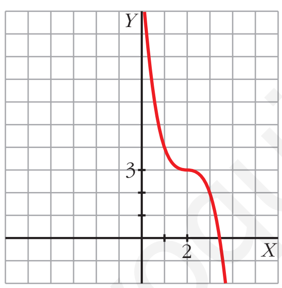
Puntos de inflexión:

$f''(x) = 6(2 - x);\ \ 6(2 - x) = 0 \ \rightarrow\ x = 2;\ f(2) = 3$

Signo de f'': $f'' > 0$ | 2 | $f'' < 0$

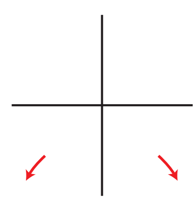
El punto (2, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal ($f''(2) = 0$ y $f'(2) = 0$).

- Gráfica:



b) $y = 2 - (x - 3)^4$

- Ramas infinitas $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$



- Puntos singulares:

$f'(x) = -4(x - 3)^3;\ \ -4(x - 3)^3 = 0 \ \rightarrow\ x = 3;\ f(3) = 2$

Signo de f': $f' > 0$ | 3 | $f' < 0$

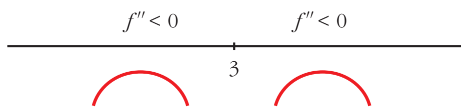
f es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$.

Tiene un máximo en (3, 2).

Puntos de inflexión:

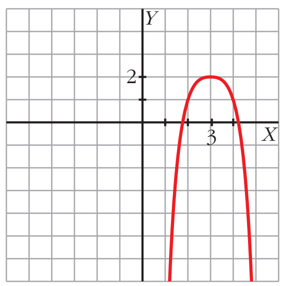
$f''(x) = -12(x-3)^2; \ \ -12(x-3)^2 = 0 \ \rightarrow \ x = 3; \ f(3) = 2$

Signo de f'':



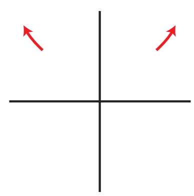
No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:



c) $y = (x+1)^6 - 5$

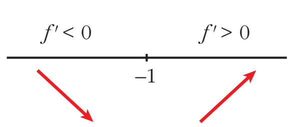
- Ramas infinitas $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$f'(x) = 6(x+1)^5; \ \ 6(x+1)^5 = 0 \ \rightarrow \ x = -1; \ f(-1) = -5$

Signo de f':



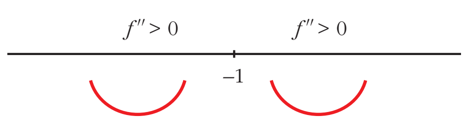
Decreciente en $(-\infty, -1)$. Creciente en $(-1, +\infty)$.

Mínimo en $(-1, -5)$.

Puntos de inflexión:

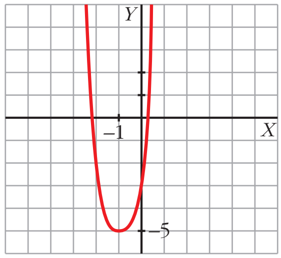
$f''(x) = 30(x+1)^4; \ \ 30(x+1)^4 = 0 \ \rightarrow \ x = -1; \ f(-1) = -5$

Signo de f'':



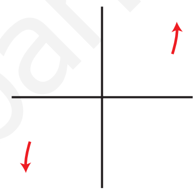
No tiene puntos de inflexión.

• Gráfica:



d) $y = 3 - (1 - x)^3$

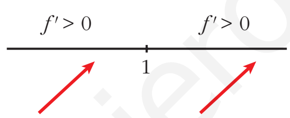
• Ramas infinitas $\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$



• Puntos singulares:

$f'(x) = 3(1 - x)^2$; $3(1 - x)^2 = 0 \rightarrow x = 1$; $f(1) = 3$

Signo de f':



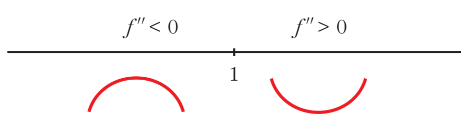
f es creciente en $\mathbb{R}$.

No tiene máximos ni mínimos.

Puntos de inflexión:

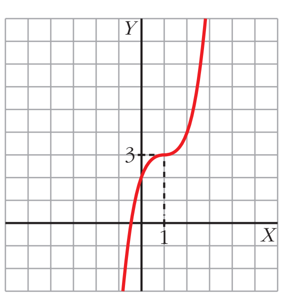
$f''(x) = -6(1 - x)$; $-6(1 - x) = 0 \rightarrow x = 1$; $f(1) = 3$

Signo de f'':



(1, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal, puesto que $f'(1) = 0$.

• Gráfica:



Funciones racionales

7 **En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:**

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

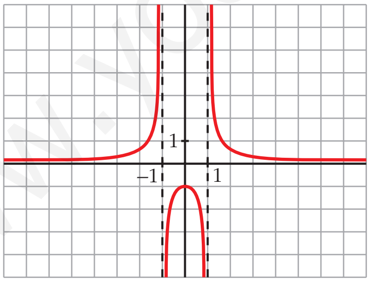
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

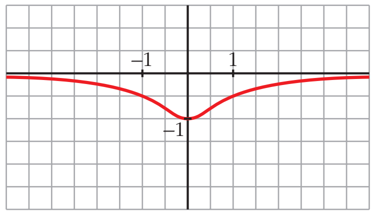
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

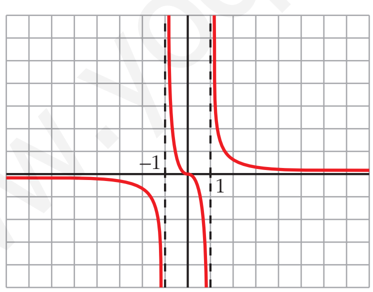
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = -1$ es asíntota vertical.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 1$ es asíntota vertical.

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

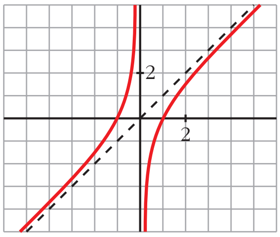
- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ $x = 0$ es asíntota vertical.

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

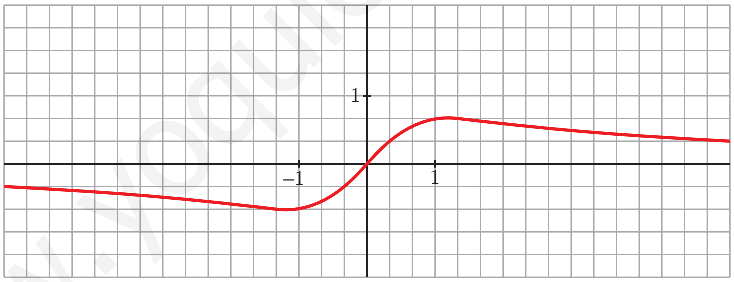
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

- **Dominio:**

$x^2 + x + 1 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \quad \to$ No tiene solución.

$D = \mathbb{R}$

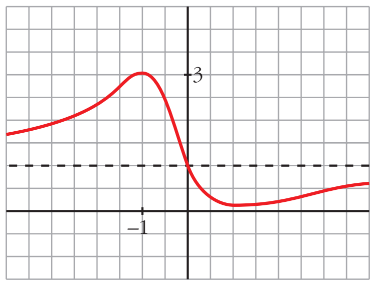
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

• **Gráfica:**



8 **Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, posición y extremos relativos:**

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$ **b)** $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ **d)** $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

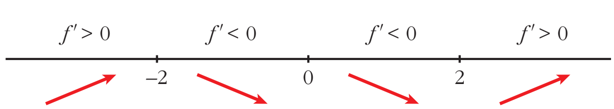
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \frac{2x^2-8}{x^2} = 0 \;\to\; x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



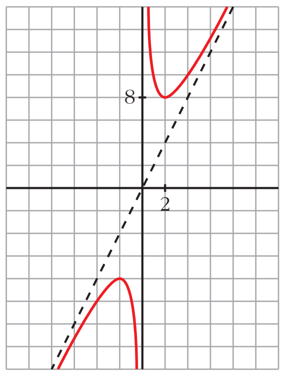
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -8)$.

tiene un mínimo en $(2, 8)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

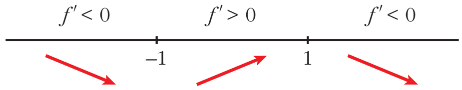
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 1$

Signo de $f'(x)$:

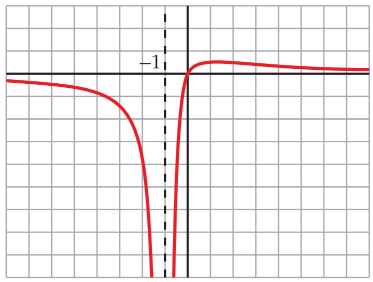


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

es creciente en $(-1, 1)$.

tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 12) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{array}\right.$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↗	$-\sqrt{12}$	↘	-2	↘	0	↘	2	↘	$\sqrt{12}$	↗

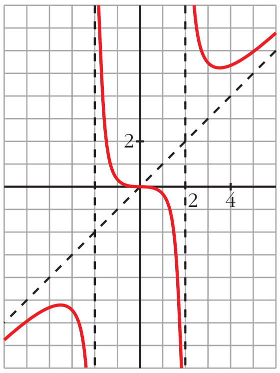
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$.

es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$.

tiene un máximo en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$.

tiene un mínimo en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$.

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 1$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x(x-2) = 0 \;\left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	0	$f' < 0$	1	$f' < 0$	2	$f' > 0$
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

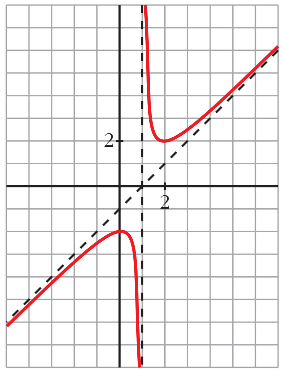
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

tiene un máximo en $(0, -2)$.

tiene un mínimo en $(2, 2)$.

- **Gráfica:**



Funciones "a trozos"

9 **Representa esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. ¿Tiene algún punto de inflexión?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$, es una parábola abierta hacia abajo:

  Vértice: $f'(x) = -2x - 2$; $-2x - 2 = 0 \to x = -1$, $f(-1) = 3$

  Cortes con el eje X: $-x^2 - 2x + 2 = 0 \to x^2 + 2x - 2 = 0 \to x = -\dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2}$

  $x \approx 0{,}73$ (no vale por ser $0{,}73 > 0$)

  $x \approx -2{,}73$

- Si $x \geq 0$, es una parábola abierta hacia arriba:

  Vértice: $f'(x) = 2x - 2$; $2x - 2 = 0 \to x = 1$, $f(1) = 1$

  Cortes con el eje X: $x^2 - 2x + 2 = 0 \to x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \to$ No tiene solución.

  No corta al eje X.

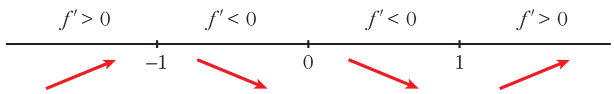
  Corte con el eje Y: $0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \to (0, 2)$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  $f'(0^-) = -2 = f'(0^+)$ Es derivable en $x = 0$.

- Signo de $f'(x)$:



Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Decrece en $(-1, 1)$.

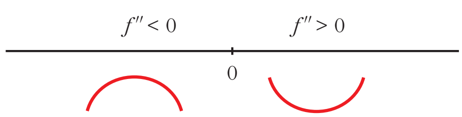
Tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, 1)$.

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$. No existe $f''(0)$.

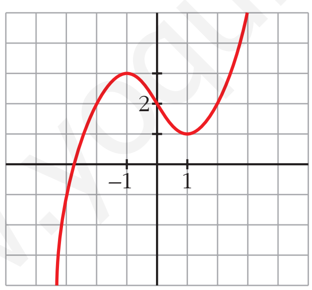
Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

En $(0, 2)$ tiene un punto de inflexión.

- Representación:



Página 332

10 **Representa la siguiente función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Continuidad:

  Si $x \neq 0$, f es continua por estar definida por polinomios.

  Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} x^3 - 3x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1 \\ f(0) = (0-1)^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ Como } \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0), \ f \text{ es continua en } x = 0.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

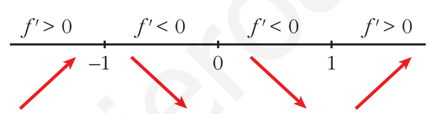
$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2(x-1) & \text{si } x > 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = -2 \end{array}\right\}$$

  Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, f no es derivable en $x = 0$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \ \ (\text{no vale porque tiene que ser } x < 0) \\ x = -1, \ f(-1) = 3 \end{cases} \\ 2(x-1) = 0 \ \ \rightarrow \ \ x = 1, \ f(1) = 0 \end{cases}$$

  Signo de f':



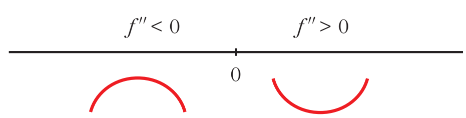
  Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-1, 1)$.
  Máximo en $(-1, 3)$. Mínimo en $(1, 0)$.

- Curvatura:

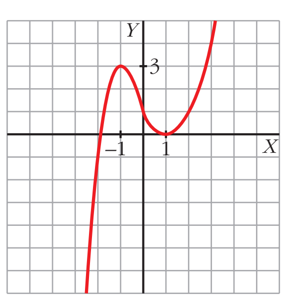
$$f''(x) = \left\{\begin{array}{ll} 6x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f''(0^-) = 0 \\ f''(0^+) = 2 \end{array}\right\}$$

  $f''(0^-) \neq f''(0^+)$. Por tanto, no existe $f''(0)$.

  Signo de f'':



  Hay un punto de inflexión en $(0, 1)$.



PARA RESOLVER

11 **Representa las siguientes funciones, estudiando:**

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

— Crecimiento y extremos relativos.

a) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$ **b)** $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$ **c)** $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

d) $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

g) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$ **h)** $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$ **i)** $y = \dfrac{x^3}{x + 2}$

j) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x - 1}$

a) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x - 12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; -4x + 16 = 0 \;\to\; x = 4$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$ | $f' > 0$ | $f' < 0$

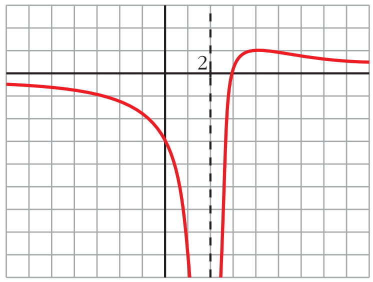
$\searrow$ -2 $\nearrow$ 2 $\searrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$.

es creciente en $(2, 4)$.

tiene un máximo en $(4, 1)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x-2-2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -x-2 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$

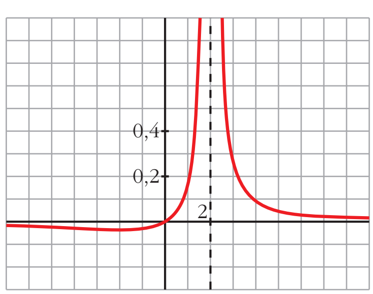
Signo de $f'(x)$: $f' < 0$ $\searrow$ -2 $f' > 0$ $\nearrow$ 2 $f' < 0$ $\searrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es creciente en $(-2, 2)$.

tiene un mínimo en $\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = x - 2 - \dfrac{1}{x-2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 2$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

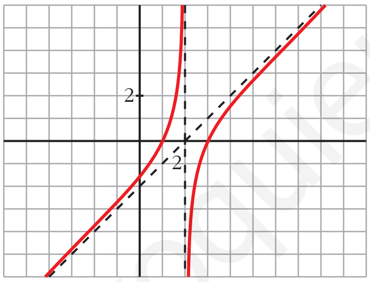
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad (x-2)^2 + 1 = 0 \quad \to \quad$ no tiene solución

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \quad \to \quad f(x)$ es creciente en todo su dominio.

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 18x = 0 \ \rightarrow \ x = 0$

Signo de $f'(x)$:

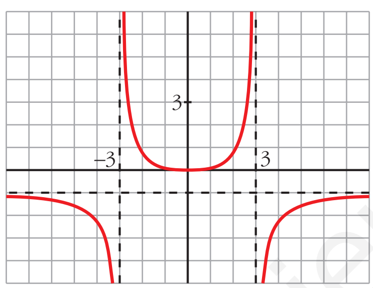
$f' < 0$ | -3 | $f' < 0$ | 0 | $f' > 0$ | 3 | $f' > 0$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x^2 - 4 = 0 \ \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$ | -2 | $f' < 0$ | 0 | $f' < 0$ | 2 | $f' > 0$

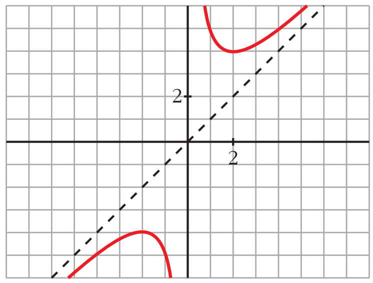
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -4)$.

tiene un mínimo en $(2, 4)$.

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

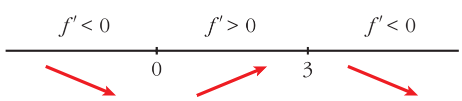
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\; \rightarrow \;\; -6x = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

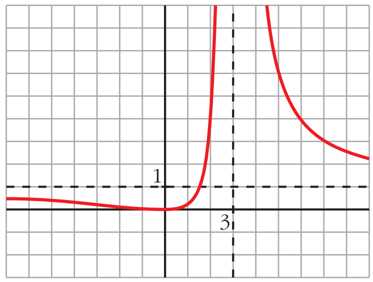


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

es creciente en $(0, 3)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2x$).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

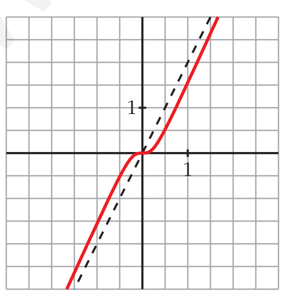
$f'(x) = 0 \;\to\; 2x^2(x^2+3) = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

$f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

• **Gráfica:**



h) $y = \dfrac{x^4}{x^2-4}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^3(x^2 - 8) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↘	$-\sqrt{8}$	↗	-2	↗	0	↘	2	↘	$\sqrt{8}$	↗

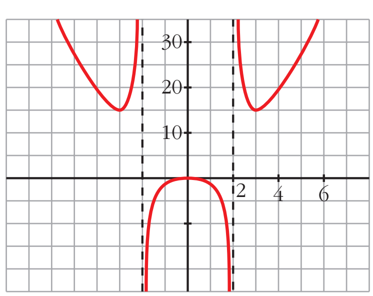
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$.

es creciente en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(-\sqrt{8}, 16)$ y otro en $(\sqrt{8}, 16)$.

tiene un máximo en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



i) $y = \dfrac{x^3}{x + 2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \ \text{ es asíntota vertical.}$$

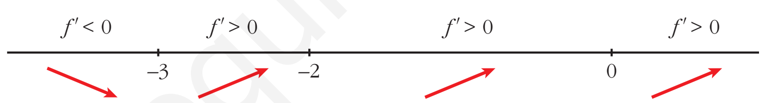
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x + 2) - x^3}{(x + 2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x + 2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x + 3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Signo de $f'(x)$:



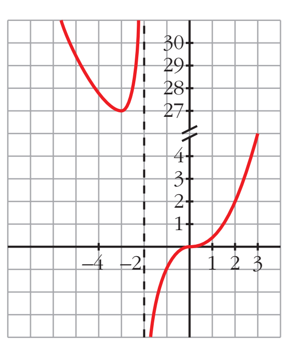
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$.

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(-3, 27)$.

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



j) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

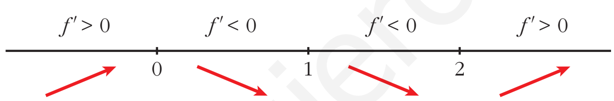
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 3$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:



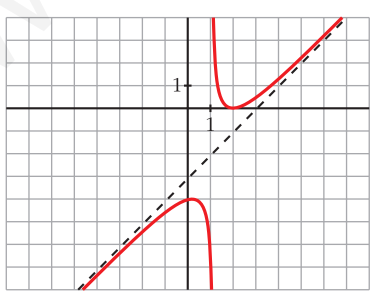
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

tiene un máximo en $(0, -4)$.

tiene un mínimo en $(2, 0)$.

- **Gráfica:**



s12 **a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x}$.**

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f.

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \;\to\; x = 0$ es asíntota vertical.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x} \;\to\; y = x$ es asíntota oblicua.

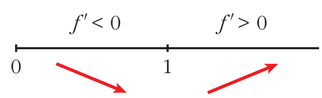
(Si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; x^2 - 1 = 0 \;\begin{cases} x = -1 \;\text{ (no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$

($x = -1$ no vale, pues $f(x)$ está definida solamente para $x > 0$).

Signo de $f'(x)$:



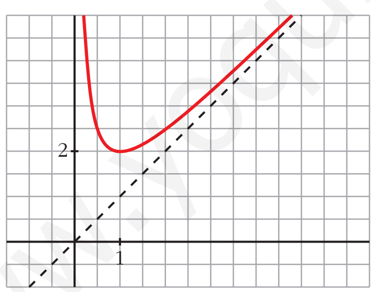
$f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$.

es creciente en $(1, +\infty)$.

tiene un mínimo (local y global) en $(1, 2)$.

no tiene un máximo.

c)



s13 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, se pide:**

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Dibuja la gráfica de f.

a) • **Dominio:** $\mathbb{R}$ (porque $x^2 + 1 > 0$ para todo x).

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales porque el denominador no se anula para ningún valor de x.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

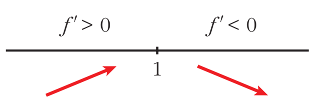
$y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -1)$.

$y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 1)$.

b) $$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$f'(x) = 0 \ \to \ 1 - x = 0 \ \to \ x = 1$

Signo de $f'(x)$:

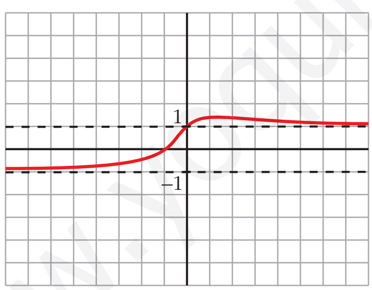


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

es decreciente en $(1, +\infty)$.

tiene un máximo en $(1, \sqrt{2})$.

c)



s14 **Representa gráficamente la función:**

$$\boldsymbol{p(x) = x^4 + (4/3)x^3 + 2x^2 - 2}$$

¿Cuántas raíces reales tiene este polinomio $p(x)$?

$p(x) = x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$

- $\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

- $p'(x) = 4x^3 + 4x^2 + 4x = 4x(x^2 + x + 1)$

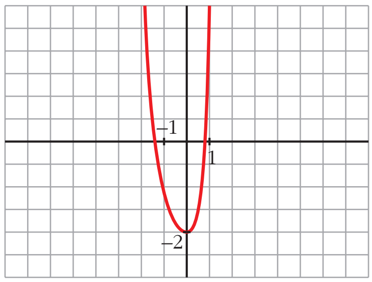
  $p'(x) = 0 \ \to \ x = 0 \ \to$ Hay un punto singular en $(0, -2)$.

- $p''(x) = 12x^2 + 8x + 4 = 4(3x^2 + 2x + 1)$

  $p''(x) = 0 \;\to\; x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{6} \;\to\;$ no tiene solución.

  $p(x)$ no tiene puntos de inflexión.

- **Gráfica:**



- $f(x)$ tiene dos raíces reales.

s15 **Dadas las siguientes funciones, halla sus asíntotas, estudia el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos. Dibuja su gráfica:**

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2-3}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{4x^2+1}$

c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2-4} - x - 2$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2-3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -\sqrt{3} \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = \sqrt{3} \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2-3} = 0 \;\to\; y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \to -\infty$$
$(f(x) > 0)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \;\to\; \text{Rama parabólica}$$

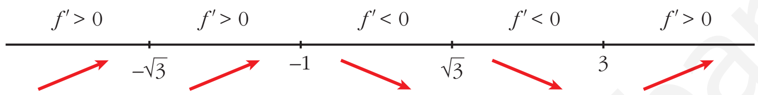
- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2-3) - e^x \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x = 3,\; f(3) = e^3/6$$
$$x = -1,\; f(-1) = -1/2e$$

Signo de $f'(x)$:

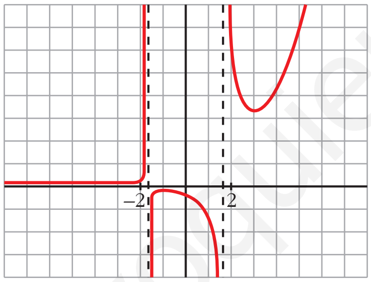


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -1) \cup (3, +\infty)$.

es decreciente en $(-1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$.

tiene un máximo en $\left(-1, \frac{-1}{2e}\right)$. Tiene un mínimo en $\left(3, \frac{e^3}{6}\right)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3}{4x^2+1} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{(1/4)x}{4x^2+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = \frac{1}{4}x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > \frac{1}{4}x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < \frac{1}{4}x$)

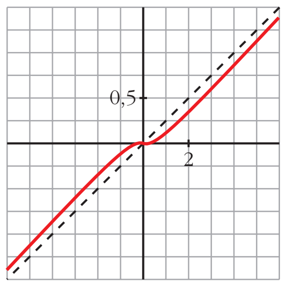
- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2+1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2+1)^2} = \frac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(4x^2+3) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 0 \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente (tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$).

- **Gráfica:**



c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

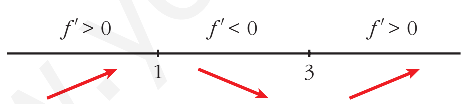
(Si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; (x-1)^3 = 8 \;\rightarrow\; x - 1 = 2 \;\rightarrow\; x = 3$

Signo de $f'(x)$:

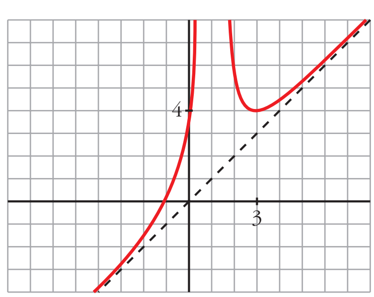


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

es decreciente en $(1, 3)$.

tiene un mínimo en $(3, 4)$.

- **Gráfica:**



d) $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

- **Dominio:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} + x - 2\right] = +\infty$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + x - 2}{-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} + x - 2 - 2x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - x - 2\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)\right]\left[\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)\right]}{\left[\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)\right]} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x - 8}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$y = -2x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$(f(x) < -2x - 2)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - x - 2\right] = -2$$

$y = -2$ es asíntota horizontal.

$(f(x) < -2)$

- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$.

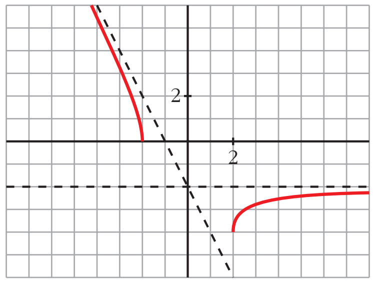
$f'(x) = 0 \;\to\; x - \sqrt{x^2 - 4} = 0 \;\to\; x = \sqrt{x^2 - 4} \;\to\; x = x^2 - 4 \;\to$

$\to$ no tiene solución $\to$ no hay puntos singulares

Signo de $f'(x)$:

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

• **Gráfica:**



16 **Estudia los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **c)** $y = sen\ x + cos\ x$ **para** $0 \le x \le 2\pi$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\ x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$

$\rightarrow$ no hay máximos ni mínimos

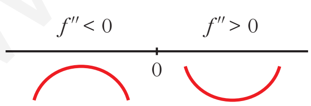
$f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente

- $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x - \dfrac{1}{e^x} = 0 \rightarrow e^{2x} - 1 = 0 \rightarrow$

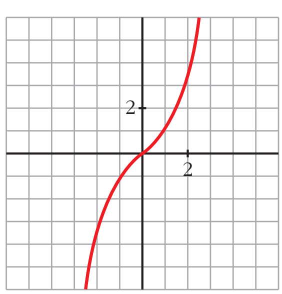
$\rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**

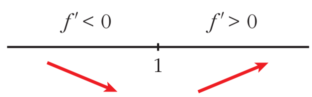


b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\ x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow\ e^x - e^{-x} = 0 \ \rightarrow\ x = 0 \ \rightarrow\ y = 1$

  Signo de $f'(x)$:

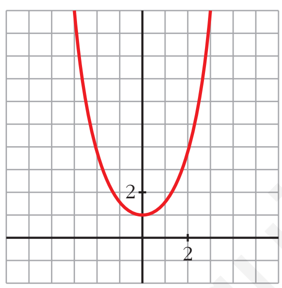


  Hay un mínimo en $(0, 1)$.

- $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \ \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$ no hay puntos de inflexión

- **Gráfica:**

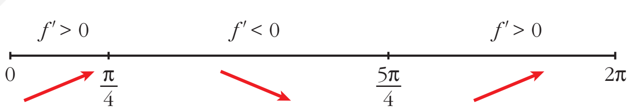


c) $y = sen\ x + cos\ x$ para $0 \le x \le 2\pi$

- $f'(x) = cos\ x - sen\ x$

  $$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ cos\ x = sen\ x \ \rightarrow\ tg\ x = 1 \ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

  Signo de $f'(x)$:



  Hay un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

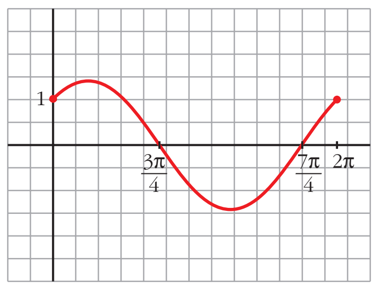
- $f''(x) = -sen\ x - cos\ x$

  $$f''(x) = 0 \ \rightarrow\ sen\ x = -cos\ x \ \rightarrow\ tg\ x = -1 \ \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:

Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$, y otro en $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$.

- **Gráfica:**



17 **Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de las siguientes funciones y, con esa información, trata de encontrar su gráfica entre las siguientes:**

a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

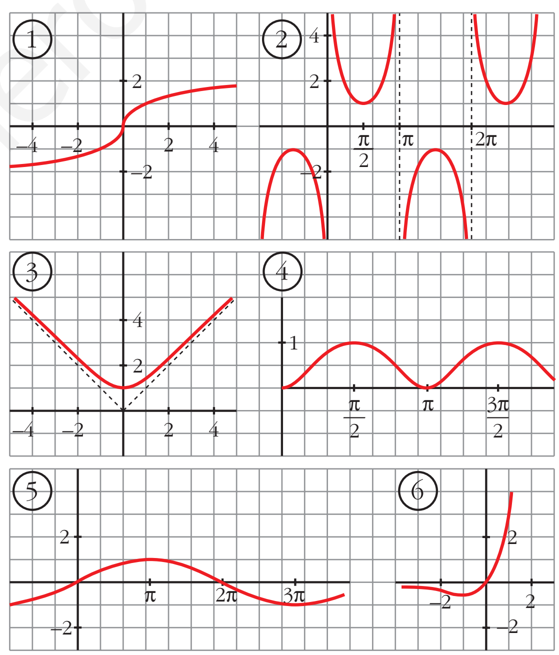
b) $y = x\,e^{x}$

c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

d) $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = sen^2\ x$



a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

- **Dominio:**

$sen\ x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

$D = \mathbb{R} - \{\pi k\}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- **Asíntotas:**

  $x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

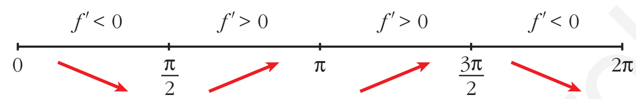
  No hay más asíntotas.

- **Extremos:**

  $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{sen^2\, x}$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow\ \cos x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{array} \right\}\ (k \in \mathbb{Z})$

  Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



  $f(x)$ es periódica de período 2π.

  $f(x)$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

  es creciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

  tiene un mínimo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

  tiene un máximo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 2

b) $y = xe^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \ \rightarrow \ \text{Rama parabólica}$$

- **Extremos:**

  $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow\ 1 + x = 0 \ \rightarrow\ x = -1$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccc} f' < 0 & & f' > 0 \\ \hline \searrow & -1 & \nearrow \end{array}$$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$.

es creciente en $(-1, +\infty)$.

tiene un mínimo en $\left(-1, \dfrac{-1}{e}\right)$.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 6

c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ cos\ \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad cos\ \frac{x}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \rightarrow \quad x = \pi + 2\pi k$$

$f(x)$ es periódica de período 4π.

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & f' > 0 & & f' < 0 & & f' > 0 & \\ \hline 0 & \nearrow & \pi & \searrow & 3\pi & \nearrow & 4\pi \end{array}$$

$f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$.

es decreciente en $(\pi, 3\pi)$.

tiene un máximo en $(\pi, 1)$.

tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 5

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Extremos:**

  $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \to \quad f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

  $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

  $f(x)$ es creciente.

- **Gráfica** $\to$ 1

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Simetría:**

  $f(-x) = f(x) \quad \to \quad f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+1} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} =$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

  $y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

  Por simetría:

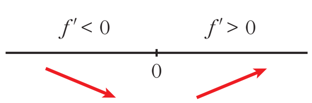
  $y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

- **Extremos:**

  $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

  Signo de $f'(x)$:



  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

  es creciente en $(0, +\infty)$.

  tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- **Gráfica** $\to$ 3

f) $y = sen^2\, x$

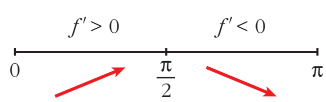
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$f'(x) = 2\; sen\; x \cos x = sen\; 2x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\; 2x = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 + \pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2}k, \;\; k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$ es periódica de período π.

Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$.

- **Gráfica** $\rightarrow$ ④

Página 333

18 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

c) $y = x \ln x$

d) $y = (x-1)e^x$

e) $y = e^{-x^2}$

f) $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \dfrac{x^3}{\ln x}$

h) $y = \ln(x^2 - 1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$ (ya que $e^x \neq 0$ para todo x).
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \;\rightarrow\;$ Rama parabólica

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

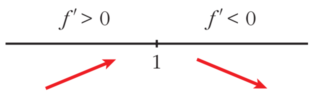
(1) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos la regla de L'Hôpital.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de $f'(x)$:



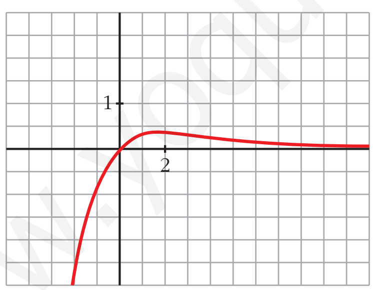
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

es decreciente en $(1, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \frac{ln\, x}{x}$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$ (1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

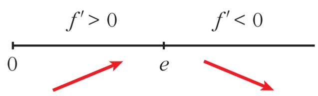
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - ln\ x}{x^2} = \frac{1 - ln\ x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad ln\ x = 1 \quad \rightarrow \quad x = e$$

Signo de $f'(x)$:



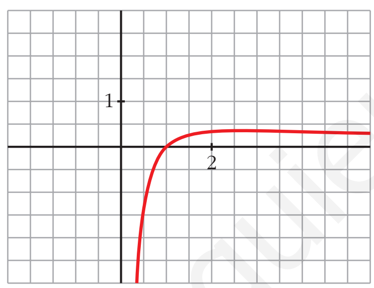
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$.

es decreciente en $(e, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = x\ ln\ x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} x\ ln\ x = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln\ x}{1/x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

No tiene asíntotas verticales.

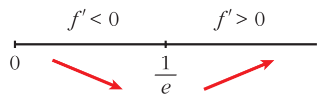
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = ln\ x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\ x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad ln\ x = -1 \quad \rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:

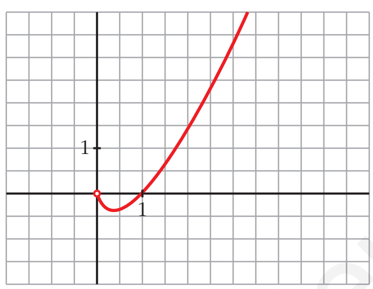


$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$.

es creciente en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- **Gráfica:**



d) $y = (x-1)e^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x-1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

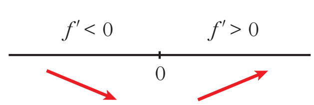
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

es creciente en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, -1)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- **Gráfica:**

e) $y = e^{-x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

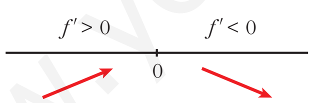
$y = 0$ es asíntota horizontal $(f(x) > 0$ para todo $x)$.

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

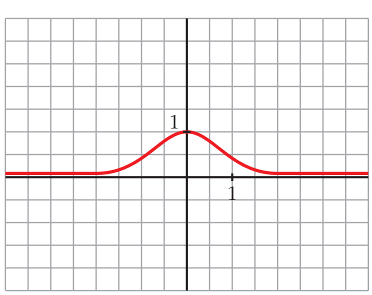


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

es decreciente en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- **Gráfica:**



f) $y = x^2 e^{-x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \rightarrow \quad \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ $(f(x) > 0)$.

(1) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos la regla de L'Hôpital.

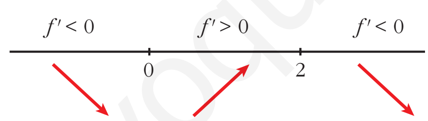
- **Puntos singulares:**

$$y = \frac{x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^x} = \frac{e^x\,(2x - x^2)}{e^x} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x(2 - x) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



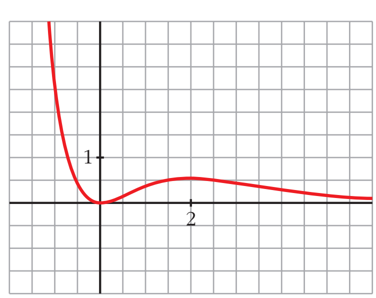
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es creciente en $(0, 2)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

tiene un máximo en $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$.

- **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{x^3}{\ln x}$

- **Dominio:**

  $\ln x = 0 \;\; \to \;\; x = 1.$ Además, ha de ser $x > 0$.

  $Dom = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

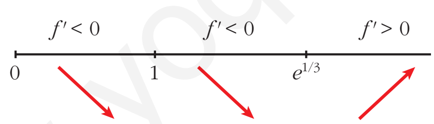
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \;\; \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \;\; \to \;\;$ Rama parabólica

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^3 \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(3\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

  $$f'(x) = 0 \;\; \to \;\; x^2(3\ln x - 1) = 0 \; \begin{cases} x = 0 \;\; \text{(no vale)} \\ \ln x = 1/3 \;\; \to \;\; x = e^{1/3} \end{cases}$$

  Signo de $f'(x)$:

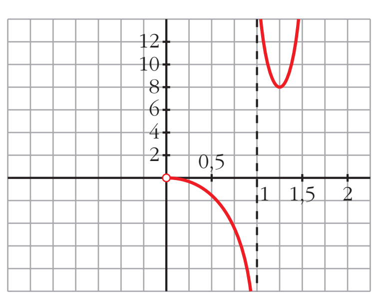


  $f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$.

  es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$.

  tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$.

- **Gráfica:**



h) $y = ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \;\rightarrow\; x = -1$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \;\rightarrow\; x = 1$ es asíntota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

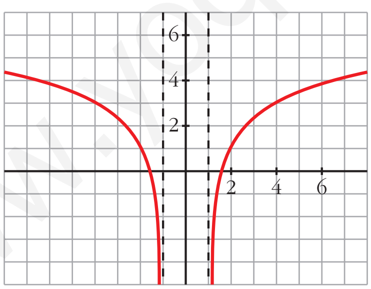
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje** ***X*****:**

$ln(x^2 - 1) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 1 \;\rightarrow\; x^2 = 2 \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}$

Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

- **Gráfica:**



19 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

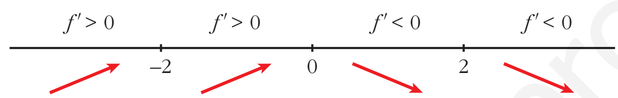
$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; & \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; & \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(4 - x^2)^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = -2, \text{ ni en } x = 2.$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

  Signo de $f'(x)$:



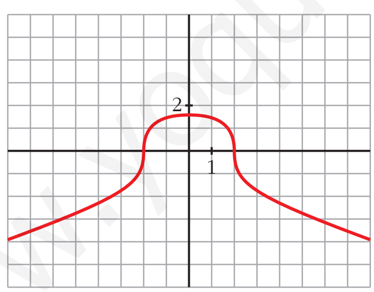
  $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

  es decreciente en $(0, +\infty)$.

  tiene un máximo en $(0, \sqrt[3]{4})$.

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

- **Dominio:** $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 + x} - x\right]\left[\sqrt{x^2 + x} + x\right]}{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

$y = -x + \dfrac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $\left(f(x) < -x + \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 - x} - x\right]\left[\sqrt{x^2 - x} + x\right]}{\left(\sqrt{x^2 - x} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-1}{2}$$

$y = x - \dfrac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $\left(f(x) < x - \dfrac{1}{2}\right)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 2x - 1 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{1}{2}$$

No tiene puntos singulares $\left(\text{en } x = \dfrac{1}{2} \text{ no está definida } f(x)\right)$.

Signo de $f'(x)$:

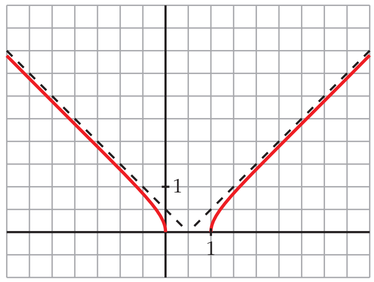
$f' < 0$		no existe		$f' > 0$
$\searrow$	0		1	$\nearrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$.

es creciente en $[1, +\infty)$.

- Pasa por $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

- **Dominio:**

$x^2 - 4x + 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \;\rightarrow$ no tiene solución

$f(x) > 0$ para todo x.

$D = \mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} =$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

$y = -x + 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x + 2)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} =$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

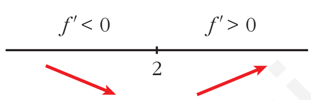
$y = x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $\left(f(x) > x - 2\right)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x - 2 = 0 \;\to\; x = 2$$

Signo de $f'(x)$:

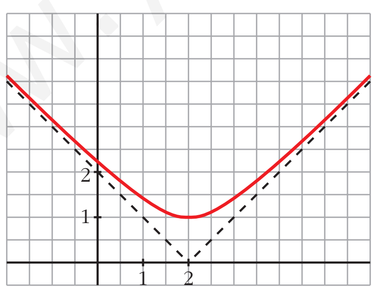


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2)$.

es creciente en $(2, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(2, 1)$.

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetrías:** $f(-x) = f(x) \;\to\; f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \quad \to \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \quad \to \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^4 + x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + x(x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + x^3 - x} = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1$$

Como $f(x)$ es par, la recta $y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2-1} - x^2 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{(x^2-1)} = \frac{2x(x^2-1) - x^3}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = \frac{2x^3 - 2x - x^3}{\sqrt{(x^2-1)^3}} =$$

$$= \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 - 2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \;\; \text{(no vale)} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$

$f' < 0$	$f' > 0$	no existe	no existe	$f' < 0$	$f' > 0$

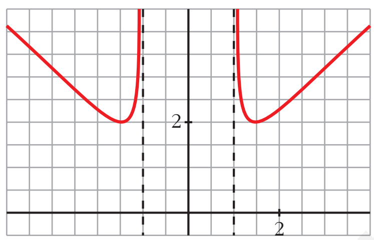
$-\sqrt{2}$ -1 0 1 $\sqrt{2}$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$.

es creciente en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(-\sqrt{2}, 2)$ y otro en $(\sqrt{2}, 2)$.

- **Gráfica:**



20 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

a) $y = x + |x + 2|$

b) $y = 2x - |x - 3|$

c) $y = |x| + |x - 3|$

d) $y = x\,|x - 1|$

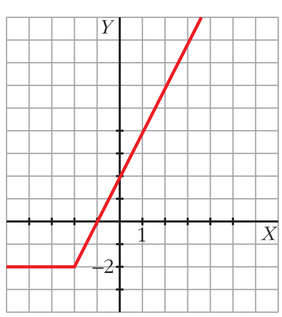
a) $y = x + |x + 2|$

Como $|x + 2| = 0 \iff x = -2$, estudiamos f a la izquierda y a la derecha de -2 para definirla por intervalos.

$-x - 2$	$x + 2$
x	x

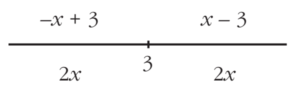
(punto de corte: -2)

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$



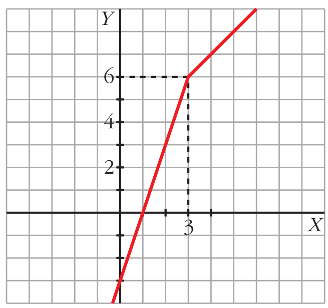
b) $y = 2x - |x - 3|$

Estudiamos la función para valores menores y mayores que 3.



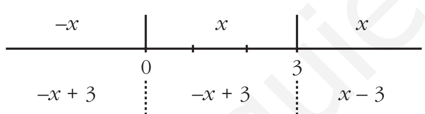
Restamos: $\begin{cases} 2x - (-x + 3) = 3x - 3 \\ 2x - (x - 3) = x + 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



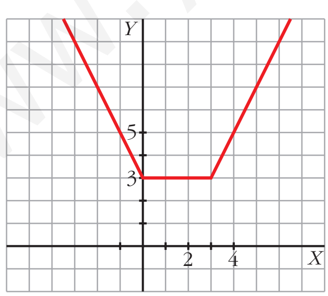
c) $y = |x| + |x - 3|$

Como $|x| = 0$ en $x = 0$ y $|x - 3| = 0$ en $x = 3$, estudiamos f a la izquierda y a la derecha de esos puntos.



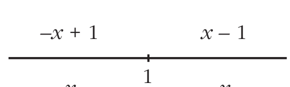
Sumamos: $\begin{cases} -x + (-x + 3) = -2x + 3 \\ x + (-x + 3) = 3 \\ x + (x - 3) = 2x - 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



d) $y = x|x - 1|$

Estudiamos f a la derecha y a la izquierda de $x = 1$.



Multiplicamos: $\begin{cases} x(-x + 1) = -x^2 + x \\ x(x - 1) = x^2 - x \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- $y = -x^2 + x$ es una parábola abierta hacia abajo:

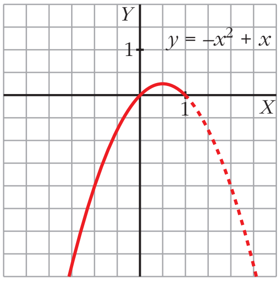
  Vértice: $-2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

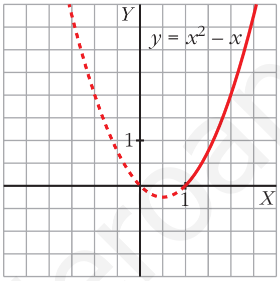
  Cortes con OX: $-x^2 + x = 0 \rightarrow x(-x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1$

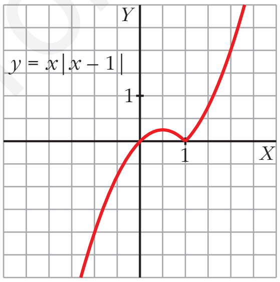
- $y = x^2 - x$ es una parábola abierta hacia arriba:

  Vértice: $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ (no vale, ya que debe ser $x \geq 1$)

  Cortes con OX: $x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$







21 **Representa gráficamente:**

a) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$

b) $y = \dfrac{|2x|}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$

Definimos la función por intervalos: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-x - 2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Si $x < 0$, $y = \dfrac{1}{-x - 2} = \dfrac{-1}{x + 2}$:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$
- Asíntota vertical:

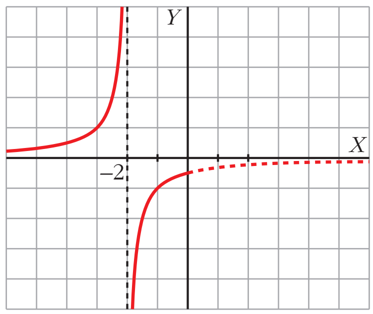
$$\lim_{x \to -2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < -2,\ f(x) \to +\infty \\ \text{Si } x > -2,\ f(x) \to -\infty \end{cases}$$

$x = -2$ es una asíntota vertical.

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x+2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(f(x) > 0)$.



Si $x \geq 0$, $y = \dfrac{1}{x-2}$:

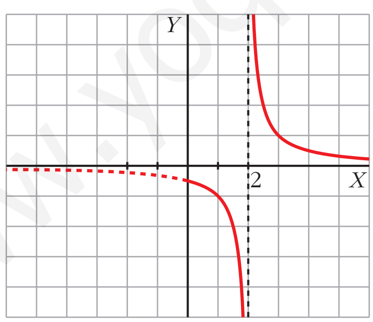
- Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$
- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < 2, & f(x) \to -\infty \\ \text{Si } x > 2, & f(x) \to +\infty \end{cases}$$

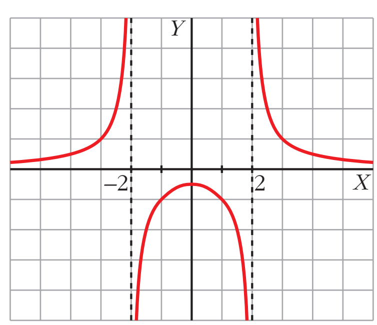
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ $(f(x) > 0)$



La gráfica de $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$ es:



b) $y = \dfrac{|2x|}{x^2+1}$

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{x^2+1} & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{2x}{x^2+1} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, $y = \dfrac{-2x}{x^2+1}$:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x^2+1} = 0$$

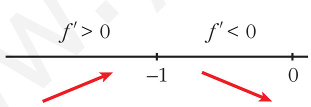
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y > 0)$.

- Puntos singulares:

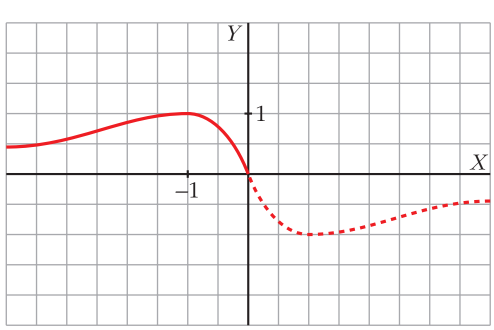
$$f'(x) = \frac{-2(x^2+1) + 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \ \text{ (no vale, } 1 > 0) \\ x = -1, \ f(-1) = 1 \end{cases}$$

Signo de f':



Máximo en $(-1, 1)$.



Si $x \geq 0$, $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

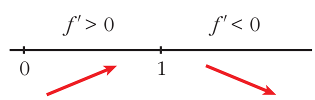
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ ($y > 0$).

- Puntos singulares:

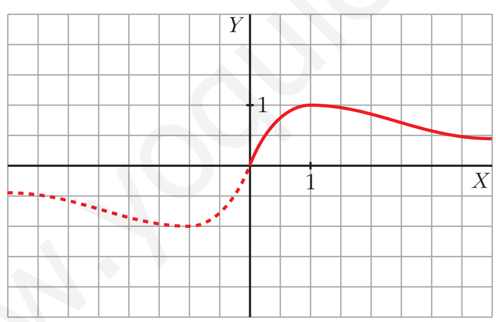
$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \ \ \text{(no vale, } -1 < 0\text{)} \\ x = 1, \ f(1) = 1 \end{cases}$$

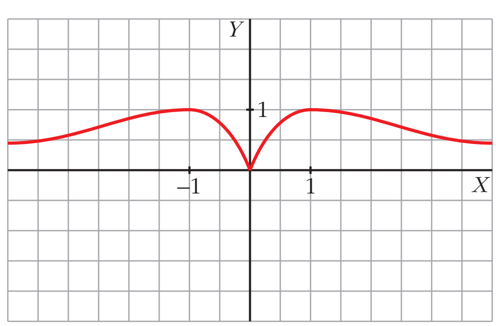
Signo de f':



Máximo en (1, 1).



La gráfica de $y = \dfrac{|2x|}{x^2 + 1}$ es:



s22 **Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva de ecuación $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$.**

En el punto $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de la tangente.

b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje OX.

a) Pendiente de la recta tangente en $x = 2$:

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1-x^2)^2}$$

$$m = f'(2) = \frac{10}{9}$$

La ecuación de la recta tangente en P es:

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{10}{9}(x-2) \;\rightarrow\; y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

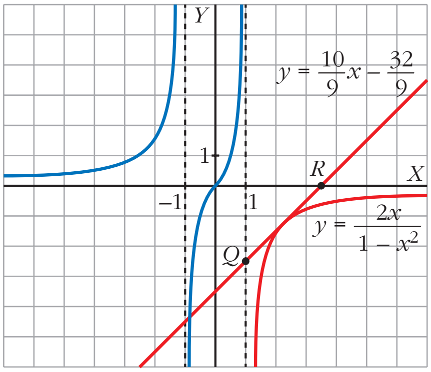
b) La asíntota vertical más próxima a P es $x = 1$. Tenemos que hallar el punto de intersección de $x = 1$ con la recta tangente anterior:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \text{ El punto es } Q\left(1, \frac{-22}{9}\right).$$

c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{10}{9}x = \dfrac{32}{9} \;\rightarrow\; x = \dfrac{32}{10} = \dfrac{16}{5} \\ y = 0 \end{array}\right\} \text{ El punto es } R\left(\frac{16}{5}, 0\right).$$

Esta gráfica muestra la curva $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$, la recta tangente $y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9}$ y los puntos $Q\left(1, \dfrac{-22}{9}\right)$ y $R\left(\dfrac{16}{5}, 0\right)$.



s23 **Considera la función $f(x) = x^2|x-3|$:**

a) Halla los puntos donde f no es derivable.

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Represéntala gráficamente.

a) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2(-x+3) & \text{si } x<3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \ge 3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} -x^3+3x^2 & \text{si } x<3 \\ x^3-3x^2 & \text{si } x \ge 3 \end{array}\right.$

Si $x \neq 3$, tenemos que $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} -3x^2+6x & \text{si } x<3 \\ 3x^2-6x & \text{si } x>3 \end{array}\right.$$

Por tanto:

$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array}\right\}$ $f'(3^-) \neq f'(3^+)$
$f(x)$ no es derivable en $x = 3$ (Punto $(3, 0)$).

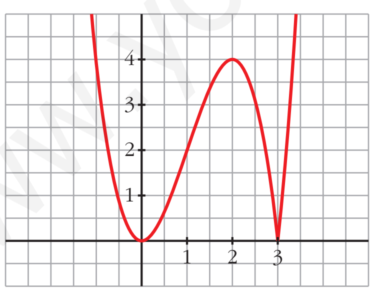
b) $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} -3x^2+6x=0 \text{ si } x<3 \\ 3x(-x+2)=0 \;<\; \begin{array}{l} x=0 \;\rightarrow\; (0,0) \\ x=2 \;\rightarrow\; (2,4) \end{array} \\ 3x^2-6x=0 \text{ si } x>3 \;\rightarrow\; \text{ninguno} \end{array}\right.$

Como $f(x) \ge 0$ para todo x, tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



s24 **La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-k}$.**
Halla el valor de k y representa la función así obtenida.

- **Hallamos k:**

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 6$

Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \quad \to \quad k = 3$$

También podríamos efectuar la división:

$$\begin{array}{rl|l} 2x^2 & + 1 & x - k \\ \cline{3-3} -2x^2 + 2kx & & 2x + 2k \\ \cline{1-1} 2kx & + 1 & \\ -2kx & + 2k^2 & \\ \cline{1-2} & 1 + 2k^2 & \end{array}$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + 2k$.

$2x + 2k = 2x + 6 \ \to \ 2k = 6 \ \to \ k = 3$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ x = 3 \ \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

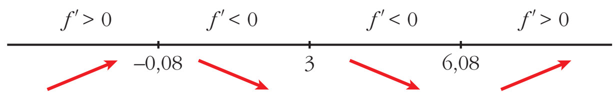
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x - 3) - (2x^2 + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2 - 12x - 1 = 0 \quad \to$$

$$\to \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6{,}08 \\ x = -0{,}08 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



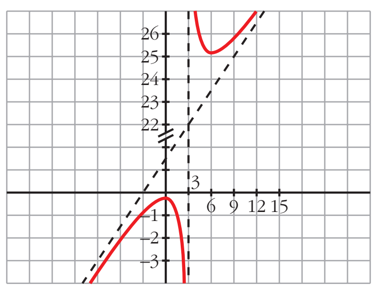
$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$.

es decreciente en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$.

tiene un máximo en $(-0{,}08; -0{,}33)$.

tiene un mínimo en $(6{,}08; 24{,}32)$.

- **Gráfica:**



s25 **Considera la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} sen\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ x^2 - 2x & \text{si } x \in [0, 3] \end{cases}}$$

Determina los puntos de corte con los ejes y sus extremos relativos. Dibuja su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} sen\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ x^2 - 2x & \text{si } x \in [0, 3] \end{cases}$$

- Cortes con los ejes: $x = 0,\ f(0) = 0$

$$y = 0 \begin{cases} sen\ x = 0 \begin{cases} x = -2\pi \to (-2\pi, 0) \\ x = -\pi \to (-\pi, 0) \end{cases} \\ x^2 - 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \to (0, 0) \\ x = 2 \to (2, 0) \end{cases} \end{cases}$$

- Extremos relativos:

$$f'(x) = \begin{cases} cos\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ 2x - 2 & \text{si } x \in (0, 3] \end{cases}$$

$f'(0^-) = cos\ 0 = 1$

$f'(0^+) = 2 \cdot 0 - 2 = 0$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \to$ No existe $f'(0)$.

$$f'(x) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2}, \ f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \\ x = -\dfrac{3\pi}{2}, \ f\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \\ 2x - 2 = 0 \ \to \ x = 1, \ f(1) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Comprobamos si son máximos o mínimos en $f''(x)$:

$$f''(x) = \begin{cases} -sen\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ 2 & \text{si } x \in (0, 3] \end{cases}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$$

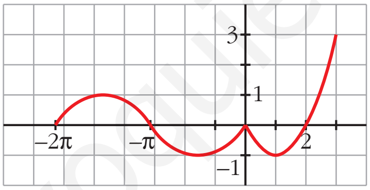
$$f''\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0$$

$$f''(1) = 2 > 0$$

Máximo en $\left(-\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$.

Mínimos en $\left(-\dfrac{\pi}{2}, -1\right)$ y $(1, -1)$.

- Representación:



s26 **Considera la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 0]$, estudia la existencia de puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, la existencia de puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x \in (-\infty, 0)$, $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

  Si $x = 0$, $y = -x + 1 = 1$

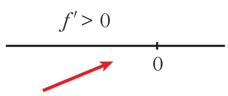
Cortes con los ejes: $x = 0,\ y = 1 \ \rightarrow\ (0, 1)$

$$y = 0 \ \rightarrow\ \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{No tiene solución. No corta a } Y.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}; \quad \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \ \rightarrow\ -2x = 0 \ \rightarrow\ x = 0,\ f(0) = 1$$

Signo de $f'(x)$:

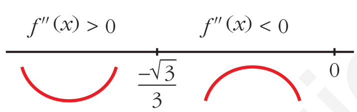


La función es creciente.

- Puntos de inflexión:

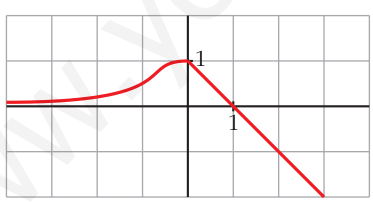
$$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}; \quad \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \ \rightarrow\ x^2 = \frac{1}{3} \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \ \text{(no vale)} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión: $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right) \simeq (-0{,}58; 0{,}75)$

- Representación:



27 **Dada la función $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (–2, –6) y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para esos valores de a y b, representa la función.**

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}; \quad f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$$

- Pasa por $(-2, -6)$, $f(-2) = -6 \ \rightarrow\ -2a + b - 4 = -6$
- Tangente horizontal $\rightarrow\ f'(-2) = 0 \ \rightarrow\ a - 2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} -2a + b &= -2 \\ a &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to 0^-}{\text{lím}} \ f(x) = -\infty \\ \\ \underset{x \to 0^+}{\text{lím}} \ f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ x = 0 \ \text{ es asíntota vertical.}$$

$f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x} \ \rightarrow \ y = 2x + 2$ es asíntota oblicua.

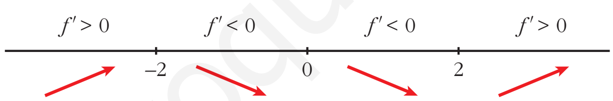
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 2x^2 - 8 = 0 \ \rightarrow \ x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



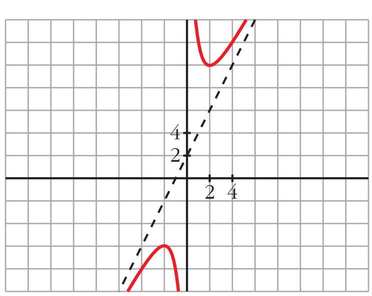
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -6)$.

tiene un mínimo en $(2, 10)$.

- **Gráfica:**



28 **Halla los valores de a, b y c para los cuales la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = -1$ y un mínimo en (0, 1).**

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

Si $y = -1$ es asíntota horizontal $\rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = a \rightarrow a = -1$

Si tiene un mínimo en (0, 1), debe ser $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x^2 - 4) - (ax^2 + bx + c)2x}{(x^2 - 4)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(0) = \frac{b(-4) - 0}{16} = \frac{-b}{4} = 0 \rightarrow b = 0$$

Además, $f(0) = 1 \rightarrow \dfrac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + c}{-4} = 1 \rightarrow c = -4$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{-x^2 - 4}{x^2 - 4}$

29 **Determina las asíntotas de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x}}{3x}$ **b)** $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

a) $y = \dfrac{\sqrt{1 - x}}{3x}$

Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

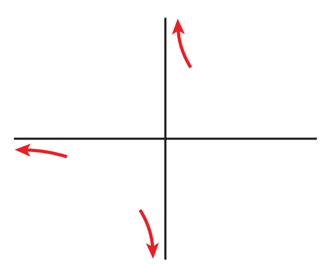
- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x}}{3x} = \pm\infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 \quad y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 0 \quad y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1 - x}}{3x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y < 0)$



b) $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \pm\infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 \quad y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 0 \quad y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

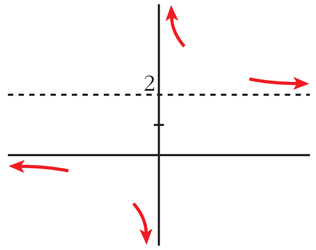
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$$

$y = 2$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ $(y > 2)$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 + 1}}{-x} = 1 - 1 = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y < 0)$.



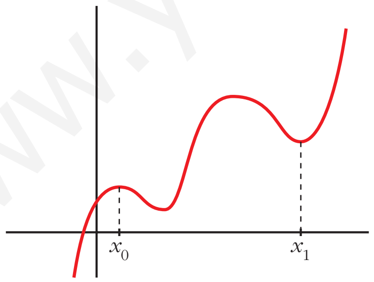
CUESTIONES TEÓRICAS

30 **¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica que tiene dos máximos y dos mínimos relativos? En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que el máximo?**

- Si tiene dos máximos y dos mínimos relativos, y es polinómica, su derivada tiene, al menos, cuatro raíces; es decir, $f'(x)$ será, al menos, de grado 4.

  Por tanto, $f(x)$ será, al menos, de grado 5.

- Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo. Por ejemplo:



El mínimo de x_1 está más alto que el máximo de x_0.

31 **¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de cuarto grado?**

Si $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado, $f'(x)$ será un polinomio de tercer grado y $f''(x)$ será un polinomio de segundo grado.

Así, $f''(x)$ tendrá, a lo sumo, dos raíces.

Por tanto, $f(x)$ tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

32 **Comprueba que la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

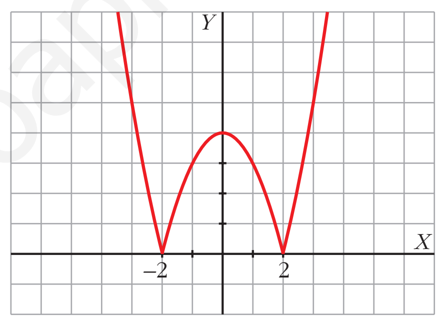
Por tanto:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \;\to\; y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \;\to\; y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

33 **Sobre la gráfica de la función $y = |x^2 - 4|$, indica los intervalos de concavidad y de convexidad. ¿Cuáles son sus puntos de inflexión?**

$$y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



La gráfica es cóncava en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y es convexa en $(-2, 2)$. Los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ son puntos de inflexión (son también mínimos relativos). Podemos comprobarlo con f' y f'':

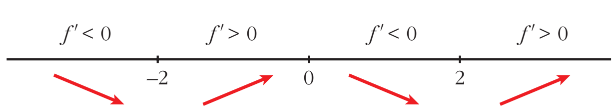
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases} \;\to\; f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

No existe $f''(-2)$ ni $f''(2)$.

$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -4 \\ f'(-2^+) = 4 \end{array}\right\}$ No existe $f'(-2)$.

$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -4 \\ f'(2^+) = 4 \end{array}\right\}$ No existe $f'(2)$.

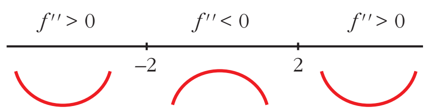
Signo de $f'(x)$: $f'(x) = 0 \;\to\; x = 0$



Mínimos en (–2, 0) y en (2, 0).

Máximo en (0, 4).

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión en (–2, 0) y (2, 0).

Página 334

34 **La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifica esta información.**

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

35 **¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?**

- Asíntotas verticales puede tener infinitas. (Como ejemplo, podemos considerar la función $y = \dfrac{1}{\text{sen } x}$, cuya gráfica está representada en el ejercicio 17, en la gráfica 2).
- Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos: una cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

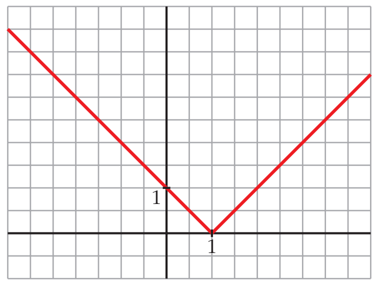
s36 **Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no sea derivable en ese punto. Represéntala.**

$$y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \;\text{ para }\; x \neq 1 \end{array}\right\} \;\to\; \text{Hay un mínimo en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pues $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$.

La gráfica es:



s37 **Da un ejemplo de una función que sea derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ y que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.**

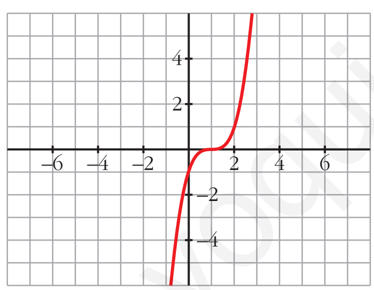
Por ejemplo, $y = (x - 1)^3$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \rightarrow f'(1) = 0$

$f'(x) > 0$ para $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es creciente.

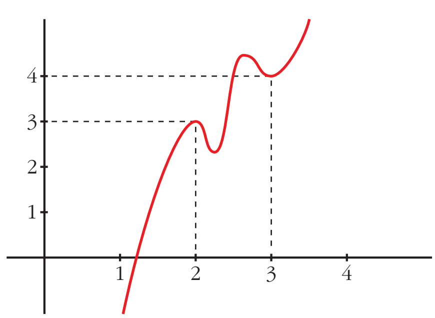
En $x = 1$ hay un punto de inflexión.

La gráfica es:



s38 **Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4).**

Si la función fuera polinómica, ¿cuál habría de ser, como mínimo, su grado?



$f(x)$ debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en $[0, 4]$, si es derivable.

Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues $f'(x)$ se anularía, al menos, en cuatro puntos).

39 **La función $f(x) = x + e^{-x}$, ¿tiene alguna asíntota? En caso afirmativo, hállala.**

$f(x) = x + e^{-x}$

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- No tiene asíntotas verticales.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales.
- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + e^{-x}}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{xe^{x}}\right) = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

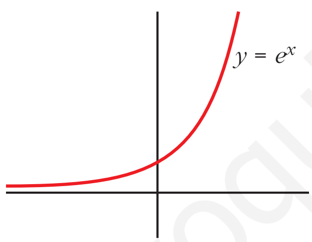
$y = x$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$.

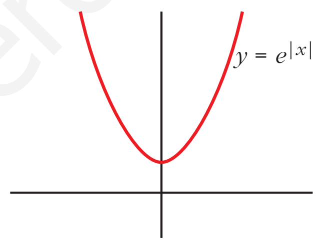
No hay asíntota oblicua hacia $-\infty$ porque:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x + e^{-x}}{x}\right) = 1 + \infty = +\infty$$

40 **¿Son iguales las gráficas de $f(x) = e^{x}$ y $g(x) = e^{|x|}$? Justifica tu respuesta.**

No. Veamos sus gráficas:

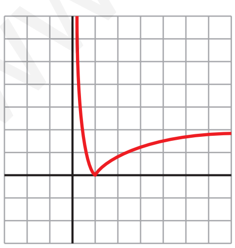




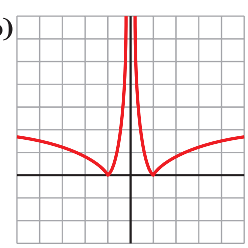
Por ejemplo, si $x = -3 \to e^{-3} \simeq 0{,}049$; $e^{|-3|} \simeq 20{,}08$

41 **¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función $y = ln\,|x|$ y cuál a $y = |ln\,x|$?**

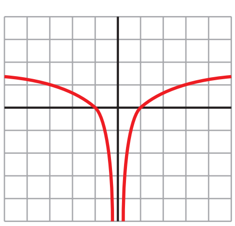
a)



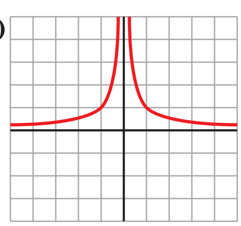
b)



c)



d)



- $y = ln\,|x|$ es la c).
- $y = |ln\,x|$ es la a).

42 **¿Qué tipo de simetría tienen las siguientes funciones?:**

a) $\boldsymbol{y = sen^2\, x}$ **b)** $\boldsymbol{y = |x| - 2}$

c) $\boldsymbol{y = tg\, x}$ **d)** $\boldsymbol{y = x^3 - x}$

a) $y = sen^2\, x$

$f(-x) = sen^2\,(-x) = [sen\,(-x)]^2 \stackrel{(1)}{=} (-sen\, x)^2 = sen^2\, x$

(1) Porque $sen\,(-x) = -sen\, x$

Como $f(-x) = f(x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al eje Y.

b) $y = |x| - 2$

$f(x) = |x| - 2 \;\rightarrow\; f(-x) = |-x| - 2 = |x| - 2$

Como $f(x) = f(-x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al eje Y.

c) $y = tg\, x$

$f(x) = tg\, x;\;\; f(-x) = tg\,(-x) = -tg\, x = -f(x)$

Como $f(-x) = -f(x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

d) $y = x^3 - x$

$f(x) = x^3 - x \;\rightarrow\; f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$

Como $f(-x) = -f(x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

PARA PROFUNDIZAR

43 **Estudia y representa** $\boldsymbol{y = arc\, tg\, x}$ **indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos, si los hubiere.**

$y = arc\, tg\, x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\;\; \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{arc\, tg\, x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1 + x^2} = 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;\;\; \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{arc\, tg\, x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + x^2} = 0 \end{array}\right\}$$

Ramas parabólicas

- **Crecimiento y extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

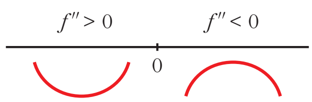
$f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente.

$f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}$

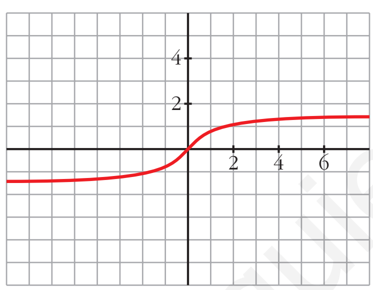
$f''(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



44 **Representa la función $y = x - arc\ tg\ x$ determinando el dominio de definición, asíntotas, máximos, mínimos e intervalos de crecimiento.**

$y = x - arc\ tg\ x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - arc\ tg\ x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[1 - \frac{arc\ tg\ x}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[1 - \frac{1}{1 + x^2}\right] = 1 - 0 = 1 \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

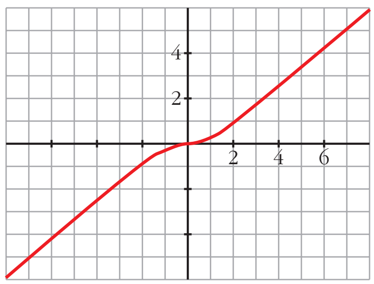
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

$f'(x) > 0$ para $x \neq 0 \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente.

Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

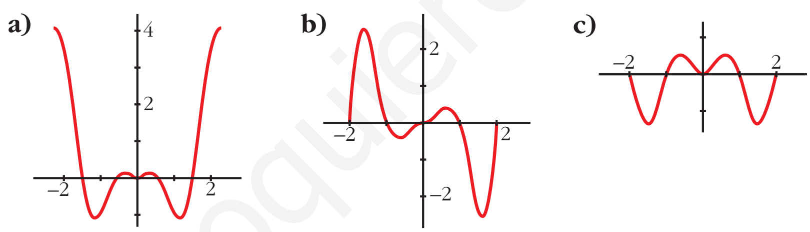
No tiene máximos ni mínimos.

- **Gráfica:**



s45 **Las siguientes gráficas corresponden a las funciones $f(x) = x\ sen(\pi x)$; $g(x) = x^2\ sen(\pi x)$; $h(x) = x^2\ cos(\pi x)$ en el intervalo [–2, 2].**

Relaciona, de forma razonada, cada gráfica con su correspondiente función.



- $f(x)$ y $h(x)$ son funciones pares y $g(x)$ es impar.

  Por tanto, la gráfica de $g(x)$ ha de ser la b).

- $f(2) = 0 \;\rightarrow\;$ la gráfica de $f(x)$ es la c).

  Luego la gráfica de $h(x)$ es la a).

- Es decir: a) $h(x)$; b) $g(x)$; c) $f(x)$

46 **Para averiguar las asíntotas de $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ tuvimos que realizar un notable esfuerzo (páginas 320 y 321).**

Sin embargo, utilizando el sentido común y casi sin ningún tecnicismo, podríamos haberlo resuelto fácilmente. Veamos cómo:

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x-1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$$

Es decir, nuestra función, para valores grandes de $|x|$, *se aproxima mucho* a $y = |x - 1|$.

Además, es “un poco menor” (observa que se resta 1 en el radicando). La función $y = |x - 1|$ está formada, precisamente, por las dos asíntotas de nuestra función.

a) Averigua, de forma similar, las asíntotas de:

$$y = \sqrt{x^2 + 2x} \qquad y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$$

b) Ídem, $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

a) $\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x - 1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x + 1)^2} = |x + 1|$

La función $y = |x + 1|$ está formada por las dos asíntotas oblicuas de la función:

$$y = \sqrt{x^2 + 2x}$$

$\sqrt{x^2 - 6x + 12} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2} = \sqrt{(x - 3)^2 + 2} \approx \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$

La función $y = |x - 3|$ está formada por las dos asíntotas oblicuas de la función:

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$$

b) Para valores grandes de $|x|$, tenemos que:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \approx \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Así, $y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Página 335

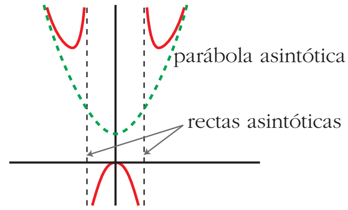
47 **Aunque la palabra *asíntota* la hemos aplicado a rectas que se aproximan a una gráfica, tiene un significado más amplio: se dice que dos curvas son *asintóticas* cuando, al alejarse del origen, la distancia entre ellas tiende a cero.**

Por ejemplo, la parábola $y = x^2 + 1$ es *asintótica* a la función:

$y = f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$ (revisa su gráfica en la página 319). Es fácil comprobarlo:

$\dfrac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$ (Simplemente hemos efectuado el cociente).

La diferencia entre las dos funciones es $\dfrac{1}{x^2 - 1}$, que tiende a cero cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. Además, toma valores positivos, por lo que la gráfica de $y = f(x)$ queda por encima de la parábola. Este resultado permite representar la función de forma más precisa apoyándonos en la representación de la parábola:



a) Razonando de la misma forma, halla la parábola asintótica a la función:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x}$$

Determina la posición de la curva respecto de ella.

b) Representa la gráfica de la función teniendo en cuenta esos datos, así como la asíntota vertical y el punto singular (solo hay uno de abscisa $x = 2$).

a) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 8}{x} = x^2 - 2x + 1 + \dfrac{8}{x}$

La parábola es $y = x^2 - 2x + 1$.

- Cuando $x \to -\infty$, la diferencia entre la función y la parábola, $\dfrac{8}{x}$, es negativa; luego, la curva está por debajo de la parábola.

- Cuando $x \to +\infty$, la diferencia, $\dfrac{8}{x}$, es positiva; luego, la curva está por encima de la parábola.

b) **Asíntota vertical:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

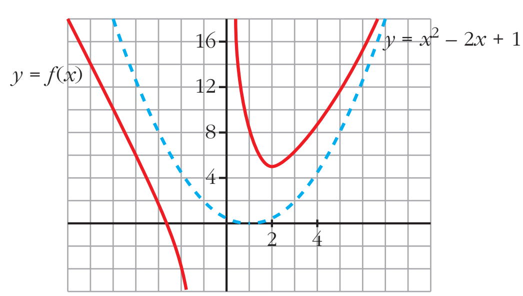
- **Punto singular:**

$$f'(x) = 2x - 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \to \ 2x^3 - 2x^2 - 8 = 0 \ \to \ 2(x - 2)(x^2 + x + 2) = 0 \ \to \ x = 2$$

Hay un mínimo en $(2, 5)$.

- **Gráfica:**



48 **Halla, en cada caso, la parábola asintótica y estudia la posición de la curva con respecto de ella. Representa la información obtenida:**

a) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{x^3-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^4}{x^2-4}$ **d)** $y = \dfrac{x^3}{x+1}$

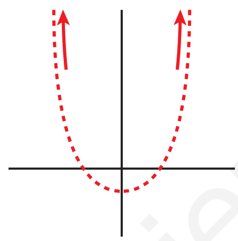
a) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1} \longrightarrow$ Dividimos:

$$\begin{array}{rl|l} x^4 & & x^2+1 \\ \cline{3-3} -x^4-x^2 & & x^2-1 \\ \cline{1-1} -x^2 & & \\ x^2+1 & & \\ \cline{1-1} 1 & & \end{array}$$

Así, $y = \dfrac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$

Parábola asintótica: $y = x^2 - 1$

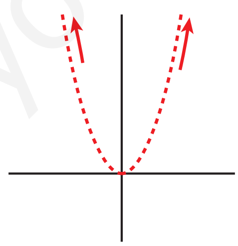
Posición:



b) $y = \dfrac{x^3-1}{x} = x^2 - \dfrac{1}{x}$

Parábola asintótica: $y = x^2$

Posición:



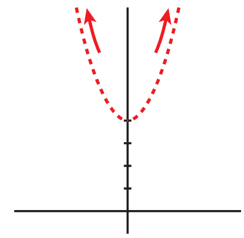
c) $y = \dfrac{x^4}{x^2-4} \longrightarrow$ Dividimos:

$$\begin{array}{rl|l} x^4 & & x^2-4 \\ \cline{3-3} -x^4+4x^2 & & x^2+4 \\ \cline{1-1} 4x^2 & & \\ -4x^2+16 & & \\ \cline{1-1} 16 & & \end{array}$$

Así: $y = \dfrac{x^4}{x^2-4} = x^2 + 4 + \dfrac{16}{x^2+4}$

Parábola asintótica: $y = x^2 + 4$

Posición:



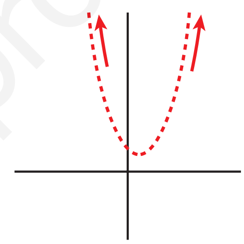
d) $y = \dfrac{x^3}{x+1} \ \to$ Dividimos:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 & x+1 \\ \hline
-x^3 - x^2 & x^2 - x + 1 \\ \hline
-x^2 & \\
x^2 + x & \\ \hline
x & \\
-x - 1 & \\ \hline
-1 &
\end{array}
$$

Así: $y = \dfrac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$

Parábola asintótica: $y = x^2 - x + 1$

Posición:



49 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ **b)** $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ **c)** $y = ln(sen\ x)$

d) $y = 2x + sen\ 2x$ **e)** $y = \dfrac{sen\ x}{x} + 2$ **f)** $y = \dfrac{cos\ x}{x}$

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

- **Dominio:**

  $e^x - e^{-x} = 0 \ \to \ e^x = e^{-x} \ \to \ x = 0$

  $D = \mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \ \to \ y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < -1)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \ \to \ y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 1)$.

b) $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No hay asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > 0)$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$$

$y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) < 1)$.

c) $y = ln\ (sen\ x)$

- **Dominio:**

Solo está definida cuando $sen\ x > 0$; es decir, en los intervalos:

$(0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \cup \dots$

El dominio son todos los intervalos de la forma:

$\big(2k\pi, (2k + 1)\pi\big)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2k\pi^+} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to (2k+1)\pi^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2k\pi;\ x = (2k + 1)\pi \text{ son asíntotas verticales} \\ (\text{con } k \in \mathbb{Z}). \end{array}$$

No hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

(No existe $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ni $\lim_{x \to +\infty} f(x)$).

d) $y = 2x + sen\ 2x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + sen\ 2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \big[f(x) - 2x\big] = \lim_{x \to +\infty} sen\ 2x \text{ no existe.}$$

(El razonamiento es análogo cuando $x \to -\infty$).

e) $y = \dfrac{sen\ x}{x} + 2$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{sen\, x}{x} + 2 \right] = 3$. No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \;\;\rightarrow\;\; y = 2$ es asíntota horizontal.

(La curva corta a la asíntota infinitas veces).

f) $y = \dfrac{\cos x}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

(La curva corta a la asíntota horizontal infinitas veces).

Página 335

AUTOEVALUACIÓN

1. **Se considera la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Tiene máximos y/o mínimos? ¿Tiene algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.**

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

  $f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; 3x^2 = -2 \;\;\rightarrow\;\;$ no tiene solución.

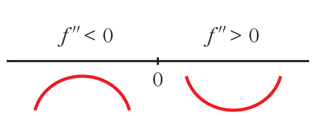
  $f'(x) > 0$ para todo $x \;\;\rightarrow\;\; f(x)$ es creciente.

  No tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = 6x$

  $f''(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; 6x = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = 0$

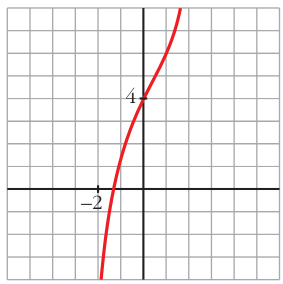
  Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 4)$.

- Además, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

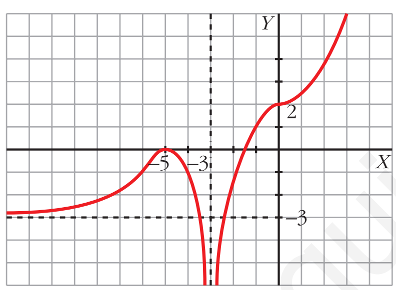
- Gráfica:



2. **Dibuja la gráfica de una función f de la que sabemos:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -3; \quad \lim_{x \to -3} f(x) = -\infty;$$

$$f'(-5) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad f(-5) = 0; \quad f(0) = 2$$



Tiene tangente horizontal en los puntos (–5, 0) y (0, 2). En el primero tiene un máximo, y en el segundo, un punto de inflexión.

3. **Estudia las asíntotas y los puntos singulares de $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+1}$ y represéntala gráficamente.**

$f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+1}$. Dominio: $\mathbb{R} - \{-1\}$

- Asíntota vertical: $x = -1$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

- No tiene asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+2)^2}{x+1} = \pm\infty$$

- Asíntota oblicua:

$$\frac{(x+2)^2}{x+1} = x + 3 + \frac{1}{x+1}$$

La asíntota oblicua es $y = x + 3$.

Posición de la curva con respecto a la asíntota:

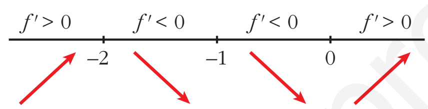
$$f(x) - (x+3) = \frac{1}{x+1} \quad \begin{cases} \text{Si } x \to +\infty \to f(x) > x+3 \left(\text{porque } \dfrac{1}{x+1} > 0\right) \\ \text{Si } x \to -\infty \to f(x) < x+3 \left(\text{porque } \dfrac{1}{x+1} < 0\right) \end{cases}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(x+2)(x+1) - (x+2)^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

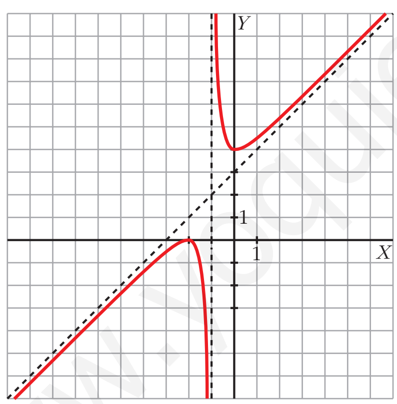
$$f'(x) = 0 \to x^2 + 2x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0,\ f(0) = 4 \\ x = -2,\ f(-2) = 0 \end{array} \right.$$

Signo de f':



Tiene un máximo en (–2, 0) y un mínimo en (0, 4).

- Gráfica:



4. Representa esta función: $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$. Dominio = $\mathbb{R}$

- No tiene asíntotas verticales, porque $e^x \neq 0$ para todo x.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \to y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty \to f(x) > 0$

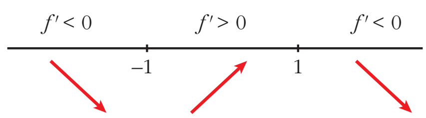
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \to$ No tiene asíntota horizontal hacia $-\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x + 2 - (x+1)^2}{e^x} = \frac{-x^2 + 1}{e^x}$$

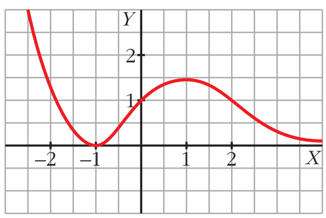
$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 1 = 0 \;\begin{cases} x = 1, \;\; f(1) = \dfrac{4}{e} \\ x = -1 \;\; f(-1) = 0 \end{cases}$$

Signo de f':



Mínimo: $(-1, 0)$; Máximo: $\left(1, \dfrac{4}{e}\right)$

- Gráfica:



5. **En la función $y = \dfrac{4x^3 + 1}{x}$, halla los puntos de corte con los ejes y las asíntotas. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y esboza la gráfica.**

$$y = \frac{4x^3 + 1}{x}$$

- Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} OX\colon \; y = 0 \;\rightarrow\; 4x^3 + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt[3]{-1/4} \\ OY\colon \; x = 0 \;\; \text{no existe.} \end{cases}$

- Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{4x^3 + 1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{4x^3 + 1}{x} = +\infty$$

- No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas, ya que:

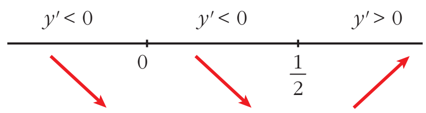
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^3 + 1}{x} = +\infty \;\; \text{y} \;\; \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^3 + 1}{x^2} = \pm\infty$$

- Crecimiento:

$$y' = \frac{12x^2 \cdot x - 4x^3 - 1}{x^2} = \frac{8x^3 - 1}{x^2}$$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 8x^3 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2}, \;\; f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

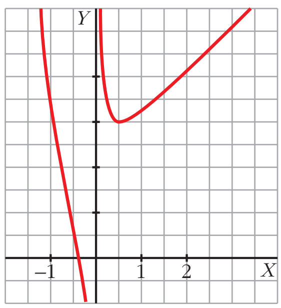
Signo de y':



Crece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

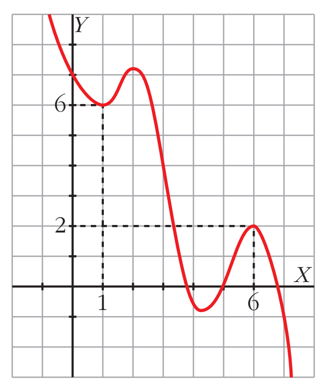
Decrece en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

- Gráfica:



6. **Dibuja una función continua en $\mathbb{R}$ que tenga un mínimo relativo en (1, 6) y un máximo relativo en (6, 2). Si es un polinomio, ¿cuál será, como mínimo, su grado?**

La función tendrá, como mínimo, cuatro puntos singulares, y para ello, su grado debe ser, al menos, 5.



7. **Halla los máximos y los mínimos de la función $f(x) = x\sqrt{x+3}$. ¿Tiene asíntotas? Haz una gráfica aproximada de esta función.**

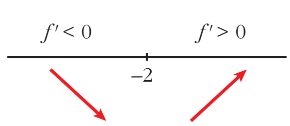
$f(x) = x\sqrt{x+3}$, Dominio = $(-3, +\infty)$

- Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x + 6 = 0 \rightarrow x = -2, \; f(-2) = -2$$

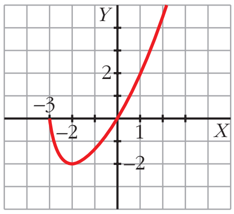
Signo de f':



La función tiene un mínimo en (–2, –2).

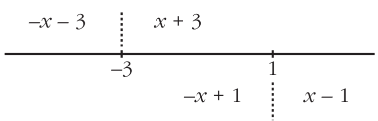
- La función no tiene asíntotas: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

- Gráfica:



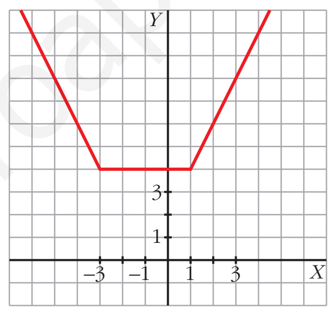
8. **Dibuja la gráfica de $f(x) = |x + 3| + |x - 1|$.**

$f(x) = |x + 3| + |x - 1|$



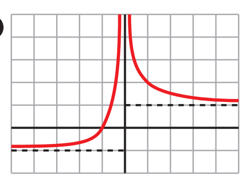
- Si $x < -3$: $-x - 3 - x + 1 = -2x - 2$
- Si $-3 \le x < 1$: $x + 3 - x + 1 = 4$
- Si $x \ge 1$: $x + 3 + x - 1 = 2x + 2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \le x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

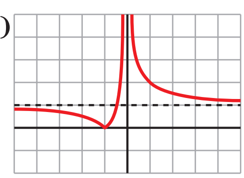


9. **¿Qué gráfica corresponde a $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x|}$?**

a)



b)



$$f(x) = \frac{x + 1}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x + 1}{-x} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x + 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{-x} &= -1 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

- Asíntota vertical: $x = 0$
- Asíntotas horizontales: $y = -1$ e $y = 1$

La gráfica de f es la a).

13 LA INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

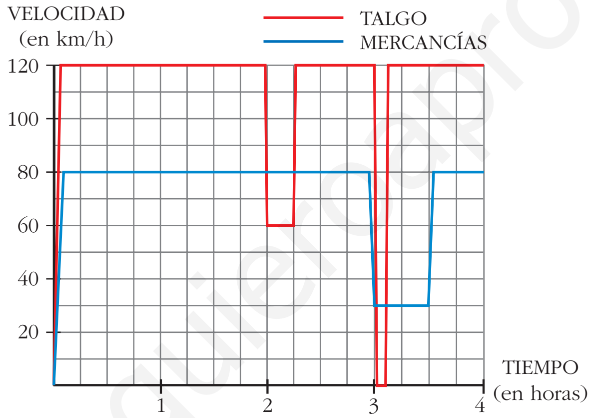
Página 363

REFLEXIONA Y RESUELVE

Dos trenes

Un Talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Estas son las gráficas TIEMPO - VELOCIDAD de ambos movimientos.



Como podemos ver en la gráfica, el Talgo, a las dos horas, reduce su velocidad:

¿A qué puede deberse?

¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren en ese instante?

A las tres horas, ambos trenes modifican su marcha: el Talgo se detiene durante breves minutos, mientras que el tren de mercancías va muy despacio durante media hora.

- **Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:**

  a) **El Talgo, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?**

  b) **De 2 a $2\frac{1}{4}$, el Talgo disminuye su velocidad. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?**

  c) **El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?**

  d) **¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?**

Haciendo los cálculos anteriores, podrás comprobar que:

Ambos trenes recorren 240 km a velocidad normal. Reducen la velocidad en el mismo lugar y recorren, así, otros 15 km (puede ser debido a obras en la vía) y, a continuación, recupera cada cual su velocidad normal. (Es decir, el tren de mercancías no frena *cuando* el Talgo, pero sí *donde* el Talgo). Más adelante, el Talgo para en una estación.

e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el Talgo?

f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o azul. Señala los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

a) $120 \cdot 2 = 240$ km.

b) A 60 km/h durante $\frac{1}{4}$ de hora, recorre $\frac{60}{4} = 15$ km.

c) Ha ido a 80 km/h durante 3 horas, luego ha recorrido $80 \cdot 3 = 240$ km.

d) Va a 30 km/h durante $\frac{1}{2}$ hora, luego recorre $30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ km.

e) La parada la hace a las 3 horas; en este momento lleva recorrida una distancia de:

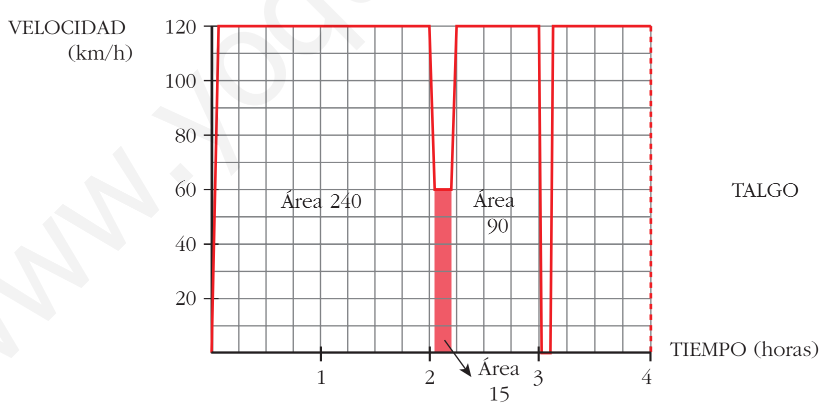
$120 \cdot 2 = 240$ km en las dos primeras horas

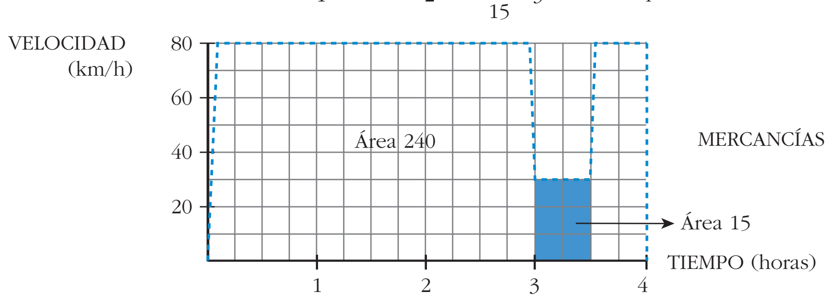
$60 \cdot \frac{1}{4} = 15$ km el siguiente cuarto de hora

$120 \cdot \frac{3}{4} = 90$ km los siguientes tres cuartos de hora

Total: $240 + 15 + 90 = 345$ km hasta llegar a la parada.

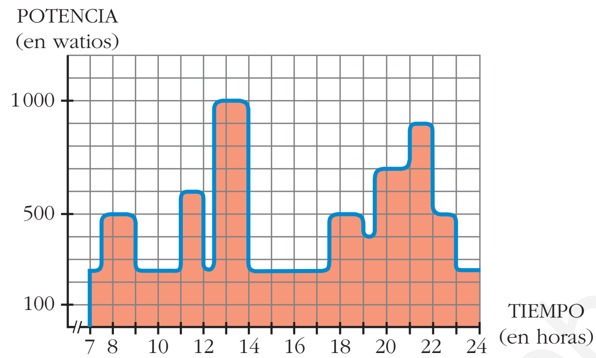
f)





Consumo de energía eléctrica

La gráfica adjunta nos da la potencia eléctrica que hay en funcionamiento en una vivienda, a cada instante, entre las 7 de la mañana y las 12 de la noche.



El área bajo la curva es la energía consumida:

potencia × tiempo = energía

Un cuadradito equivale a 0,1 kWh.

- **¿Cuántos kWh se han consumido, aproximadamente, en esas 17 horas?**

Hay 81,25 cuadritos, luego se han consumido:

$$0{,}1 \cdot 81{,}25 = 8{,}125 \text{ kWh}$$

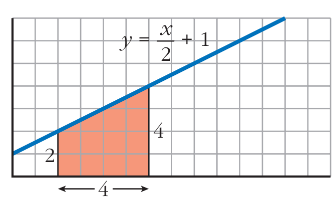
Página 367

1. Halla gráficamente las siguientes integrales:

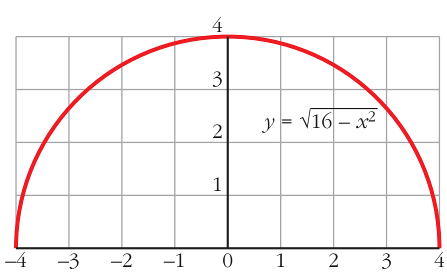
a) $\displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$

a) Es un trapecio cuyas bases miden 2 y 4 y cuya altura mide 4.

$$\text{Área} = \frac{2 + 4}{2} \cdot 4 = 12 \text{ u}^2$$



b) $y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$ (Circunferencia)



El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 4 u.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 =$$

$$= \frac{16}{2} \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25{,}1 \text{ u}^2$$

2. Halla gráficamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{-4}^{4} (\sqrt{16 - x^2} + 4)\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-4}^{4} (4 - \sqrt{16 - x^2})\,dx$

a) $\displaystyle\int_{-4}^{4} (\sqrt{16 - x^2} + 4)\ dx = \int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\ \ dx + \int_{-4}^{4} 4\ dx$

Llamamos $I_1 = \displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\ \ dx$ e $I_2 = \displaystyle\int_{-4}^{4} 4\ dx$.

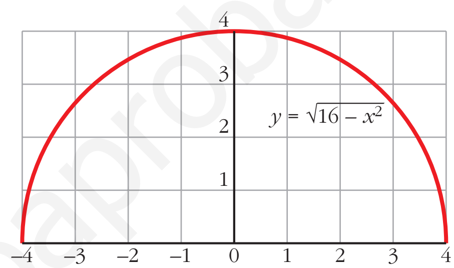
Resolvemos gráficamente ambas integrales para posteriormente sumar los resultados.

I_1: $y = \sqrt{16 - x^2} \ \Rightarrow\ y^2 = 16 - x^2 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 4^2$ (circunferencia)

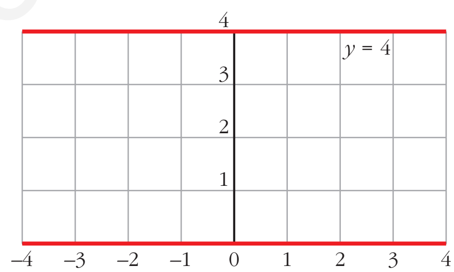
El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 4 u.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 =$$

$$= \frac{16}{2} \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25{,}1\ \text{u}^2$$



I_2: Se trata de un rectángulo de dimensiones 8 u × 4 u. Por tanto, su área es 32 u^2.



Finalmente, $I_1 + I_2 = 25{,}1 + 32 = 57{,}1$ u^2.

b) $\displaystyle\int_{-4}^{4} (4 - \sqrt{16 - x^2}\ )\ dx = \int_{-4}^{4} 4\ dx - \int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\ \ dx$

Observamos que se trata de las mismas integrales que en el apartado a), solo que ahora es $I_2 - I_1$, dando como resultado $32 - 25{,}1 = 6{,}9$ u^2.

Página 371

1. Sea la función $\boldsymbol{F(x) = \displaystyle\int_0^x log(t^2 + 4)\,dt}$**. Calcula** $\boldsymbol{F'(x)}$**.**

$F(x) = \displaystyle\int_0^x log(t^2 + 4)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$, siendo $f(t) = log(t^2 + 4)$ continua.

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x) = log(x^2 + 4)$$

2. **Calcula la siguiente integral:**

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [sen\ x]_0^{\pi/2} = sen\ \frac{\pi}{2} - sen\ 0 = 1 - 0 = 1$$

Página 372

1. **Calcula:** $\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3)\, dx$

$$I = \left[x^4 - \frac{4}{5}x^5 - 3x\right]_1^6 = \left(6^4 - \frac{4}{5} \cdot 6^5 - 3 \cdot 6\right) - \left(1^4 - \frac{4}{5} \cdot 1^5 - 3 \cdot 1\right) =$$

$$= -4942{,}8 + 2{,}8 = -4940$$

2. **Calcula:** $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$

$$I = [arc\ tg\ x]_0^1 = arc\ tg\ 1 - arc\ tg\ 0 = \frac{\pi}{4}$$

Observación: $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$

Página 374

1. **Halla el área comprendida entre la función** $y = x^3 - x^2 - 6x$ **y el eje** X.

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - x^2 - 6x = 0$

Son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 3$.

II. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - x^2 - 6x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

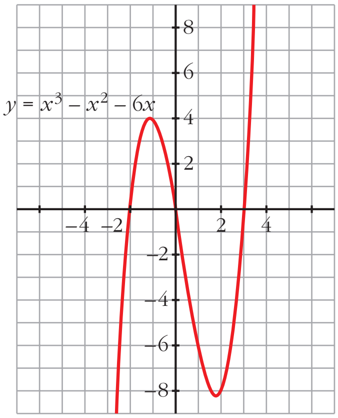
III. $G(-2) = \frac{-16}{3}$, $G(0) = 0$, $G(3) = \frac{-63}{4}$

IV. $G(0) - G(-2) = \frac{16}{3}$

$G(3) - G(0) = \frac{-63}{4}$

El área buscada es: $\frac{16}{3} + \left|\frac{-63}{4}\right| = \frac{253}{12}\ u^2$

(Se incluye la gráfica para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



2. **Halla el área comprendida entre las funciones $y = x^4 + x^3$ e $y = x^4 + x^2 + 6x$.**

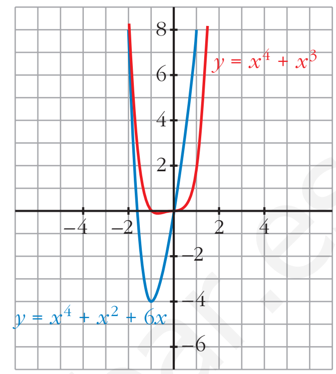
Se obtiene la función diferencia:

$$y = (x^4 + x^3) - (x^4 + x^2 + 6x) = x^3 - x^2 - 6x$$

Ahora se calcula el área comprendida entre esta función y el eje X, lo cual se ha hecho ya en el ejercicio anterior.

Por lo tanto, el área buscada es $\dfrac{253}{12}$ u^2.

(También aquí es innecesaria la gráfica para obtener el área buscada).



Página 375

1. **Calcula el volumen de una esfera de radio 5 cm haciendo girar la semicircunferencia $y = \sqrt{25 - x^2}$ alrededor del eje X. ¿Qué límites de integración debes tomar?**

$$V = \pi \cdot \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-5}^{5} (25 - x^2)\, dx = \pi \cdot \left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5} = \pi \cdot \frac{500}{3} \text{ u}^3$$

Observación: el volumen del cuerpo engendrado por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, al girar alrededor del eje X, es:

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \text{ u}^3$$

Página 381

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Integral definida

1 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\ ln\ x\ dx$ **d)** $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2x(x^2+1)^{-1/2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{1/2}}{1/2}\right]_0^2 = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^2 =$

$= \sqrt{5} - \sqrt{1} = \sqrt{5} - 1$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_1^4 (x^{1/2} - x^{-1/2})\,dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^4 =$

$\displaystyle= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}\right]_1^4 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{64} - 2\sqrt{4}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1} - 2\sqrt{1}\right) =$

$\displaystyle= \left(\frac{2}{3}\cdot 8 - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$

c) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\ ln\ x\ dx$. Integramos por partes $\displaystyle\int ln\ x\ dx$:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\ x \ \rightarrow\ du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \ \rightarrow\ v = x \end{array}\right\}$$

$\displaystyle\int ln\ x\ dx = x\ ln\ x - \int 1\ dx = x\ ln\ x - x$

$\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\ ln\ x = [2x\ ln\ x - 2x]_{1/e}^{e} = (2e\ ln\ e - 2e) - \left(2\cdot\frac{1}{e}\ ln\frac{1}{e} - 2\cdot\frac{1}{e}\right) =$

$\displaystyle= (2e - 2e) - \left(\frac{2}{e}(-1) - \frac{2}{e}\right) = -\left(-\frac{4}{e}\right) = \frac{4}{e}$

d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

Calculamos una primitiva:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - arc\ tg\ x$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \Big[x - arc\ tg\ x\Big]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

s2 **Calcula:** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} sen\ x\ cos\ x\ dx$

$$\int_0^{\pi/4} sen\ x\ cos\ x\ dx \overset{(*)}{=} \int_0^{\sqrt{2}/2} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4}$$

(*) Aplicamos el siguiente cambio:

$sen\ x = t;\quad cos\ x \cdot dx = dt$

para $x = 0;\quad t = 0$

para $x = \dfrac{\pi}{4};\quad t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

s3 **Halla el valor de la integral definida de la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 3\ cos\ (2\pi x)$ en el intervalo $I = [0, 2]$.**

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} - 3\ cos\ (2\pi x)\right) dx = \left[ln\ (x+1) - \frac{3 \cdot sen\ (2\pi x)}{2\pi}\right]_0^2 = ln\ 3 - ln\ 1 = ln\ 3$$

Área entre $f(x)$, eje OX, $x = a$ y $x = b$

4 **Calcula el área comprendida entre la curva $y = 3x^2 - x + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.**

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $3x^2 - x + 1 = 0$

No tiene soluciones, por lo que no corta al eje X.

II. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

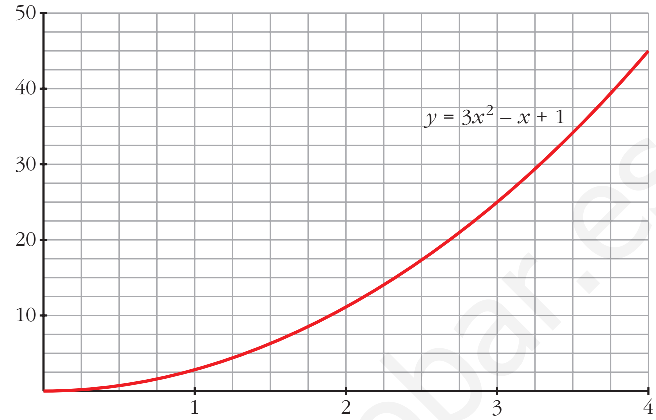
$$G(x) = \int (3x^2 - x + 1)\,dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $G(0) = 0,\quad G(4) = 60$

IV. $G(4) - G(0) = 60$

El área buscada es 60 u^2.

(La gráfica se ha incluido para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



5 **Calcula el área bajo la curva $y = 3x - 2$ entre $x = -1$ y $x = 1$.**

I. Hallamos la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$. Es $x = \frac{2}{3}$.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y la raíz que hay entre ellos: $-1, \frac{2}{3}, 1$.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

$$G(x) = \int (3x - 2)\,dx = \frac{3x^2}{2} - 2x$$

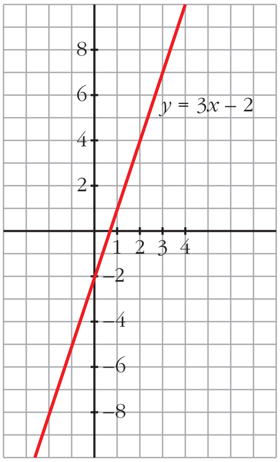
IV. $G(-1) = \frac{7}{2}$, $G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3}$, $G(1) = \frac{-1}{2}$

V. $G\left(\frac{2}{3}\right) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{7}{2} = \frac{-25}{6}$

$G(1) - G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

El área buscada es: $\left|\frac{-25}{6}\right| + \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener su area).



6 **Halla el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.**

I. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

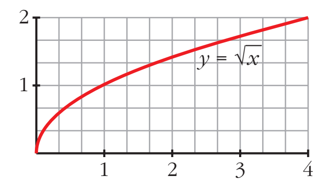
$$G(x) = \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$$

II. $G(0) = 0$, $G(4) = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$

III. $G(4) - G(0) = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$

El área buscada es: $\frac{16}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el área).



s7 **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = (x - 1)^2 (x + 1)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.**

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $(x - 1)^2 (x + 1) = 0$. Son $x = -1$ y $x = 1$.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y las raíces que hay entre ellos: -1, 1, 2.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

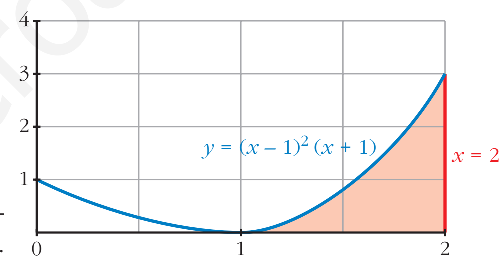
$$G(x) = \int (x - 1)^2 (x + 1)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

IV. $G(1) = \frac{5}{12}$, $G(2) = \frac{4}{3}$

V. $G(2) - G(1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$

El área buscada es $\frac{11}{12}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).



s8 **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \frac{x}{x^2 - 2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.**

I. Hallamos la solución de $\frac{x}{x^2 - 2} = 0$. Es $x = 0$.

II. Como esta solución se encuentra fuera del intervalo de integración, los extremos son 2 y 3.

III. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$, la cual es continua en dicho intervalo:

$$G(x) = \int \frac{x}{x^2 - 2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot ln\,|x^2 - 2|$$

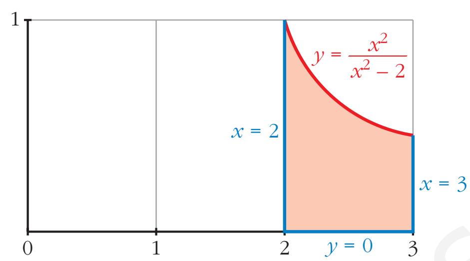
IV. $G(2) = \frac{1}{2} \cdot ln\,(2)$, $G(3) = \frac{1}{2} \cdot ln\,(7)$

V. $G(3) - G(2) = \frac{1}{2} \cdot [ln\,(7) - ln\,(2)]$

El área buscada es:

$$\frac{1}{2} \cdot [ln\,(7) - ln\,(2)]\ u^2.$$

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



Área entre dos curvas

9 **Halla, en cada caso, el área comprendida entre:**

a) $y = x^2 - 5$ **e** $y = -x^2 + 5$ **b)** $y = x^2$ **e** $y^2 = x$

a) I. Buscamos las soluciones de: $x^2 - 5 = -x^2 + 5$. Son $x = -\sqrt{5}$ y $x = \sqrt{5}$.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Se obtiene la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 5) - (x^2 - 5) = -2x^2 + 10$$

III. Buscamos su primitiva:

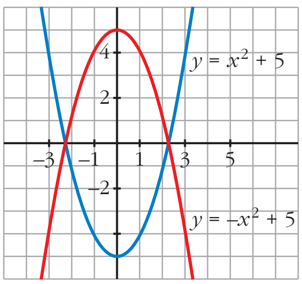
$$G(x) = \int (-2x^2 + 10)\,dx = \frac{-2x^3}{3} + 10x$$

IV. $G(-\sqrt{5}) = \frac{-20}{3}\sqrt{5}$, $G(\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5}$

V. $G(\sqrt{5}) - G(-\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5} + \frac{20}{3}\sqrt{5} = \frac{40}{3}\sqrt{5}$

El área buscada es: $\frac{40}{3}\sqrt{5}\ u^2$.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el área).



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación:

$x = x^4$. Son $x = 0$ y $x = 1$.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = x^2 - \sqrt{x}$$

III. Buscamos su primitiva:

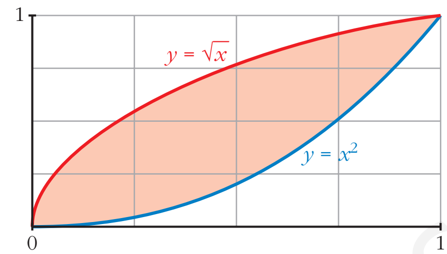
$$G(x) = \int (x^2 - \sqrt{x})\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

IV. $G(0) = 0$, $G(1) = \frac{-1}{3}$

V. $G(1) - G(0) = \frac{-1}{3} - 0 = \frac{-1}{3}$

El área buscada es $\left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



s10 **Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:**

a) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$

b) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; $y = x$

d) $y = x(x - 1)(x - 2)$; $y = 0$

e) $y = x^2$; $y = 1$

f) $y = x^2 - 2x$; $y = -x^2 + 4x$

g) $y = -x^2 + 4x - 4$; $y = 2x - 7$

a) I. Buscamos las soluciones de $4 - x^2 = 8 - 2x^2$. Son $x = -2$ y $x = 2$.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) = 4 - x^2$$

III. Calculamos su primitiva:

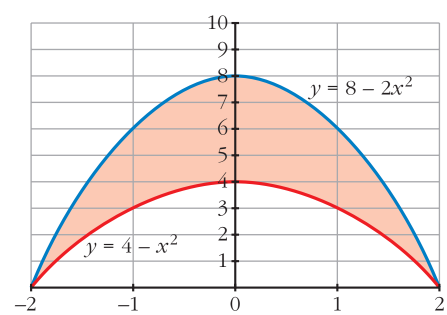
$$G(x) = \int (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

IV. $G(-2) = -8 + \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$

$G(2) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

V. $G(2) - G(-2) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$

El área buscada es: $\frac{32}{3}$ u^2.



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 4 - x^2$.

Son $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$$

III. Calculamos su primitiva:

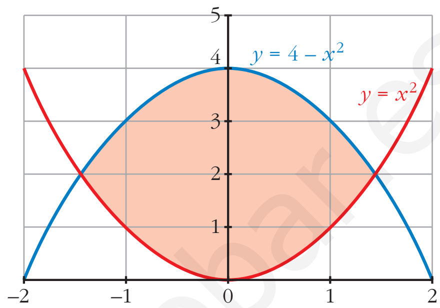
$$G(x) = \int (4 - 2x^2)\,dx = 4x - \frac{2x^3}{3}$$

IV. $G(-\sqrt{2}) = \dfrac{-8\sqrt{2}}{3}$, $G(\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

V. $G(\sqrt{2}) - G(-\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} + \dfrac{8\sqrt{2}}{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para hallar el área).



c) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - 3x^2 + 3x = x$.

Son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (x^3 - 3x^2 + 3x) - x = x^3 - 3x^2 + 2x$$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

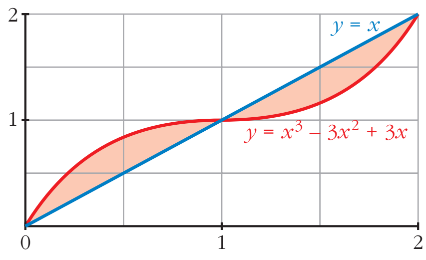
IV. $G(0) = 0$, $G(1) = \dfrac{1}{4}$, $G(2) = 0$

$G(1) - G(0) = \dfrac{1}{4}$

$G(2) - G(1) = \dfrac{-1}{4}$

El área buscada es: $\dfrac{1}{4} + \left|\dfrac{-1}{4}\right| = \dfrac{1}{2}$ u^2.

(La gráfica que se adjunta es para entender mejor el ejercicio, pero es innecesaria para obtener el área).



d) I. Buscamos las soluciones de: $x(x-1)(x-2) = 0$. Son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = x(x-1)(x-2)$$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int x(x-1)(x-2)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Resulta que se trata del mismo ejercicio que el apartado c).

El área buscada es: $\frac{1}{2}$ u^2.

e) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 1$. Son $x = -1$ y $x = 1$.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = x^2 - 1$$

III. Calculamos su primitiva:

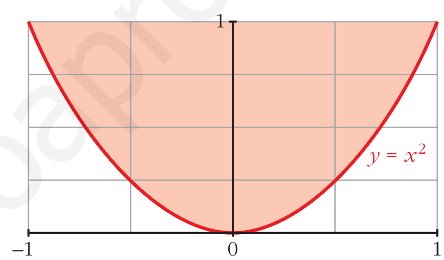
$$G(x) = \int (x^2 - 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x$$

IV. $G(-1) = \frac{2}{3}$, $G(1) = \frac{-2}{3}$

V. $G(1) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$

El área buscada es: $\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).



f) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 - 2x = -x^2 + 4x$. Son $x = 0$ y $x = 3$.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (x^2 - 2x) - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 6x$$

III. Calculamos su primitiva:

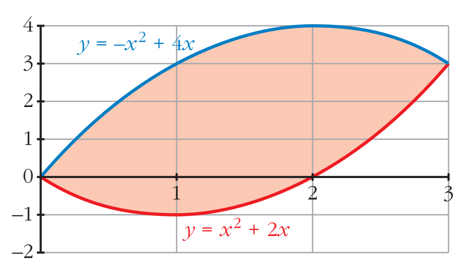
$$G(x) = \int (2x^2 - 6x)\,dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2$$

IV. $G(0) = 0$, $G(3) = -9$

V. $G(3) - G(0) = -9$

El área buscada es: $|-9| = 9$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria).



g) I. Buscamos las soluciones de: $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7$. Son $x = -1$ y $x = 3$.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 4x - 4) - (2x - 7) = -x^2 + 2x + 3.$$

III. Calculamos su primitiva:

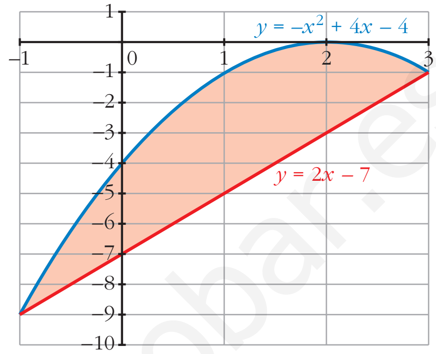
$$G(x) = \int (-x^2 + 2x + 3)\,dx = \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x$$

IV. $G(-1) = \dfrac{-5}{3}$, $G(3) = 9$

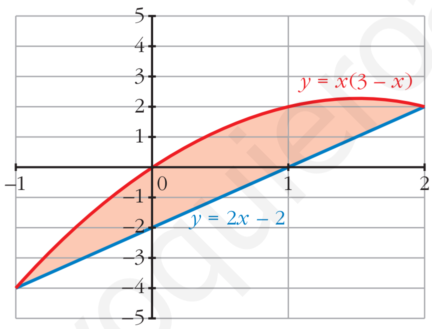
V. $G(3) - G(-1) = 9 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{32}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{32}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



s11 **Dibuja y halla el área de la región limitada por la curva $y = x(3 - x)$ y la recta $y = 2x - 2$.**



I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x(3 - x) = 2x - 2$. Son $x = -1$ y $x = 2$.

II. Calculamos la función diferencia:

$$f(x) = x(3 - x) - (2x - 2) = -x^2 + x + 2$$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (-x^2 + x + 2)\,dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$$

IV. $G(-1) = \dfrac{-7}{6}$, $G(2) = \dfrac{10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \dfrac{10}{3} + \dfrac{7}{6} = \dfrac{9}{2}$

El área buscada es $\dfrac{9}{2}$ u^2.

12 **Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y por la recta paralela a $y = x$ que pasa por el punto (1, 0). Calcula el área de ese recinto.**

- Recta paralela a $y = x$ que pasa por (1, 0):

$$\left.\begin{array}{l} m = 1 \\ P(1, 0) \end{array}\right\} \; y = 1(x - 1) = x - 1$$

- Buscamos los puntos de corte de la curva $y^2 - x = 1$ y la recta $y = x - 1$:

$$\left.\begin{cases} y^2 - x = 1 \;\rightarrow\; x = y^2 - 1 \\ y = x - 1 \;\rightarrow\; x = y + 1 \end{cases}\right\} \; y^2 - 1 = y + 1 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; y^2 - y - 2 = 0 \; \begin{cases} y = -1 \;\rightarrow\; x = 0 \\ y = 2 \;\rightarrow\; x = 3 \end{cases}$$

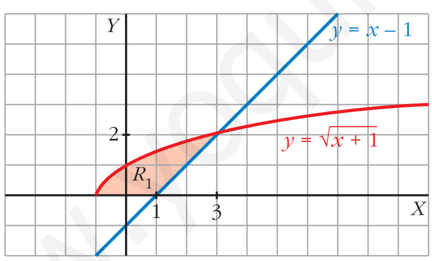
- Representamos el recinto y lo descomponemos en dos partes:

$R_1 \rightarrow$ limitado por $y = \sqrt{x+1}$, eje OX y la recta $y = x - 1$

$R_2 \rightarrow$ limitado por $y = -\sqrt{x+1}$, eje OX y la recta $y = x - 1$

Calculamos en primer lugar el área de R_1:

$$A_{R_1} = \int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\, dx - \int_{1}^{3} (x - 1)\, dx = \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{3} =$$

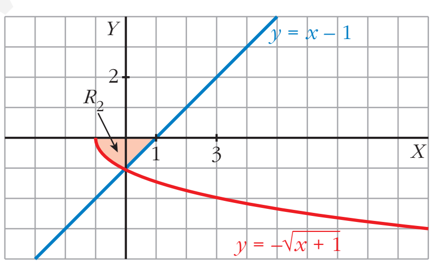


$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{3} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 8 - \left[\left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}\ \text{u}^2$$

Calculamos ahora el área de R_2:



$$A_{R_2} = -\int_{-1}^{0} -\sqrt{x+1}\, dx + \int_{0}^{1} (1 - x)\, dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}\ \text{u}^2$$

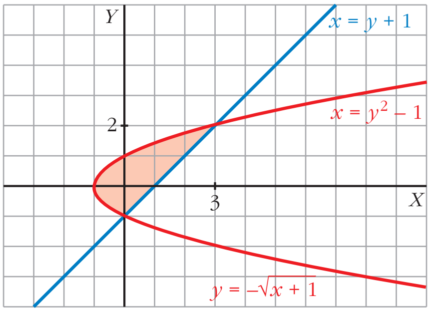
Área total: $R_1 + R_2 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{7}{6} = \dfrac{9}{2}\ \text{u}^2$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $y^2 - 1 = y + 1$.

(Esta ecuación resulta de despejar la x en: $y^2 - x = 1$; $y = x - 1$).

Sus soluciones son $y = -1$, $y = 2$.



II. Calculamos la función diferencia:

$$x = (y^2 - 1) - (y + 1) = y^2 - y - 2$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(y) = \int (y^2 - y - 2)\, dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y$$

IV. $G(-1) = \dfrac{7}{6}$, $G(2) = \dfrac{-10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \dfrac{-10}{3} - \dfrac{7}{6} = \dfrac{-9}{2}$

El área buscada es $\left|\dfrac{-9}{2}\right| = \dfrac{9}{2}$ u^2.

13 **Halla el área limitada por la función $y = 2x - x^2$ y sus tangentes en los puntos en los que corta al eje de abscisas.**

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $2x - x^2 = 0$. Son $x = 0$ y $x = 2$.

II. Calculamos la derivada de $f(x) = 2x - x^2$, que es $f'(x) = 2 - 2x$.

La tangente que pasa por $(0, 0)$ tiene pendiente $f'(0) = 2$; por tanto, es $y = 2x$.

La tangente que pasa por $(2, 0)$ tiene pendiente $f'(2) = -2$; por tanto, es $y = -2x + 4$.

III. Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: entre 0 y 1 y entre 1 y 2.

La función diferencia en el primer intervalo es:

$$f_1(x) = 2x - (2x - x^2) = x^2$$

y en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = -2x + 4 - (2x - x^2) = x^2 - 4x + 4$$

IV. Sus primitivas son:

$$G_1(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

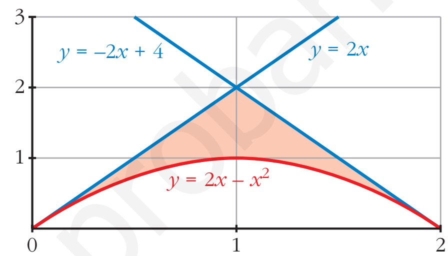
$$G_1(x) = \int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

V. $G_1(0) = 0, \;\; G_1(1) = \frac{1}{3}, \;\; G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3}$

$G_2(1) = \frac{7}{3}, \;\; G_2(2) = \frac{8}{3}, \;\; G_2(2) - G_2(1) = \frac{1}{3}$

El área buscada es: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



14 **Dadas la hipérbola $xy = 6$ y la recta $x + y - 7 = 0$, calcula el área comprendida entre ellas.**

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $7 - x = \frac{6}{x}$. Son $x = 1$ y $x = 6$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = 7 - x - \frac{6}{x}$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int \left(7 - x - \frac{6}{x}\right) = 7x - \frac{x^2}{2} - 6\, ln\,|x|$$

IV. $G(1) = 7 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

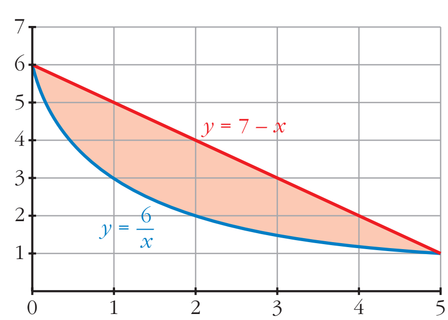
$G(6) = 24 - 6\, ln\,(6)$

V. $G(6) - G(1) = 24 - 6\, ln\,(6) - \frac{13}{2} = \frac{35}{2} - 6\, ln\,(6)$

El área buscada es:

$$\frac{35}{2} - 6\, ln\,(6) \;\; \text{u}^2.$$

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



15 **Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.**

I. Calculemos la ecuación de la recta tangente en el punto $(0, 0)$; para ello, calculamos la derivada de nuestra función:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$y'(0) = 1 \text{ (pendiente)}$$

La recta tangente tiene por ecuación $y = x$.

II. Calculamos las soluciones de: $x^3 - 2x^2 + x = x$. Son $x = 0$ y $x = 2$ (límites de integración).

III. Obtenemos la función diferencia:

$$y = x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2$$

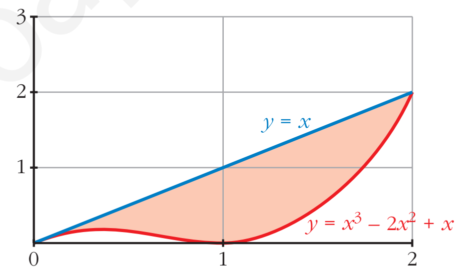
IV. Buscamos su primitiva: $G(x) = \int (x^3 - 2x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$

V. $G(0) = 0$, $G(2) = \frac{-4}{3}$

$$G(2) - G(0) = \frac{-4}{3}$$

El área buscada es: $\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



Volumen

16 **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos siguientes:**

a) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ **entre** $x = 1$ **y** $x = 5$

b) $f(x) = x^2$ **entre** $x = -1$ **y** $x = 2$

c) $f(x) = x - x^2$ **entre** $x = 0$ **y** $x = 1$

a) $V = \pi \cdot \int_1^5 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^5 (x - 1)\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 = 8\pi$ u^3

b) $V = \pi \cdot \int_{-1}^2 (x^2)^2\,dx = \pi \cdot \int_{-1}^2 x^4\,dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{31}{5}\pi$ u^3

c) $V = \pi \cdot \int_0^1 (x - x^2)^2\,dx = \pi \cdot \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\,dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{30}$ u^3

17 **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos limitados por las gráficas que se indican:**

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ **b)** $y^2 = 4x$, $x = 4$

a) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $\sqrt{x} = x^2$. Son $x = 0$ y $x = 1$.

Estos son nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = \sqrt{x} - x^2$$

III. $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)^2\, dx = \pi \int_0^1 (x + x^4 - 2x^{5/2})dx =$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} - \frac{4}{7} x^{7/2} \right]_0^1 = \frac{9}{70}\pi \text{ u}^3$$

b) $V = \pi \int_0^4 f(x)^2\, dx = \pi \int_0^4 (4x)^2 dx = \pi \cdot \left[8x^2\right]_0^4 = 128\,\pi \text{ u}^3$

Página 382

PARA RESOLVER

s18 **Halla el área comprendida entre la curva $y = \dfrac{4}{9 + 2x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.**

I. Buscamos los puntos de inflexión; para ello, calculamos las dos primeras derivadas:

$$y' = \frac{-16x}{(9 + 2x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{-16 \cdot (9 + 2x^2 - 8x^2)}{(9 + 2x^2)^3}$$

Igualamos a cero para encontrar en qué valores de x la segunda derivada es cero.

Esto ocurre en $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ y $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (puntos de inflexión).

II. Calculamos la primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \int \frac{4}{9 + 2x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\, arc\ tg \left(\frac{\sqrt{2}x}{3} \right)$$

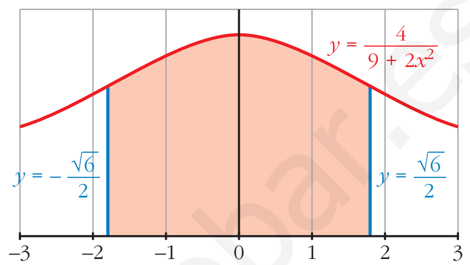
III. $G\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\, arc\ tg \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\, arc\ tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) - G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\ tg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\ tg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

El área buscada es: $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\ tg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\ tg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

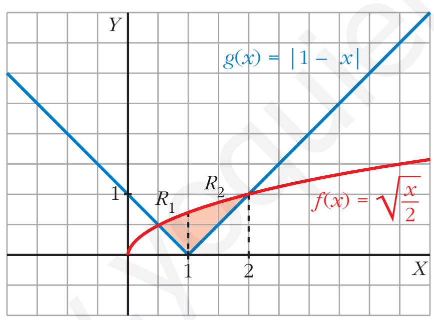
(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



s19 **Si $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ y $g(x) = |1 - x|$:**

a) Dibuja las dos gráficas en un mismo plano y halla sus puntos de intersección.

b) Determina el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.



a) Definimos $g(x)$ por intervalos: $g(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \le 1 \\ x - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Buscamos los puntos de intersección resolviendo la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = (1 - x) \quad \text{o bien} \quad \sqrt{\frac{x}{2}} = (x - 1)$$

Al elevar al cuadrado cualquiera de las dos ecuaciones, llegamos a:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \ \begin{cases} x = 2 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

Sus soluciones son $\frac{1}{2}$ y 2 (límites de integración).

b) Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: de $\frac{1}{2}$ a 1 y de 1 a 2, porque en $x = 1$ cambia la definición de $g(x)$.

Tenemos, por tanto, dos recintos de integración, R_1 y R_2.

I. La función diferencia en el primer intervalo es:

$$h_1(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (1 - x)$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$h_2(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (x - 1)$$

II. Sus primitivas son:

$$H_1(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + x - 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$H_2(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - x + 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $H_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$; $H_1(1) = \frac{2\sqrt{2} - 3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

$H_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$, $H_2(2) = \frac{4}{3}$

IV. Área del recinto R_1: $H_1(1) - H_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24}$

Área del recinto R_2: $H_2(2) - H_2(1) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

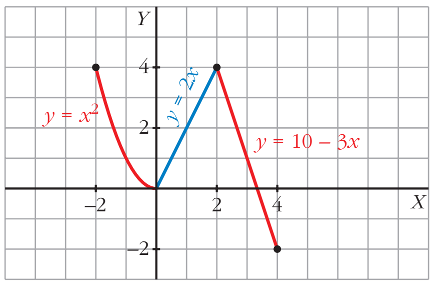
El área buscada es $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$ u^2.

s20 **Se considera la función:**

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 2x & \text{si } \ 0 \le x < 2 \\ 10 - 3x & \text{si } \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Representa la función g y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx \qquad J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx \qquad K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx$$

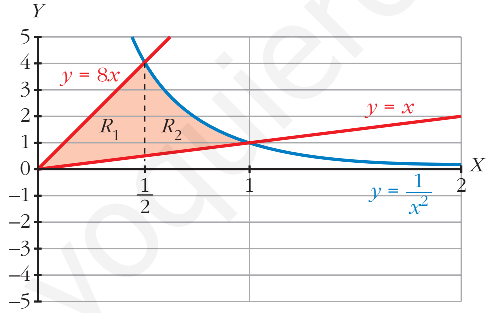


$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[x^2\right]_0^1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

$$J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx = \int_{1}^{2} 2x\,dx + \int_{2}^{4} (10 - 3x)\,dx = \left[x^2\right]_1^2 + \left[10x - \frac{3x^2}{2}\right]_2^4 = 5$$

$$K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx = I + J = \frac{11}{3} + 5 = \frac{26}{3}$$

s21 **Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, y halla su área.**



I. Buscamos los puntos de intersección de las funciones:

$\frac{1}{x^2} = x \to x^3 = 1$. Su solución es $x = 1$.

$\frac{1}{x^2} = 8x \to 8x^3 = 1 \to x = \sqrt[3]{1/8}$. Su solución es $x = \frac{1}{2}$.

$x = 8x \to 7x = 0$. Su solución es $x = 0$.

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ a 1. Corresponden a los recintos R_1 y R_2 señalados en el gráfico.

II. Hallamos la función diferencia en el primer intervalo:

$f_1(x) = 8x - x = 7x$

Y en el segundo intervalo:

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} - x$$

III. Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \int 7x\, dx = \frac{7x^2}{2}$$

$$G_2(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx = \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2}$$

IV. $G_1(0) = 0, \quad G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-17}{8}, \quad G_2(1) = \frac{-3}{2}$$

V. Área de R_1: $G\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(0) = \frac{7}{8}$

Área de R_2: $G_2(1) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

El área buscada es $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ u^2.

s22 **Calcula el área del recinto plano limitado por la curva $y = x^2 e^x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.**

Buscamos una primitiva a nuestra función:

$$G(x) = \int x^2 e^x\, dx = (x^2 - 2x + 2)\, e^x$$

(aplicando el método de integración por partes).

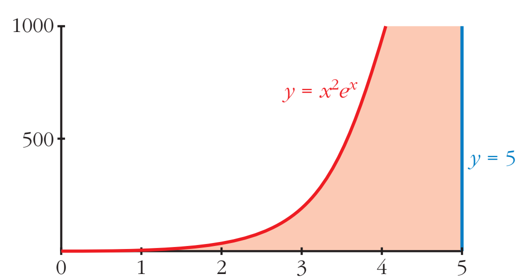
$$G(0) = 2$$

$$G(5) = 17e^5$$

$$G(5) - G(0) = 17e^5 - 2$$

El área buscada es $(17e^5 - 2)$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



s23 **Halla el polinomio de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), sabiendo que el área limitada por esa curva, el eje Y y el eje X positivo es 4/3.**

Como el polinomio pasa por el punto (3, 0), una raíz es $x = 3$; por tanto:

$y = (x - 3)(ax - b)$

Por otro lado, cuando $x = 0$, $y = 1$, así: $1 = -3(-b) = 3b$, $b = \dfrac{1}{3}$

Luego queda: $y = (x-3)\left(ax - \dfrac{1}{3}\right)$

Puesto que pasa por los puntos indicados y está limitado por los ejes X e Y (positivos), los límites de integración son 0 y 3.

Así, buscamos la primitiva del polinomio:

$$G(x) = \int (x-3)\left(ax - \frac{1}{3}\right) dx = \int \left(ax^2 - 3ax + \frac{x}{3} + 1\right) dx =$$

$$= \frac{ax^3}{3} - 3a\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^2 + x$$

$$G(0) = 0$$

$$G(3) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3$$

$$G(3) - G(0) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3 = \frac{4}{3}$$

De donde sacamos que $a = \dfrac{1}{27}$.

Por tanto, el polinomio es: $y = (x-3)\left(\dfrac{1}{27}x - \dfrac{1}{3}\right)$

s24 Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.

Buscamos el punto donde la curva tiene un extremo, hallando su derivada e igualando a cero: $y' = 2x + 2 = 0$, el punto es $(-1, 1)$.

La ecuación de la recta tangente en dicho punto es $y = 1$.

Por otro lado, la ecuación de la recta tangente con pendiente 6 es $y = 6x - 2$.

Buscamos los puntos de corte de la curva con ambas rectas, de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 1$ es $(-1, 1)$; de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 6x - 2$ es $(2, 10)$; y de $y = 1$ con $y = 6x - 2$ es $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Distinguimos dos intervalos de integración: de -1 a $\dfrac{1}{2}$ y de $\dfrac{1}{2}$ a 2.

En el primer intervalo la función diferencia es:

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 2x + 1$$

En el segundo:

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 2 - (6x - 2) = x^2 - 4x + 4$$

Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

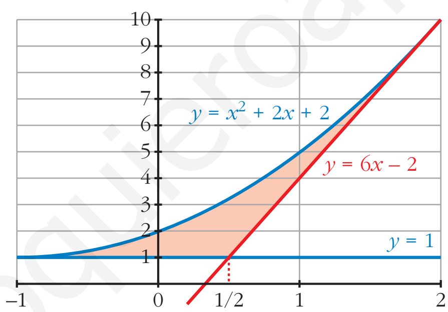
$$G_1(-1) = \frac{-1}{3}, \quad G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{24}$$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{24}, \quad G_2(2) = \frac{8}{3}$$

$$G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(-1) = \frac{19}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{8}$$

$$G_2(2) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{37}{24} = \frac{9}{8}$$

El área buscada es: $\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$ u^2.



s25 **De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$.**

Calcula a, b, c y d.

Hallamos $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6ax + 2b$

Sabemos que $f(x)$ pasa por el punto (0, 0), es decir, $f(0) = 0$, de donde averiguamos que $d = 0$.

Por otro lado, sabemos que tiene un máximo relativo en $x = 1$, esto es que $f'(1) = 0$, es decir: $3a + 2b + c = 0$.

También tiene un punto de inflexión en (0, 0), por lo que $f''(0) = 0$, de donde $b = 0$.

Como $3a + 2b + c = 0$ y $b = 0$, se tiene que $3a + c = 0 \;\;\rightarrow\;\; c = -3a$.

Así, nuestra función queda reducida a la función: $f(x) = ax^3 - 3ax$.

Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0, \quad G(1) = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{5a}{4}$$

$$G(1) - G(0) = -\frac{5a}{4}$$

El resultado es $-\frac{5a}{4}$ que es igual a $\frac{5}{4}$, de donde deducimos que $a = -1$ y, por tanto, $c = 3$.

La función buscada es $f(x) = -x^3 + 3x$.

s26 **Teniendo en cuenta que la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$ toma valores positivos y negativos, halla el valor de k de forma que el área de la región limitada por el eje X, las rectas $x = -1$, $x = 2$ y la curva $f(x)$ quede dividida por el eje X en dos partes con igual área.**

Supongamos que $x = a$ comprendido entre -1 y 2 es el punto donde nuestra función corta al eje X; por tanto, tenemos que distinguir dos intervalos de integración: de -1 a a y de a a 2.

Buscamos una primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \frac{2x^4}{4} - x^3 + kx = \frac{x^4}{2} - x^3 + kx$$

$$G(-1) = \frac{3}{2} - k$$

$$G(2) = 2k$$

Si suponemos que en el primer intervalo la función es negativa, el área es:

$$G(-1) - G(a)$$

y si en el segundo intervalo la función es positiva, el área es:

$$G(2) - G(a)$$

Y como el área en los dos intervalos tiene que ser la misma, se tiene la siguiente igualdad:

$$G(-1) - G(a) = G(2) - G(a)$$

es decir:

$$G(-1) = G(2)$$

$$\frac{3}{2} - k = 2k \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Observa que se obtiene el mismo resultado independientemente de qué intervalo consideremos en el que la función es positiva o negativa.

s27 **Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde $0 < a < 1$. Ambas curvas se cortan en el punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Halla a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.**

Hallamos los puntos de corte:

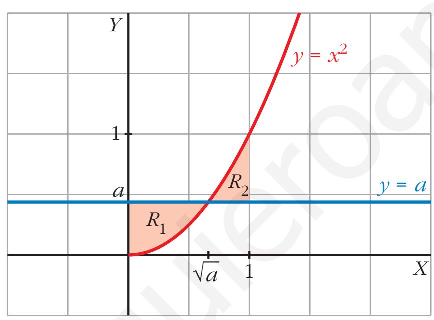
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = a \end{array}\right\} \to x^2 = a \to$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{a} \\ x = -\sqrt{a} \text{ (no vale porque la abscisa debe ser positiva).} \end{cases}$$

El punto de corte es $(\sqrt{a}, a)$.

Dibujamos las áreas para tener una idea más clara de nuestro ejercicio:

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\sqrt{a}$ y de $\sqrt{a}$ a 1, que determinan los recintos R_1 y R_2 señalados en el gráfico.



- La función diferencia para el primer intervalo es:

  $f_1(x) = a - x^2$

  Su primitiva es:

  $$G_1(x) = ax - \frac{x^3}{3}$$

  $$G_1(0) = 0,\ G_1(\sqrt{a}) = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

  El área en el primer intervalo es $\frac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

- La función diferencia en el segundo intervalo es:

  $f_2(x) = x^2 - a$

  Su primitiva es:

  $$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - ax$$

  $$G_2(\sqrt{a}) = \frac{a\sqrt{a}}{3} - a\sqrt{a},\ G_2(1) = \frac{1}{3} - a$$

$$G_2(1) - G_2(\sqrt{a}) = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área en el segundo intervalo es $\frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

Como el área en los dos intervalos es igual, se tiene que:

$$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

De donde obtenemos que $a = \frac{1}{3}$.

s28 Sean $y = ax^2$ e $y = ax + a$ las ecuaciones de una parábola p y de una recta r, respectivamente. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) Los puntos de corte de p y r no dependen del valor de a.

b) Si se duplica el valor de a, también se duplica el área encerrada entre p y r.

a) Los puntos de corte se obtienen al igualar ambas ecuaciones:

$$ax^2 = ax + a$$

$$ax^2 - ax - a = 0$$

$$a(x^2 - x - 1) = 0$$

Como suponemos $a \neq 0$, para que sean ciertamente una parábola y una recta, dividiendo toda la ecuación entre a, llegamos a:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

y sus soluciones son: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (que no dependen de a).

b) La función diferencia es: $f(x) = ax + a - ax^2 = a(-x^2 + x + 1)$

Si llamamos $h(x) = -x^2 + x + 1$, se tiene que: $f_1(x) = a\,h(x)$

y la primitiva de $f(x)$ es a por la primitiva de $h(x)$, es decir:

$$G_1(x) = a\,H(x)$$

El área comprendida es, por tanto:

$$G_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = a\left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \text{ u}^2$$

Si duplicamos a, se tiene que la función diferencia es ahora:

$$f_2(x) = 2a\,h(x)$$

y su primitiva:

$$G_2(x) = 2a\,H(x)$$

Por lo que el área comprendida es:

$$G_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2a\left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \text{ u}^2$$

s29 **Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor de OX.**

$$V = \pi \int_{-5}^{5}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\right)^2 dx = \pi \int_{-5}^{5}\left(1-\frac{x^2}{25}\right) dx = \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{75}\right]_{-5}^{5} = \frac{20\pi}{3} \text{ u}^3$$

30 **Calcula el área limitada por $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, siendo a y b las abscisas del máximo y el mínimo de f.**

La función corta al eje X en $x = 0$.

Por otro lado, tiene un mínimo en $x = -2$ y un máximo en $x = 2$.

Tenemos que distinguir entre dos intervalos: de -2 a 0 y de 0 a 2.

Hallamos la función primitiva:

$$G(x) = \int \frac{4x}{x^2+4}\, dx = 2ln\,(x^2+4)$$

El área en el primer intervalo es:

$G(-2) = 2\,ln\,8$

$G(0) = 2\,ln\,4$

$G(0) - G(-2) = 2\left(ln\,4 - ln\,8\right)$

$\left|2\left(ln\,4 - ln\,8\right)\right| = 2\left(ln\,8 - ln\,4\right) \text{ u}^2$

El área en el segundo intervalo es:

$G(2) = 2\,ln\,8$

$G(2) - G(0) = 2\left(ln\,8 - ln\,4\right)$

$2\left(ln\,8 - ln\,4\right) \text{ u}^2$

El área total es:

$2\,\left(ln\,8 - ln\,4\right) + 2\,\left(ln\,8 - ln\,4\right) = 4\left(ln\,8 - ln\,4\right) \text{ u}^2$

31 **Halla el área comprendida entre las curvas $y = e^x$, $y = 2x - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.**

I. Hallamos la función diferencia: $y = e^x - (2x - x^2) = e^x + x^2 - 2x$

II. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = e^x + \frac{x^3}{3} - x^2$$

III. $G(0) = 1$

$$G(2) = e^2 - \frac{4}{3}$$

$$G(2) - G(0) = e^2 - \frac{4}{3} - 1$$

El área buscada es:

$$\left(e^2 - \frac{4}{3} - 1\right) \text{u}^2$$

32 **La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. Calcula el área de S y el volumen de la figura engendrada por S al girar alrededor del eje X.**

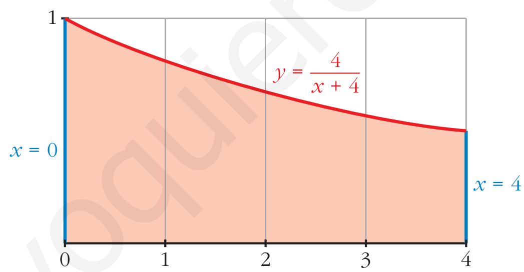
Buscamos una primitiva: $G(x) = 4\,ln\,|x+4|$

$$G(0) = 4\,ln\,4$$

$$G(4) = 4\,ln\,8$$

$$G(4) - G(0) = 4(ln\,8 - ln\,4)$$

El área buscada es $4(ln\,8 - ln\,4)$ u^2.

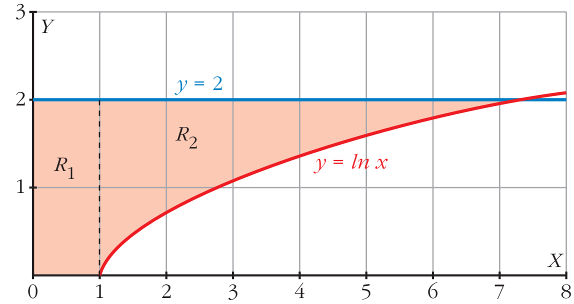


$$V = \pi\int_0^4 \left(\frac{4}{x+4}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-16}{x+4}\right]_0^4 = \frac{16}{8}\pi = 2\,\pi\,\text{u}^3$$

Página 383

33 **Halla el área de la región del plano limitada por la curva $y = ln\,x$, la recta $y = 2$ y los ejes de coordenadas.**

Dibujamos el recinto:



Buscamos los puntos de corte de la curva y la recta:

$$\left.\begin{array}{l} y = \ln x \\ y = 2 \end{array}\right\} \ln x = 2 \;\rightarrow\; x = e^2$$

La curva $y = \ln x$ e $y = 2$ se cortan en $x = e^2$; por tanto, los límites de integración son 1 y e^2 para R_2. Por otro lado, está la región comprendida entre 0 y 1 (R_1).

Así que distinguimos dos intervalos: de 0 a 1 y de 1 a e^2.

En el primer intervalo, la función diferencia es: $y = 2 - 0 = 2$

Su primitiva es:

$$\int 2dx = 2x$$

$$\left.\begin{array}{l} G_1(x) = 2x \\ G_1(0) = 0, \;\; G_1(1) = 2 \\ G_1(1) - G_1(0) = 2 \end{array}\right\}$$ Se podría obtener como el área de un rectángulo de base 1 y altura 2:

$$A = 1 \cdot 2 = 2 \text{ u}^2$$

El área para el primer intervalo es 2 u^2.

En el segundo intervalo, la función diferencia es:

$$y = 2 - \ln x$$

Su primitiva es:

$$\int (2 - \ln x)\, dx = 2x - \int \ln x\, dx$$

Integramos por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln x \;\rightarrow\; du = 1/x\, dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{array}\right\} \rightarrow \int \ln x\, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

$$G_2(x) = 2x - (x \cdot \ln x - x) = 3x - x \ln x$$

$$G_2(e^2) = 3 \cdot e^2 - e^2 \cdot 2 = e^2$$

$$G_2(1) = 3$$

$$G_2(e^2) - G_2(1) = e^2 - 3$$

El área para el segundo intervalo es $(e^2 - 3) \text{ u}^2$.

Por tanto, el área total es:

$$(2 + e^2 - 3) = (e^2 - 1) \text{ u}^2$$

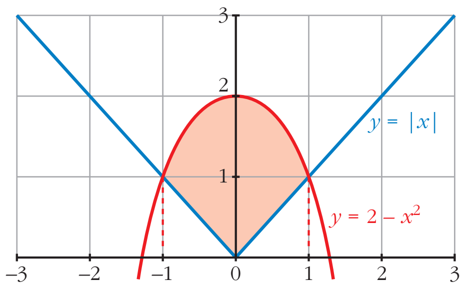
34 **Calcula el área de la figura limitada por las curvas que se dan en los siguientes casos:**

a) $y = 2 - x^2, \;\; y = |x|$

b) $xy + 8 = 0, \;\; y = x^2, \;\; y = 1$

c) $y = \text{sen } x, \;\; y = \cos x, \;\; x = 0$

a)



Se cortan en $x = -1$ y $x = 1$.

En el intervalo de -1 a 0, la función diferencia es:

$$y = 2 - x^2 - (-x) = 2 - x^2 + x$$

En el intervalo de 0 a 1, la función diferencia es:

$$y = 2 - x^2 - x$$

Por simetría, basta calcular el área en uno de los dos intervalos, por ejemplo, en el segundo. Buscamos su función primitiva:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

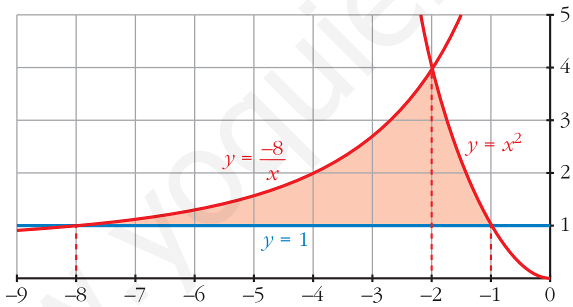
$$G(1) = \frac{7}{6}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) - G(0) = \frac{7}{6}$$

El área total es $2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$ u^2.

b)



Las tres funciones se cortan 2 a 2 en: $x = -8$, $x = -2$ y $x = -1$.

Por tanto, calculamos el área en dos intervalos, de -8 a -2 y de -2 a -1.

La función diferencia en el primer intervalo es: $y = \frac{-8}{x} - 1$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = -8 \ln |x| - x$$

$$G_1(-8) = -8 \ln (-8) + 8$$

$$G_1(-2) = -8 \ln (-2) + 2$$

$$G_1(-2) - G_1(-8) = -8 \ln (-2) + 2 + 8 \ln (-8) - 8 =$$

$$= -8\big(\ln (-2) - \ln (-8)\big) - 6 = -8 \ln \left(\frac{1}{4}\right) - 6 = 8 \ln 4 - 6$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$y = x^2 - 1$

Su primitiva es:

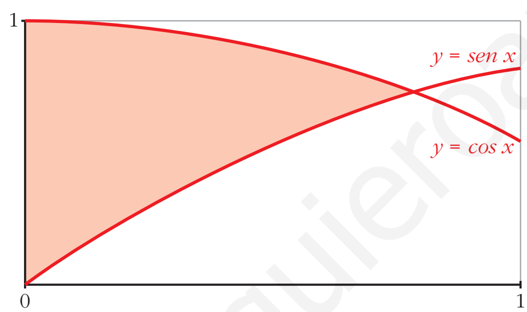
$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - x$

$G_2(-2) = \frac{-2}{3}$

$G_2(-1) = \frac{2}{3}$

$G_2(-1) - G_2(-2) = \frac{4}{3}$

El área buscada es: $\left(8\,ln\ 4 - 6 + \frac{4}{3}\right) = \left(8\,ln\ 4 - \frac{14}{3}\right)$ u^2

c) 

Las dos curvas se cortan en $x = \frac{\pi}{4}$.

Por tanto, nuestros límites de integración son 0 y $\frac{\pi}{4}$.

Buscamos la función diferencia:

$y = \cos x - \operatorname{sen} x$

Su primitiva es:

$G(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

$G(0) = 1$

$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0) = \sqrt{2} - 1$

El área buscada es $(\sqrt{2} - 1)$ u^2.

35 **Sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\frac{9}{2}$, calcula el valor de b.**

La curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ se cortan en el punto de abscisa $x = b$ y en $x = 0$.

Así, nuestros límites de integración son 0 y b.

La función diferencia es:

$$y = bx - x^2$$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$G(0) = 0$$

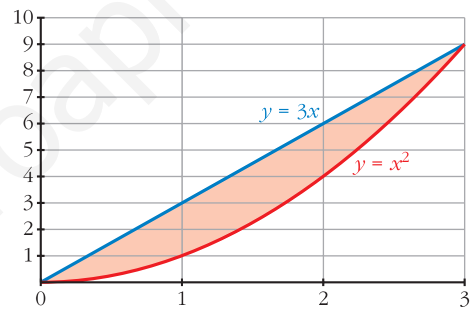
$$G(b) = \frac{b^3}{6}$$

$$G(b) - G(0) = \frac{b^3}{6}$$

Como el área es $\frac{9}{2}$, se tiene que:

$$\frac{b^3}{6} = \frac{9}{2},$$

de donde obtenemos que $b = 3$.



36 **Calcula el valor de a para que el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + ax$ y el eje X sea igual a 36.**

La curva corta al eje X en los puntos de abscisa 0 y a (estos son los límites de integración).

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

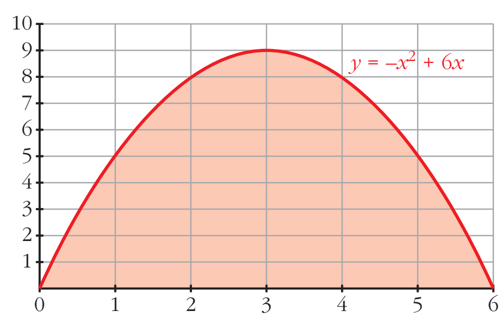
$$G(a) = \frac{a^3}{6}$$

$$G(a) - G(0) = \frac{a^3}{6}$$

Como el área es 36, se tiene que:

$$\frac{a^3}{6} = 36,$$

de donde averiguamos que $a = 6$.



37 **Dada la función $y = \dfrac{2}{x+1}$, calcula el valor de a para que el área limitada por esa curva y las rectas $x = 0$ y $x = a$ sea igual a 2.**

Buscamos su primitiva:

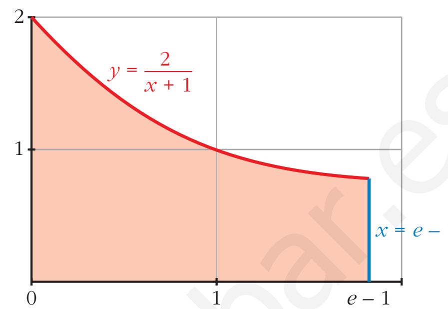
$$G(x) = 2\,ln\,(x+1)$$

$$G(0) = 0$$

$$G(a) = 2\,ln\,(a+1)$$

$$G(a) - G(0) = 2\,ln\,(a+1)$$

Como el área es igual a 2, se tiene que: $2\,ln\,(a+1) = 2$, de donde averiguamos que $a = e - 1$.



38 **Considera la región del plano que determinan las curvas $y = e^x$ e $y = e^{2x}$ y la recta $x = k$.**

a) Halla su área para $k = 1$.

b) Determina el valor de $k > 0$ para que el área sea 2.

a) Si $k = 1$, nuestros límites de integración son 0 y 1.

Hallamos la función diferencia: $y = e^{2x} - e^x$

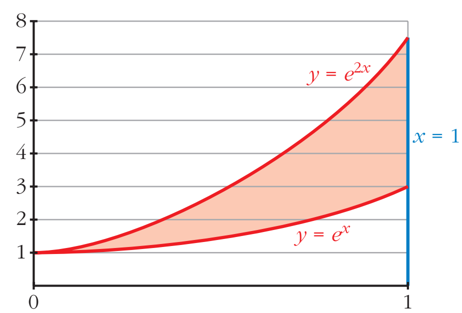
Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{e^{2x}}{2} - e^x$$

$$G(0) = \frac{-1}{2}, \quad G(1) = \frac{e^2}{2} - e$$

$$G(1) - G(0) = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$$

El área buscada es $\left(\dfrac{e^2}{2} - e + \dfrac{1}{2}\right)$ u^2.



b) Ahora nuestros límites de integración son 0 y k. Como la función diferencia y su primitiva son las mismas que en el apartado a), se tiene que:

$$G(0) = \frac{-1}{2}$$

$$G(k) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k$$

$$G(k) - G(0) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2}$$

Como el área es 2, se tiene que: $\dfrac{e^{2k}}{2} - e^k + \dfrac{1}{2} = 2$

Resolviendo la ecuación, averiguamos que $k = ln\,3$.

39 **Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^2 - 2x - 3$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 0 y 1.**

Los puntos que determinan la cuerda son (0, –3) y (1, –4), de donde obtenemos la ecuación de la recta que contiene la cuerda: $y = -x - 3$

Nuestros límites de integración son 0 y 1.

Hallamos la función diferencia: $y = x^2 - 2x - 3 - (-x - 3) = x^2 - x$

Su primitiva es:

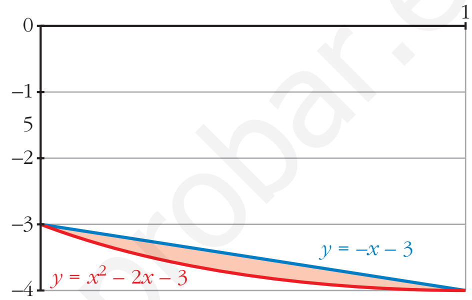
$$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) = \frac{-1}{6}$$

$$G(1) - G(0) = \frac{-1}{6}$$

El área buscada es $\left|\frac{-1}{6}\right| = \frac{1}{6}$ u^2.



40 **Dadas $y = -x^2 + 1$ y la recta $y = a$, $a < 0$, determina el valor de a de modo que el área entre la curva y la recta sea $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ u^2.**

La curva y la recta se cortan en los puntos de abscisa $x = -\sqrt{1-a}$ y $x = \sqrt{1-a}$.

La función diferencia es: $y = -x^2 + 1 - a$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + x - ax$$

$$G\left(-\sqrt{1-a}\right) = \frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^3}{3} - \sqrt{1-a} + a\sqrt{1-a}$$

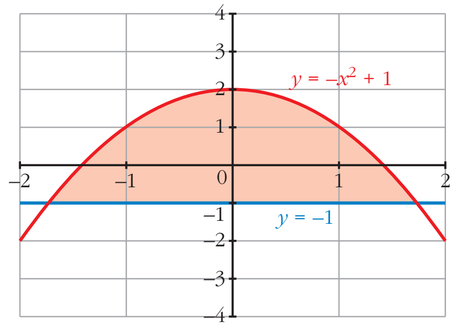
$$G\left(\sqrt{1-a}\right) = -\frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^3}{3} + \sqrt{1-a} - a\sqrt{1-a}$$

$$G\left(\sqrt{1-a}\right) - G\left(-\sqrt{1-a}\right) = \frac{4}{3}(1-a)\sqrt{1-a}$$

Como el área es $\frac{8\sqrt{2}}{3}$, igualamos:

$$\frac{4}{3}(1-a)\sqrt{1-a} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos que $a = -1$.



41 **Halla el área de la porción de plano encerrada entre las curvas $y = sen\ x$ e $y = sen\ 2x$ para valores de x en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.**

Las curvas se cortan en el punto de abscisa $\frac{\pi}{3}$.

Por tanto, tenemos dos intervalos de integración de: 0 a $\frac{\pi}{3}$ y de $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{2}$.

La función diferencia en el primer intervalo es: $y = sen\ 2x - sen\ x$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = \frac{-cos\ 2x}{2} + cos\ x$$

$$G_1(0) = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$G_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$G_1\left(\frac{\pi}{3}\right) - G_1(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$y = sen\ x - sen\ 2x$$

Su primitiva es:

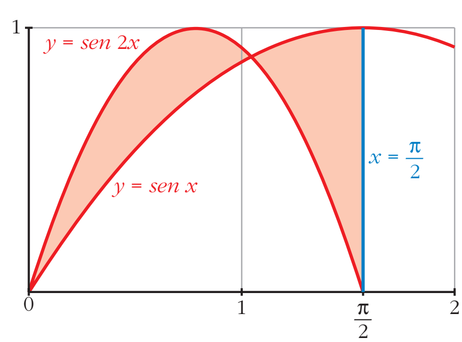
$$G_2(x) = -\ cos\ x + \frac{cos\ 2x}{2}$$

$$G_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4}$$

$$G_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$G_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - G_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

El área buscada es $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ u^2.



42 **Halla el área comprendida entre la curva $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.**

Buscamos una primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{4x}{x^2+2x+1}\right) dx =$$

$$= x - 2\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1}\,dx =$$

$$= x - 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,dx + 2\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= x - 2\,ln\,(x+1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{(x+1)}$$

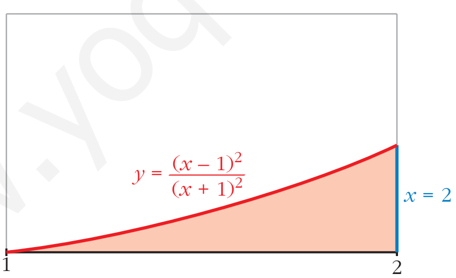
$G(1) = -2\,ln\,4 - 3$

$G(2) = \frac{2}{3} - 2\,ln\,9$

$G(2) - G(1) = \frac{2}{3} - 2ln\,9 + 2ln\,4 + 3 =$

$$= \frac{11}{3} + 2(ln\,4 - ln\,9) = \frac{11}{3} + 2\left(ln\left(\frac{4}{9}\right)\right)u^2$$

El área buscada es $\left[\frac{11}{3} + 2\,ln\left(\frac{4}{9}\right)\right]$ u^2.



43 **Calcula el área limitada por la hipérbola $xy = 1$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 1 y 4.**

La cuerda tiene por extremos los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

Así, obtenemos que la ecuación de la recta que contiene a la cuerda es:

$$y = \frac{-x}{4} + \frac{5}{4}$$

Nuestros límites de integración son 1 y 4.

Calculamos la función diferencia:

$$y = \frac{-x}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{x}$$

Su primitiva es:

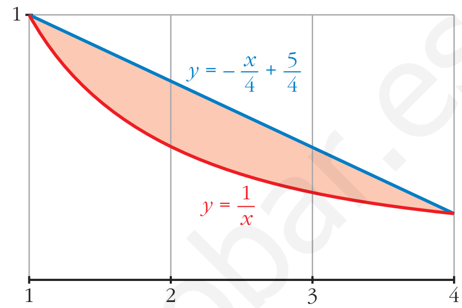
$G(x) = \frac{-x^2}{8} + \frac{5x}{4} - \ln|x|$

$G(1) = \frac{9}{8}$

$G(4) = 3 - \ln 4$

$G(4) - G(1) = 3 - \ln 4 - \frac{9}{8} = \frac{15}{8} - \ln 4$

El área buscada es $\left(\frac{15}{8} - \ln 4\right)$ u^2.

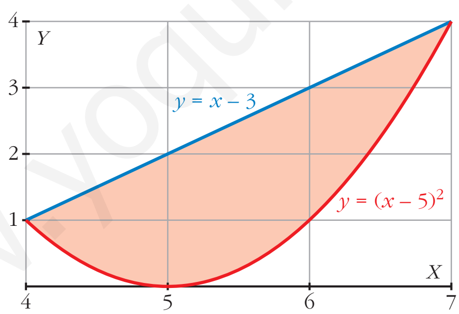


44 **La región limitada por la recta $y = x - 3$, la parábola $y = (x - 5)^2$ y el eje OX gira alrededor del eje OX. Halla el volumen del cuerpo de revolución que se genera.**

Buscamos los puntos de corte de la recta y la parábola:

$$x - 3 = (x - 5)^2 \rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0$$

Se cortan en los puntos $(4, 1)$ y $(7, 4)$. Por tanto, nuestros límites de integración son 4 y 7.



Hallamos el volumen generado por la recta $y = x - 3$ alrededor de OX entre 4 y 7, y, posteriormente, le restamos el generado por la curva $y = (x - 5)^2$ alrededor de OX entre los mismos límites.

$$V_1 = \pi \int_4^7 (x - 3)^2 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{(x - 3)^3}{3}\right]_4^7 = 21\pi \text{ u}^3$$

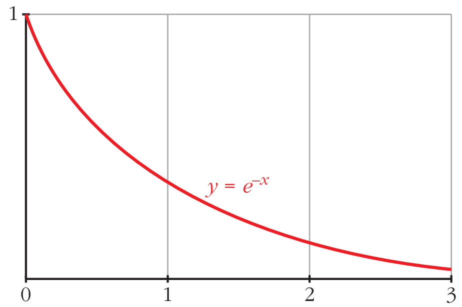
$$V_2 = \pi \int_4^7 (x - 5)^4 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{(x - 5)^5}{5}\right]_4^7 = \frac{33}{5}\pi \text{ u}^3$$

El volumen buscado es:

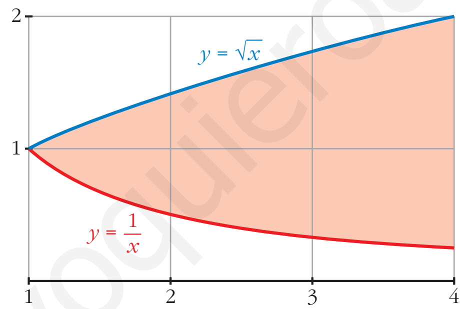
$$V_1 - V_2 = 21\pi - \frac{33}{5}\pi = \frac{72}{5}\pi \text{ u}^3$$

45 **Halla el volumen del cuerpo engendrado por la región del plano limitada por los ejes de coordenadas, la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y la recta $x = 3$, al girar alrededor del eje OX.**

$$V = \pi\int_0^3 (e^{-x})^2\, dx = \pi \cdot \int_0^3 e^{-2x}\, dx = \frac{\pi}{-2} \cdot \left[e^{-2x}\right]_0^3 = \frac{\pi}{-2} \cdot (e^{-6} - 1)\ \text{u}^3$$



46 **Calcula el volumen que se obtiene al hacer girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las funciones $y = \frac{1}{x}$, $x = y^2$, $x = 4$.**



Las curvas $y = \frac{1}{x}$ y $x = y^2$ se cortan en el punto de abscisa 1. Por tanto, nuestros límites de integración son 1 y 4.

El volumen buscado es el resultado de restar el volumen engendrado por la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor de OX entre 1 y 4, y el volumen engendrado por la curva $y = \frac{1}{x}$ alrededor de OX entre los mismos límites.

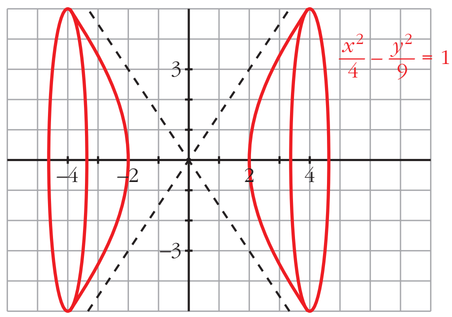
$$V_1 = \pi\int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15\pi}{2}\ \text{u}^3$$

$$V_2 = \pi\int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-1}{x}\right]_1^4 = \frac{3\pi}{4}\ \text{u}^3$$

El volumen buscado es:

$$V_1 - V_2 = \frac{15\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{27\pi}{4}\ \text{u}^3$$

47 **Calcula el volumen engendrado por la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ cuando $x \in [-4, 4]$.**



$$V = 2\pi \cdot \int_2^4 f(x)^2\, dx =$$

$$= 2\pi \cdot \int_2^4 \left(\frac{9x^2}{4} - 9\right) dx =$$

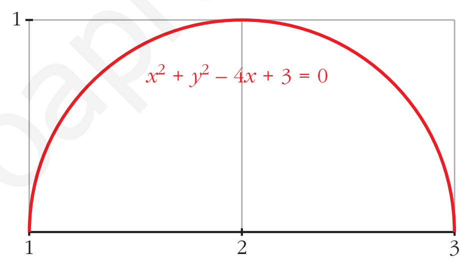
$$= 2\pi \cdot \left[\frac{3x^3}{4} - 9x\right]_2^4 =$$

$$= 2\pi \cdot 24 = 48\pi \text{ u}^3$$

48 **Halla el volumen engendrado por la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ al girar alrededor de OX.**

El círculo del ejercicio tiene su centro en $(2, 0)$ y radio 1; por tanto, corta el aje OX en $(1, 0)$ y $(3, 0)$. Así, nuestros límites de integración son 1 y 3.

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$



$$V = \pi \cdot \int_1^3 y^2\, dx = \pi \cdot \int_1^3 \left(1 - (x-2)^2\right) dx = \pi \cdot \left[x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3 = \frac{4\pi}{3} \text{ u}^3$$

49 **Obtén la familia de curvas en las que la pendiente de la tangente es $f(x) = x\, e^{2x}$. ¿Cuál de esas curvas pasa por el punto $A(0, 2)$?**

Buscamos su primitiva:

$$\int x \cdot e^{2x}\, dx$$

Utilizando el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x \quad\quad\; \to\; du = dx \\ dv = e^{2x}\, dx \;\to\; v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{array}\right\} \to \int x \cdot e^{2x}\, dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k$$

$$y = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k$$

Como pasa por $(0, 2)$, se tiene que: $-\frac{1}{4} + k = 2$, de donde $k = \frac{9}{4}$.

Así, la curva buscada es:

$$y = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{9}{4}$$

50 **Expresa la función de posición de un móvil sabiendo que su aceleración es constante de 8 cm/s², que su velocidad es 0 cuando $t = 3$ y que está en el origen a los 11 segundos.**

Llamamos $S(t)$ a la posición del móvil al cabo de t segundos. Así:

$$V(t) = S'(t) \text{ y } a(t) = S''(t) = 8 \text{ cm}/s^2$$

Calculamos la velocidad $V(t)$:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)\,dt = \int 8\,dt = 8t + k \\ V(3) = 24 + k = 0 \quad \to \quad k = -24 \end{array}\right\} V(t) = 8t - 24$$

Calculamos $S(t)$:

$$S(t) = \int V(t)\,dt = \int (8t - 24)\,dt = 4t^2 - 24t + c$$

$$S(11) = 220 + c = 0 \quad \to \quad c = -220$$

Por tanto: $S(t) = 4t^2 - 24t - 220$

51 **Un móvil se desplaza en línea recta, con movimiento uniformemente acelerado, con aceleración de 2 m/s² y con velocidad inicial $v_0 = 1$ m/s. Calcula y compara las distancias recorridas entre $t = 0$ y $t = 2$ y entre $t = 2$ y $t = 3$.**

- Calculamos la velocidad del móvil:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)\,dt = \int 2\,dt = 2t + k \\ V(0) = k = 1 \end{array}\right\} V(t) = 2t + 1$$

- Distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 2$:

$$d_1 = \int_0^2 V(t)\,dt = \int_0^2 (2t + 1)\,dt = \left[t^2 + t\right]_0^2 = 6 \text{ m}$$

- Distancia recorrida entre $t = 2$ y $t = 3$:

$$d_2 = \int_2^3 V(t)\,dt = \left[t^2 + t\right]_2^3 = 12 - 6 = 6 \text{ m}$$

- Por tanto, recorre la misma distancia entre $t = 0$ y $t = 2$ que entre $t = 2$ y $t = 3$.

CUESTIONES TEÓRICAS

52 **Calcula la derivada de la función dada por $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t\,dt$ de dos formas:**

a) Obteniendo de forma explícita $F(x)$ y, después, derivando.

b) Aplicando el teorema fundamental del cálculo.

a) $F(x) = \left[sen\ t\right]_0^{x^2} = sen\ x^2$

$F'(x) = 2x\ cos\ x^2$

b) Como f es una función continua en todos los puntos, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = f(x^2) \cdot (x^2)' = 2x\ cos\ x^2$

Página 384

53 Halla la derivada de las funciones que se dan en los siguientes apartados:

a) $F(x) = \int_0^x cos\ t^2\ dt$

b) $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 + t)\ dt$

c) $F(x) = \int_4^x \frac{1}{1 + sen^2\ t}\ dt$

d) $F(x) = \int_0^{sen\ x} (1 + t)\ dt$

a) Como f es continua, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = cos\ x^2$

b) Como f es continua, también podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = [(x^2)^2 + x]\ 2x = 2x^5 + 2x^3$

c) Del mismo modo:

$$F'(x) = \frac{1}{1 + sen\ x}$$

d) Análogamente: $F'(x) = (1 + sen\ x) \cdot (sen\ x)' = (1 + sen\ x) \cdot cos\ x$

54 Sin resolver la integral, indica dónde hay máximo o mínimo relativo en la función:

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)\ dt$$

Los máximos o mínimos relativos se obtienen para los valores de x donde la primera derivada es cero, en nuestro caso $F'(x) = 0$.

Como f es continua, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = x^2 - 1$

$F'(x) = 0$ en $x = -1$ y $x = 1$, así en los puntos de abscisa -1 y 1 hay máximos o mínimos relativos.

55 **Sabemos que $\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1 + x)$, siendo continua en $\mathbb{R}$. Calcula $f(2)$.**

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, se tiene que:

$f(x) = 2x\,(1 + x) + x^2$

$f(2) = 16$

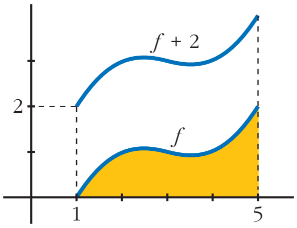
56 **Sea $F(x) = \int_1^x cos^2\, t\; dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

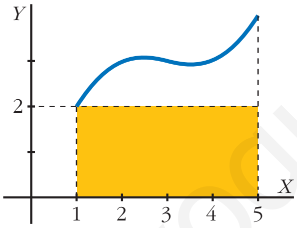
Como $f(x) = cos^2\, x$ es continua en $[0, 2\pi]$, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, y así obtenemos la primera derivada de la función $F(x)$:

$F'(x) = cos^2\, x$

Esta tiene sus extremos en los valores de x en que $F'(x) = 0$, esto es en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

57 **Sabemos que el área limitada por una función f, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$ es igual a 6. ¿Cuánto aumentará el área si trasladamos 2 unidades hacia arriba la función f?**



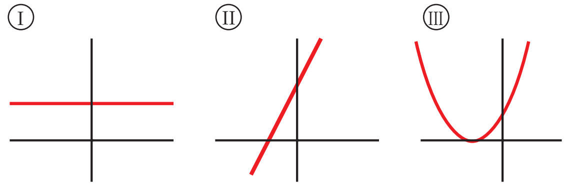


Si trasladamos también el eje OX 2 unidades hacia arriba, es fácil ver que el área añadida es la de un rectángulo 4 u de base y 2 u de altura (su área es 8 u^2). Es decir, su área aumentará 8 u^2. (No depende de lo que mida el área señalada).

58 **Si una función f es positiva para todos los valores de su variable, cualquier función primitiva de ella es creciente en cada uno de sus puntos. ¿Por qué?**

Cierto, puesto que si la primera derivada de una función es positiva, dicha función es creciente.

59 **La gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable f, a su función derivada f' y a una primitiva F de f. Identifica cada gráfica con su función, justificando la respuesta.**

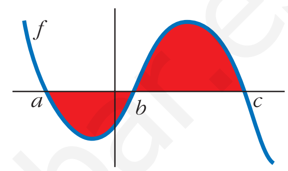


La gráfica II es la de la función; la gráfica I, la de su derivada y la gráfica III, la de su primitiva.

La razón es: partiendo de la gráfica II, observamos que se trata de una función lineal (afín) con pendiente positiva, por lo que la función derivada tiene que ser una función constante (la pendiente de la función afín).

Por otro lado, la primitiva de la función afín tiene que ser una función cuadrática, cuya gráfica corresponde a la parábola.

60 **¿Cuál de las siguientes expresiones nos da el área limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas?**



a) $\int_a^c f$ **b)** $\left|\int_a^c f\right|$ **c)** $\int_a^b f + \int_b^c f$ **d)** $-\int_a^b f + \int_b^c f$

d)

61 **Justifica la siguiente afirmación:**

Si una función f no corta al eje X, cualquier primitiva de ella no puede tener máximos ni mínimos.

Cierto, porque la función f sería la derivada de su primitiva y al no ser nunca cero, no puede tener ni máximos ni mínimos.

62 **Dada la función $y = x^2$, halla el punto $c \in [0, 2]$ tal que el área $\int_0^2 x^2\,dx$ sea igual a la de un rectángulo de base 2 y altura $f(c)$. Es decir, $2f(c) = \int_0^2 x^2\,dx$.**

¿Qué teorema asegura la existencia de c?

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$$

Así pues, se tiene: $2f(c) = \frac{8}{3}$, de donde averiguamos que $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

El teorema que asegura la existencia de c es el teorema del valor medio del cálculo integral.

63 **Sea F una función definida en $[0, +\infty)$ tal que $F(x) = \int_0^x ln(2 + t)\,dt$.**

Analiza si es verdadera o falsa cada una de estas afirmaciones:

a) $F(0) = ln\,2$

b) $F'(x) = \frac{1}{2 + x}$, $x \geq 0$

c) **F es creciente en su dominio.**

a) Calculamos $G(t) = \int ln\ (2 + t)\ dt$ integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\,(2 + t) \ \rightarrow\ du = \dfrac{1}{2 + t}\,dt \\ dv = dt \ \rightarrow\ v = t \end{array}\right\}$$

$$G(t) = \int ln\ (2 + t)\ dt = t\ ln\ (2 + t) - \int \frac{t}{2 + t}\,dt = t\ ln\ (2 + t) - \int \left(1 - \frac{2}{2 + t}\right) dt =$$

$$= t\ ln\ (2 + t) - t + 2\,ln\ (2 + t) = (t + 2)\ ln\ (2 + t) - t$$

Por tanto:

$$F(x) = G(x) - G(0) = [(x + 2)\ ln\ (2 + x) - x] - [2\ ln\ 2 - 0] =$$

$$= (x + 2)\ ln\ (x + 2) - x - 2\,ln\ 2$$

$$F(0) = 2\,ln\ 2 - 2\,ln\ 2 = 0$$

La afirmación $F(0) = ln\ 2$ es falsa (basta ver, además, que en $F(0)$ no hay área).

b) Como f es continua para $x \geq 0$, aplicamos el teorema del cálculo integral:

$$F'(x) = ln\ (2 + x)$$

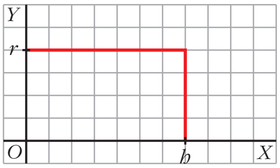
También es falsa.

c) Cierta, porque su derivada F' es positiva en todo el dominio.

PARA PROFUNDIZAR

64 Deduce por integración el volumen del cilindro de radio r y altura h.

☛ ***Haz girar alrededor de OX el rectángulo limitado por la recta $y = r$ entre $x = 0$ y $x = \mathrm{h}$.***



$$V = \pi \cdot \int_0^{\mathrm{h}} r^2\ dx = \pi \cdot \left[r^2 x\right]_0^{\mathrm{h}} = \pi\,r^2\mathrm{h}$$

65 Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el volumen de la esfera es $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

☛ ***La esfera se engendra al girar la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ alrededor del eje X.***

$$V = \pi \cdot \int_{-R}^{R} y^2\ dx = \pi \cdot \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\ dx = \pi \cdot \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \cdot \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\,R^3$$

Página 385

66 **Demuestra que el volumen del elipsoide obtenido al girar la elipse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **es:**

a) $\frac{4}{3}\pi\, a\, b^2$ **si gira alrededor de** OX**.**

b) $\frac{4}{3}\pi\, a^2\, b$ **si gira alrededor de** OY**.**

a) $V = \pi \cdot \int_{-a}^{a} \left(b^2 - x^2 \frac{b^2}{a^2}\right) dx = \pi \cdot \left[b^2 x - \frac{x^3}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right]_{-a}^{a} =$

$= \pi \cdot \left(b^2 a - \frac{ab^2}{3} + b^2 a - \frac{ab^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\, ab^2$

b) $V = \pi \cdot \int_{-b}^{b} \left(a^2 - y^2 \frac{a^2}{b^2}\right) dy = \pi \cdot \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2}\right]_{-b}^{b} =$

$= \pi \cdot \left(a^2 b - \frac{ba^2}{3} + a^2 b - \frac{ba^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\, ba^2$

67 **Determina la función** $y = f(x)$ **sabiendo que su gráfica pasa por el punto** $P(1, 1)$**, que la tangente en** P **es paralela a la recta** $3x + 3y - 1 = 0$ **y que** $f''(x) = x$**.**

La información que tenemos es:

$f(1) = 1$, porque su gráfica pasa por (1, 1).

$f'(1) = -1$, porque la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es igual a la de la recta $3x + 3y - 1 = 0 \to m = -1$

$f''(x) = x$

Calculamos $f'(x) = \int f''(x)\, dx$:

$f'(x) = \frac{x^2}{2} + a$

Como $f'(1) = -1$:

$f'(1) = \frac{1}{2} + a = -1$, entonces $a = \frac{-3}{2}$

$f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$

Calculamos $f(x) = \int f'(x)\, dx = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x + b.$

Como $f(1) = 1$, averiguamos que $b = \dfrac{7}{3}$.

Así: $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{3}$

68 **Determina el valor del parámetro $a > 0$ de tal manera que el área de la región del plano limitada por el eje X y la gráfica de la función $f(x) = a(x + 2)^2 - (x + 2)^3$ valga 108.**

La función corta al eje X en los puntos de abscisa -2 y $a - 2$. Nuestros límites de integración; buscamos una primitiva:

$$G(x) = \int [a(x + 2)^2 - (x + 2)^3]\, dx = a \cdot \frac{(x + 2)^3}{3} - \frac{(x + 2)^4}{4}$$

$G(a - 2) = \dfrac{a^4}{12}$

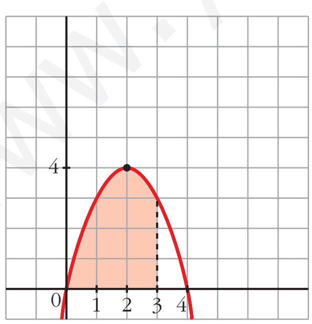
$G(-2) = 0$

$G(a - 2) - G(2) = \dfrac{a^4}{12}$

Como el área tiene que ser 108, igualamos:

$\dfrac{a^4}{12} = 108$. De donde obtenemos que: $a = 6$

69 **Halla la ecuación de una parábola de eje vertical, tangente en el origen de coordenadas a una recta de pendiente 4 y que delimita con el eje X un recinto de base [0, 3] y área 9.**



- $y = ax^2 + bx + c$
- Pasa por $(0, 0)$ $\rightarrow$ $y(0) = 0$ $\rightarrow$ $c = 0$
- $y'(0) = 4$ $\rightarrow$ $b = 4$

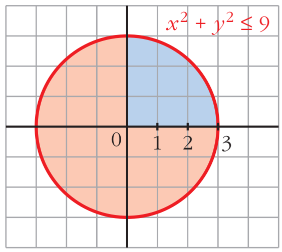
  $y = ax^2 + 4x$
- El área entre 0 y 3 es 9, así:

$$\int_0^3 (ax^2 + 4x)\, dx = \left[\frac{ax^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9a + 18 = 9$$

De donde averiguamos que: $a = -1$

Así, la función es: $y = -x^2 + 4x$

70 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área del círculo $x^2 + y^2 \leq 9$ es 9π.**



- Área $= 4 \cdot \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$

- Calculamos $G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx$, mediante un cambio de variable:

$$G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx = 3 \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}\, dx$$

Cambio: $\frac{x}{3} = sen\ t \;\rightarrow\; x = 3\ sen\ t \;\rightarrow\; dx = 3\ cos\ t\ dt$

$$G(x) = 3 \cdot \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 3cos\ t\ dt = 9\int cos^2\ t\ dt =$$

$$= 9\int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right) dt = 9\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\ sen^2\ t\right] = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\ sen^2\ t =$$

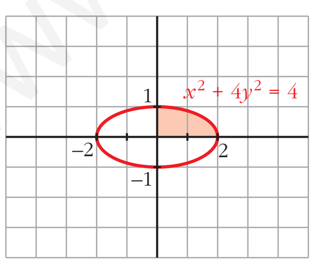
$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{9 - x^2}}{2}$$

- Por tanto, el área será: $A = 4 \cdot \big(G(3) - G(0)\big) = 4 \cdot \frac{9\pi}{4} = 9\pi$

71 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ es 2π.**



- Despejamos y: $4y^2 = 4 - x^2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; y^2 = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \;\rightarrow\; y = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$

- El área será: $A = 4 \cdot \int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx$

- Calculamos $G(x) = \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx$

Cambio: $\frac{x}{2} = sen\ t \;\rightarrow\; x = 2\, sen\ t \;\rightarrow\; dx = 2\, cos\ t\ dt$

$$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\, t}\ \cdot 2cos\, t\, dt = 2\int cos^2\, t\, dt =$$

$$= 2 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\, t}{2}\right) dt = \int (1 + cos\, 2t)\, dt =$$

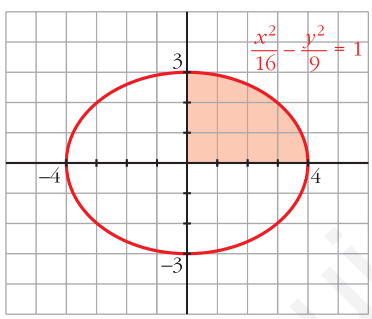
$$= t + \frac{sen^2\, t}{2} = arc\, sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= arc\, sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4}$$

- El área será:

$$A = 4 \cdot [G(2) - G(0)] = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

72 **Calcula el área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.**



- $\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} \rightarrow y^2 = 9 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow y = \pm 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}$$

- El área es:

$$A = 4 \cdot \int_0^4 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx = 12 \int_0^4 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx$$

- Calculamos $G(x) = \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx$:

Cambio: $\frac{x}{4} = sen\, t \rightarrow x = 4sen\, t \rightarrow dx = 4cos\, t\, dt$

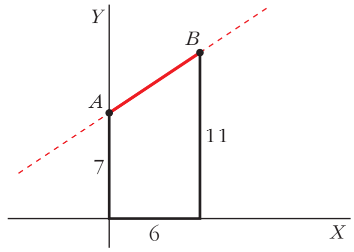
$$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\, t}\ \cdot 4cos\, t\, dt = 4\int cos^2\, t\, dt = 4 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\, t}{2}\right) dt =$$

$$= \int (2 + 2cos\, 2t)\, dt = 2t + sen\, 2t = 2\, arc\, sen\left(\frac{x}{4}\right) + 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} =$$

$$= 2\, arc\, sen\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{8}$$

- El área será: $A = 12 \cdot [G(4) - G(0)] = 12\pi$.

73 **a) Halla el volumen del tronco de cono de radios 7 cm y 11 cm y altura 6 cm que se obtiene al hacer girar el segmento *AB* alrededor de *OX*.**



☛ ***Halla la ecuación de la recta AB.***

b) Obtén la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$ **que nos da el volumen de un tronco de cono de radios** r_1, r_2 **y altura h.**

a) La recta pasa por los puntos $(0, 7)$ y $(6, 11)$.

Obtenemos su ecuación:

$$m = \frac{11-7}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \text{ la recta es } y = 7 + \frac{2}{3}x$$

Los límites de integración son $x = 0$ y $x = 6$.

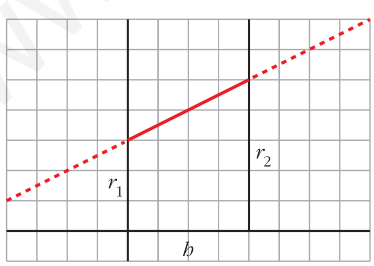
El volumen será:

$$V = \pi \cdot \int_0^6 (f(x))^2\, dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(7 + \frac{2}{3}x\right)^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^6 \left(49 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left[49x + \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{27}\right]_0^6 = 350\pi \text{ u}^3$$

b)



La recta pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, r_2).

Obtenemos la ecuación:

$$m = \frac{r_2 - r_1}{h - 0} = \frac{r_2 - r_1}{h} \quad \Rightarrow \quad y = r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h}\right) \cdot x$$

El volumen será:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) x \right]^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^h \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot x^2 + 2r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot x \right] dx =$$

$$= \pi \cdot \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot x^2 \right]_0^h =$$

$$= \pi \cdot \left[r_1^2 h + \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{h} \right) \cdot h^2 \right] =$$

$$= \pi \cdot h \cdot \left[r_1^2 + \frac{1}{3} \cdot (r_2^2 + r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2) + r_1 r_2 - r_1^2 \right] =$$

$$= \pi \cdot h \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot r_2^2 + \frac{1}{3} \cdot r_1^2 - \frac{2}{3} \cdot r_1 r_2 + r_1 r_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \pi h \left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 \right)$$

Página 385

AUTOEVALUACIÓN

1. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, calcula:

a) El área encerrada por $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

b) El área de cada uno de los dos recintos comprendidos entre las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x + 3$.

a) Representamos el recinto:

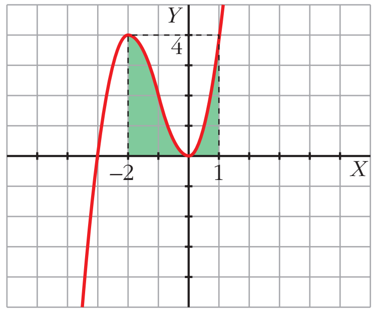
- Cortes con el eje OX:

$$x^3 + 3x^2 = 0 \to x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \end{cases}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \to 3x^2 + 6x = 0 \to x(3x + 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x + 6 \begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \to \text{Mínimo: } (0, 0) \\ f''(-2) = -6 < 0 \to \text{Máximo: } (-2, 4) \end{cases}$$



$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} (x^3 + 3x^2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} + 1\right) - (4 - 8) = \frac{21}{4}\ \text{u}^2$$

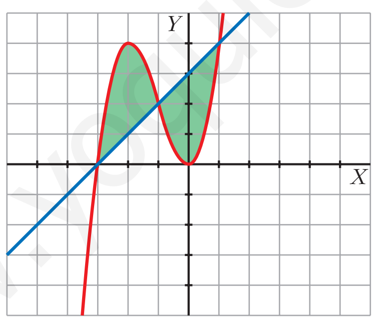
b) • Representamos $f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x + 3$:

Hallamos los puntos de corte de f y g:

$x^3 + 3x^2 = x + 3 \;\rightarrow\; x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 \\ -3 & & -3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Las gráficas se cortan en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 1$.



• Calculamos el área entre –3 y –1 y el área entre –1 y 1:

$$\int_{-3}^{-1} [(x^3 + 3x^2) - (x + 3)]\,dx = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-3}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) - \left(\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9\right) = \frac{7}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right) =$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{9}{4} = 4\ \text{u}^2$$

$$\int_{-1}^{1} [(x+3)-(x^3+3x^2)]\,dx = \int_{-1}^{1} (x+3-x^3-3x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{x^4}{4} - x^3\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{4} - 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 3 - \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{9}{4} - \left(-\frac{7}{4}\right) =$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = \frac{16}{4} = 4 \text{ u}^2$$

2. **Calcula el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$, el eje OY y la recta tangente a f en $x = 3$.**

- Calculamos la tangente a $f(x) = x^2 - 2x + 2$ en $x = 3$:

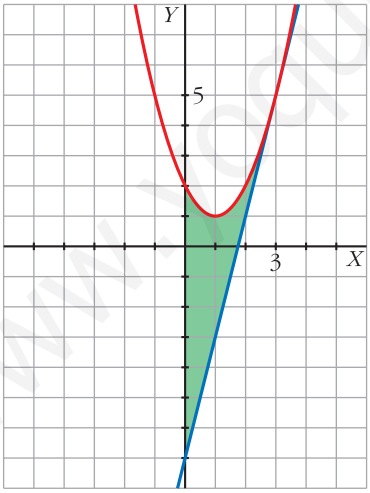
  Punto de tangencia: $x = 3$, $f(3) = 9 - 6 + 2 = 5 \rightarrow (3, 5)$

  Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = 2x - 2 \rightarrow m = f'(3) = 4$

  Ecuación de la recta tangente: $y = 5 + 4(x - 3) \rightarrow y = 4x - 7$

- Representamos el recinto:

  $f(x) = x^2 - 2x + 2$



Vértice de la parábola:

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 1,\ f(1) = 1 \rightarrow (1, 1)$

Corte con los ejes:

$x = 0,\ f(0) = 2 \rightarrow (0, 2)$

$x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$

No corta al eje OX.

- Calculamos el área:

$$A = \int_0^3 [(x^2 - 2x + 2) - (4x - 7)]\,dx =$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3 = 9 \text{ u}^2$$

3. Halla el área comprendida entre la curva de ecuación $y = \dfrac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ y el eje OX.

- Hallamos los puntos de corte de f con los ejes:

$$f(x) = 0 \ \rightarrow\ \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 12 = 0 \ \begin{cases} x = 2\sqrt{3} & \rightarrow\ (2\sqrt{3}, 0) \\ x = -2\sqrt{3} & \rightarrow\ (-2\sqrt{3}, 0) \end{cases}$$

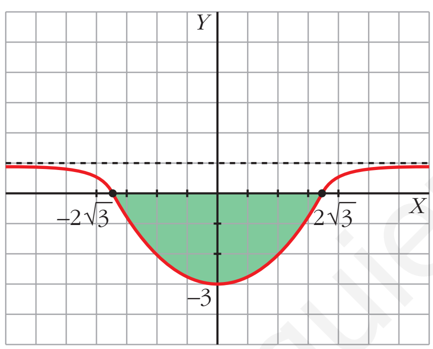
Si $x = 0$, $f(0) = -3$. Corta al eje OY en $(0, -3)$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ f'(x) = \frac{32x}{(x^2 + 4)^2} = 0 \ \rightarrow\ x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \ \text{ si } \ x < 0 \\ f'(x) > 0 \ \text{ si } \ x > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \ \text{Mínimo: } (0, -3)$$

- La función tiene una asíntota horizontal, $y = 1$, y es simétrica respecto al eje OX.



$$A = 2\left|\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}\, dx\right|$$

Calculamos la integral:

$$\int \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}\, dx = \int \left(1 - \frac{16}{x^2 + 4}\right) dx = x - \int \frac{4}{\dfrac{x^2}{4} + 1}\, dx =$$

$$= x - 8 \int \frac{1/2}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + 1}\, dx = x - 8\, arc\ tg\, \frac{x}{2} + k$$

$$\text{Área} = 2\left|\left[x - 8\, arc\ tg\, \frac{x}{2}\right]_0^{2\sqrt{3}}\right| = 2\left|2\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}\right| = 2\left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) \text{u}^2$$

4. Calcula: $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|\, dx$

Definimos por intervalos la función $f(x) = |2x - 1|$:

$$f(x) = |2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 |2x - 1|\, dx = \int_0^{1/2} (-2x + 1)\, dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\, dx =$$

$$= \left[-x^2 + x\right]_0^{1/2} + \left[x^2 - x\right]_{1/2}^2 = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2} \text{ u}^2$$

5. **Halla el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ y las rectas $y = 1$, $x = \dfrac{5}{2}$.**

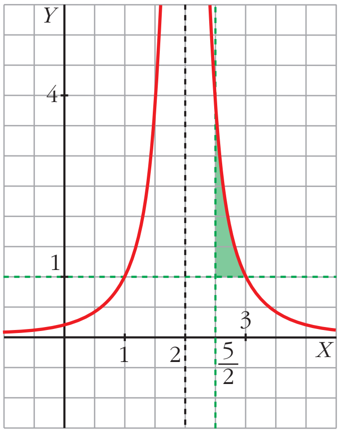
Representamos la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$:

- Asíntota vertical: $x = 2$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$
- Asíntota horizontal: $y = 0$
- Puntos singulares: $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$ para cualquier x

  No tiene puntos singulares.
- Punto de corte con la recta $y = 1$:

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \to (x-2)^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \to (1, 1) \\ x = 3 \to (3, 1) \end{cases}$$

Recinto:



$$\text{Área} = \int_{5/2}^3 \left[\frac{1}{(x-2)^2} - 1\right] dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{x-2} - x\right]_{5/2}^3 = -4 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$

6. **Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 2$.**

Ecuación de la cuerda:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \to f(0) = e^0 = 1 \\ x = 2 \to f(2) = e^2 \end{array}\right\} \text{Recta que pasa por } (0, 1) \text{ y por } (2, e^2):$$

$$m = \frac{e^2 - 1}{2} \rightarrow y = 1 + \frac{e^2 - 1}{2}x$$

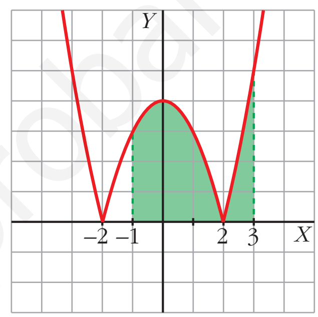
$$\text{Área} = \int_0^2 \left(1 + \frac{e^2 - 1}{2}\, x - e^x\right) dx = \left[x + \frac{e^2 - 1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - e^x\right]_0^2 =$$

$$= (2 + e^2 - 1 - e^2) - (0 + 0 - e^0) = 1 + 1 = 2 \text{ u}^2$$

7. **Calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $f(x) = |x^2 - 4|$ y las rectas $x = -1$, $x = 3$ e $y = 0$.**

Definimos la función $f(x) = |x^2 - 4|$ por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$



$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 4)\, dx + \int_2^3 (x^2 - 4)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 4\right) + (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3} \text{ u}^2$$

8. **Dada la función $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t \, dt$ con $x \ge 1$:**

a) Calcula $F'(e)$.

b) ¿Tiene F puntos de inflexión?

Justifica tu respuesta.

a) $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t \, dx \rightarrow F'(x) = (\ln x^2) \cdot 2x = (2 \ln x)\, 2x = 4x \ln x$

$F'(e) = 4e \ln e = 4e$

b) $F''(x) = 4 \ln x + 4x \cdot \frac{1}{x} = 4 \ln x + 4$; $4 \ln x + 4 = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1}$

F no tiene puntos de inflexión porque $e^{-1} < 1$; es decir, e^{-1} no pertenece al dominio de F.

9. **Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX la función $f(x) = x + 2$ entre las rectas $x = 0$ y $x = 4$.**

$$V = \pi \int_0^4 (x + 2)^2\, dx = \pi \left[\frac{(x + 2)^3}{3}\right]_0^4 = \frac{208}{3} \pi \text{ u}^3$$

12 CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Página 337

REFLEXIONA Y RESUELVE

Concepto de primitiva

■ NÚMEROS Y POTENCIAS SENCILLAS

1 a) $\int 1\,dx = x$ b) $\int 2\,dx = 2x$ c) $\int \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}x$

2 a) $\int 2x\,dx = x^2$ b) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ c) $\int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2}$

3 a) $\int 7x\,dx = \frac{7x^2}{2}$ b) $\int \frac{x}{3}\,dx = \frac{x^2}{6}$ c) $\int \sqrt{2}x\,dx = \frac{\sqrt{2}x^2}{2}$

4 a) $\int 3x^2\,dx = x^3$ b) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$ c) $\int 2x^2\,dx = \frac{2x^3}{3}$

5 a) $\int 6x^5\,dx = x^6$ b) $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6}$ c) $\int 3x^5\,dx = \frac{3x^6}{6} = \frac{x^6}{2}$

■ POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

6 a) $\int (-1)\,x^{-2}\,dx = x^{-1} = \frac{1}{x}$

b) $\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$

c) $\int \frac{5}{x^2}\,dx = \frac{-5}{x}$

7 a) $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2}$

b) $\int \frac{2}{x^3}\,dx = 2\int \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{-2}{2x^2} = \frac{-1}{x^2}$

8 a) $\int \frac{1}{(x-3)^3}\,dx = \int (x-3)^{-3}\,dx = \frac{(x-3)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2(x-3)^2}$

b) $\int \frac{5}{(x-3)^3}\,dx = 5\int \frac{1}{(x-3)^3}\,dx = \frac{-5}{2(x-3)^2}$

LAS RAÍCES TAMBIÉN SON POTENCIAS

9 a) $\int \frac{3}{2}x^{1/2}\,dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

b) $\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = \int \frac{3}{2}x^{1/2}\,dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

10 a) $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{2}x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

b) $\int 7\sqrt{x}\,dx = 7\int \sqrt{x}\,dx = \frac{14}{3}\sqrt{x^3}$

11 a) $\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3}\cdot\sqrt{x}\,dx = \int \sqrt{3}\,\sqrt{x}\,dx = \sqrt{3}\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3}$

b) $\int \frac{\sqrt{2x}}{5}\,dx = \int \frac{\sqrt{2}}{5}\sqrt{x}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{5}\int \sqrt{x}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{2}}{15}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{2x^3}}{15}$

12 a) $\int \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = x^{1/2} = \sqrt{x}$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}$

13 a) $\int \frac{3}{2\sqrt{x}}\,dx = 3\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 3\sqrt{x}$

b) $\int 5\sqrt{x^3}\,dx = 5\int x^{3/2}\,dx = 5\,\frac{x^{5/2}}{5/2} = 2\sqrt{x^5}$

14 a) $\int \frac{3}{\sqrt{5x}}\,dx = \int \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{6}{5}\sqrt{5x}$

b) $\int \sqrt{7x^3}\,dx = \sqrt{7}\int \sqrt{x^3}\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{7x^5}$

¿RECUERDAS QUE $D(\ln x) = 1/x$?

15 a) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

b) $\int \frac{1}{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x|$

16 a) $\displaystyle\int \frac{1}{x+5}\,dx = ln\,|x+5|$

b) $\displaystyle\int \frac{3}{2x+6}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x+6}\,dx = \frac{3}{2}\,ln\,|2x+6|$

ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

17 a) $\displaystyle\int cos\,x\,dx = sen\,x$

b) $\displaystyle\int 2\,cos\,x\,dx = 2\,sen\,x$

18 a) $\displaystyle\int cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

b) $\displaystyle\int cos\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,cos\,2x\,dx = \frac{1}{2}\,sen\,2x$

19 a) $\displaystyle\int (-sen\,x)\,dx = cos\,x$

b) $\displaystyle\int sen\,x\,dx = -cos\,x$

20 a) $\displaystyle\int sen(x-\pi)\,dx = -cos\,(x-\pi)$

b) $\displaystyle\int sen\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,sen\,2x\,dx = \frac{-1}{2}\,cos\,2x$

21 a) $\displaystyle\int (1+tg^2\,2x)\,dx = \frac{1}{2}\int 2(1+tg^2\,2x)\,dx = \frac{1}{2}\,tg\,2x$

b) $\displaystyle\int tg^2\,2x\,dx = \int (1+tg^2\,2x-1)\,dx = \int (1+tg^2\,2x)\,dx - \int 1\,dx = \frac{1}{2}\,tg\,2x - x$

ALGUNAS EXPONENCIALES

22 a) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$

b) $\displaystyle\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1}$

23 a) $\displaystyle\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

b) $\displaystyle\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

Página 339

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 7x^4\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

c) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x}\,dx$

d) $\int \frac{x^3}{x - 2}\,dx$

e) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x + 1}\,dx$

f) $\int \sqrt{x}\,dx$

g) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}\,dx$

h) $\int \sqrt[3]{5x^2}\,dx$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\,dx$

j) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}}\,dx$

a) $\int 7x^4\,dx = 7 \cdot \frac{x^5}{5} + k = \frac{7x^5}{5} + k$

b) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + k = \frac{-1}{x} + k$

c) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x}\,dx = \int \left(x^3 - 5x + 3 - \frac{4}{x}\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 4\,ln\,|x| + k$

d) $\int \frac{x^3}{x - 2}\,dx = \int \left(x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x - 2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\,ln\,|x - 2| + k$

e) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x + 1}\,dx = \int \left(x^3 - x^2 - 4x + 7 - \frac{11}{x + 1}\right) dx =$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 7x - 11\,ln\,|x + 1| + k$

f) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + k$

g) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{7x^4}{x^2}\right) dx - \int \left(\frac{5x^2}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{3x}{x^2}\right) dx - \int \left(\frac{4}{x^2}\right) dx =$

$= \int 7x^2\,dx - \int 5\,dx + \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{4}{x^2}\,dx =$

$= \frac{7x^3}{3} - 5x + 3\,ln\,|x| + \frac{4}{x} + k$

h) $\int \sqrt[3]{5x^2}\,dx = \int \sqrt[3]{5}\,x^{2/3}\,dx = \sqrt[3]{5} \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\,dx = \int \frac{x^{1/3}}{3x}\,dx + \int \frac{\sqrt{5}\,x^{3/2}}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\,dx + \frac{\sqrt{5}}{3}\int x^{1/2}\,dx =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{1/3}}{1/3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5x^3}}{9} + k$

j) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{5} \cdot x^{3/2}}{\sqrt[3]{3} \cdot x^{1/3}}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\int x^{7/6}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{x^{13/6}}{13/6} + k = \frac{6\sqrt{5}\,\sqrt[6]{x^{13}}}{13\sqrt[3]{3}} + k$

Página 340

2. **a)** $\int (\mathbf{3x - 5\,tg\,x})\,\mathbf{dx} = 3\int x\,dx - 5\int tg\,x\,dx = \frac{3x^2}{2} - 5\,(-\ln|\cos x|) + k =$

$= \frac{3x^2}{2} + 5\ln|\cos x| + k$

b) $\int (\mathbf{5\cos x + 3^x})\,\mathbf{dx} = 5\int \cos x\,dx + \int 3^x\,dx = 5\,sen\,x + \frac{3^x}{\ln 3} + k$

c) $\int (\mathbf{3\,tg\,x - 5\cos x})\,\mathbf{dx} = 3\int tg\,x\,dx - 5\int \cos x\,dx = 3\,(-\ln|\cos x|) - 5\,sen\,x + k =$

$= -3\ln|\cos x| - 5\,senx + k$

d) $\int (\mathbf{10^x - 5^x})\,\mathbf{dx} = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{5^x}{\ln 5} + k$

3. **a)** $\int \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x^2 + 1}}\,\mathbf{dx} = 3\,arctg\,x + k$

b) $\int \frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x^2 + 1}}\,\mathbf{dx} = \ln|x^2 + 1| + k$

c) $\int \frac{\mathbf{x^2 - 1}}{\mathbf{x^2 + 1}}\,\mathbf{dx} = \int \left(1 + \frac{-2}{x^2 + 1}\right)dx = x - 2\,arctg\,x + k$

d) $\int \frac{\mathbf{(x + 1)^2}}{\mathbf{x^2 + 1}}\,\mathbf{dx} = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}\,dx = \int \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 1}\right)dx = x + \ln|x^2 + 1| + k$

Página 342

1. Calcula:

a) $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx$ **b)** $\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx$

a) $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x)\, dx = -\dfrac{\cos^5 x}{5} + k$

b) $\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx = \dfrac{1}{\ln 2}\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x \cdot \ln 2\, dx = \dfrac{2^{\operatorname{sen} x}}{\ln 2} + k$

2. Calcula:

a) $\int \operatorname{cotg} x\, dx$ **b)** $\int \dfrac{5x}{x^4+1} dx$

a) $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + k$

b) $\int \dfrac{5x}{x^4+1}\, dx = \dfrac{5}{2}\int \dfrac{2x}{1+(x^2)^2}\, dx = \dfrac{5}{2} \operatorname{arc\,tg}(x^2) + k$

Página 343

1. Calcula: $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

Llamamos $I = \int x \operatorname{sen} x\, dx$.

$$\left.\begin{array}{l} u = x, \ \ du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx, \ \ v = -\cos x \end{array}\right\} \ I = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + k$$

2. Calcula: $\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$

Llamamos $I = \int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.

$$\left.\begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,tg} x, \ \ du = \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x\, dx, \ \ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}[x - \operatorname{arc\,tg} x] + k = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + k =$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}x + k$$

Página 344

3. Calcula: $\int x^4 e^x\, dx$

$I = \int x^4 e^x\, dx$

Resolvámosla integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^4 \;\to\; du = 4x^3\, dx \\ dv = e^x\, dx \;\to\; v = e^x \end{array}\right\}$$

$I = x^4 e^x - \int e^x 4x^3\, dx = x^4 e^x - 4\int x^3 e^x\, dx$

$I_1 = \int x^3 e^x\, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x$

(Visto en el ejercicio resuelto 2 de la página 344)

$I = x^4 e^x - 4[x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x] + k =$

$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24e^x + k$

4. Calcula: $\int sen^2\, x\, dx$

$I = \int sen^2\, x\, dx$

Resolvámosla integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = sen\, x \;\to\; du = cos\, x\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \;\to\; v = -cos\, x \end{array}\right\}$$

$I = -sen\, x\, cos\, x - \int (-cos\, x) cos\, x\, dx = -sen\, x\, cos\, x + \int cos^2\, x\, dx =$

$= -sen\, x\, cos\, x + \int (1 - sen^2\, x)\, dx = -sen\, x\, cos\, x + \int dx - \int sen^2\, x\, dx =$

$= -sen\, x\, cos\, x + x - \int sen^2\, x\, dx$

Es decir:

$$I = -sen\, x\, cos\, x + x - I \;\to\; 2I = -sen\, x\, cos\, x + x \;\to\; I = \frac{x - sen\, x\, cos\, x}{2} + k$$

Página 345

1. Calcula: $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4}\, dx$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 4}\, dx = \int \left(3x + 7 + \frac{29}{x - 4}\right) dx = \frac{3x^2}{2} + 7x + 29\, ln\, |x - 4| + k$$

2. **Calcula:** $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1}\, dx$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x + 1}\, dx = \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{17/4}{2x + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8}\, ln\, |2x + 1| + k =$$

$$= \frac{3x^2}{4} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8}\, ln\, |2x + 1| + k$$

Página 348

3. **Calcula:**

a) $\displaystyle\int \frac{5x - 3}{x^3 - x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3}\, dx$

a) Descomponemos la fracción:

$$\frac{5x - 3}{x^3 - x} = \frac{5x - 3}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$$

$$\frac{5x - 3}{x^3 - x} = \frac{A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)}$$

$$5x - 3 = A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)$$

Hallamos A, B y C dando a x los valores 0, 1 y –1:

$$\left.\begin{array}{llllll} x = 0 & \Rightarrow & -3 = -A & \Rightarrow & A = 3 \\ x = 1 & \Rightarrow & 2 = 2B & \Rightarrow & B = 1 \\ x = -1 & \Rightarrow & -8 = 2C & \Rightarrow & C = -4 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{5x - 3}{x^3 - x}\, dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{4}{x + 1} \right) dx = 3\, ln|x| + ln|x - 1| - 4\, ln|x - 1| + k$$

b) Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^2 - 2x + 6}{(x - 1)^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} = \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C}{(x - 1)^3}$$

$$x^2 - 2x + 6 = A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C$$

Dando a x los valores 1, 0 y 2, queda:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & \Rightarrow & 5 = C \\ x = 0 & \Rightarrow & 6 = A - B + C \\ x = 2 & \Rightarrow & 6 = A + B + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 5 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 6}{(x-1)^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^3} \right) dx = ln|x-1| - \frac{5}{2(x-1)^2} + k$$

4. Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^4 - 4x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x}\,dx$

a) $x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x-2)(x+2)$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^2(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

$$\frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^2(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{Ax(x-2)(x+2) + B(x-2)(x+2) + Cx^2(x+2) + Dx^2(x-2)}{x^2(x-2)(x+2)}$$

$$x^3 + 22x^2 - 12x + 8 = Ax(x-2)(x+2) + B(x-2)(x+2) + Cx^2(x+2) + Dx^2(x-2)$$

Hallamos A, B, C y D dando a x los valores 0, 2, –2 y 1:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 0 & \Rightarrow\ 8 = -4B & \Rightarrow\ B = -2 & & \\ x = 2 & \Rightarrow\ 80 = 16C & \Rightarrow\ C = 5 & & \\ x = -2 & \Rightarrow\ 112 = -16D & \Rightarrow\ D = -7 & & \\ x = 1 & \Rightarrow\ 19 = -3A - 3B + 3C - D & \Rightarrow\ -3A = -9 & \Rightarrow\ A = 3 & \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^4 - 4x^2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x-2} - \frac{7}{x+2} \right) dx =$$

$$= 3\,ln|x| + \frac{2}{x} + 5\,ln|x-2| - 7\,ln|x+2| + k$$

b) La fracción se puede simplificar:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x} = \frac{x(x-2)^2}{x(x-2)^2(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx = ln|x+2| + k$$

Página 356

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Integrales casi inmediatas

1 **Calcula las siguientes integrales inmediatas:**

a) $\int (4x^2 - 5x + 7)\,dx$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$

c) $\int \frac{1}{2x + 7}\,dx$ **d)** $\int (x - sen\ x)\,dx$

a) $\int (4x^2 - 5x + 7)\,dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + k$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \int x^{-1/5}\,dx = \frac{x^{4/5}}{4/5} + k = \frac{5\sqrt[5]{x^4}}{4} + k$

c) $\int \frac{1}{2x + 7}\,dx = \frac{1}{2}\ ln|2x + 7| + k$

d) $\int (x - sen\ x)\,dx = \frac{x^2}{2} + cox\ x + k$

2 **Resuelve estas integrales:**

a) $\int (x^2 + 4x)(x^2 - 1)\,dx$ **b)** $\int (x - 1)^3\,dx$

c) $\int \sqrt{3x}\,dx$ **d)** $\int (sen\ x + e^x)\,dx$

a) $\int (x^2 + 4x)(x^2 - 1)\,dx = \int (x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x)\,dx = \frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + k$

b) $\int (x - 1)^3\,dx = \frac{(x - 1)^4}{4} + k$

c) $\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3}\,x^{1/2}\,dx = \sqrt{3}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3} + k$

d) $\int (sen\ x + e^x)\,dx = -cos\ x + e^x + k$

s3 **Calcula las integrales siguientes:**

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x}{2}}\,dx$ **b)** $\int sen\,(x-4)\,dx$

c) $\int \frac{7}{cos^2 x}\,dx$ **d)** $\int (e^x + 3e^{-x})\,dx$

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int x^{1/3}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{x^{4/3}}{4/3} + k = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{x^4}{2}} + k$

b) $\int sen\,(x-4)\,dx = -cos\,(x-4) + k$

c) $\int \frac{7}{cos^2 x}\,dx = 7\;tg\,x + k$

d) $\int (e^x + 3e^{-x})\,dx = e^x - 3e^{-x} + k$

s4 **Halla estas integrales:**

a) $\int \frac{2}{x}\,dx$ **b)** $\int \frac{dx}{x-1}$ **c)** $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ **d)** $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx$

a) $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\;ln\,|x| + k$

b) $\int \frac{dx}{x-1} = ln\,|x-1| + k$

c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-3/2}\right) dx = ln\,|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = 3\;arc\;tg\,x + k$

5 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{dx}{x-4}$ **b)** $\int \frac{dx}{(x-4)^2}$ **c)** $\int (x-4)^2\,dx$ **d)** $\int \frac{dx}{(x-4)^3}$

a) $\int \frac{dx}{x-4} = ln\,|x-4| + k$

b) $\int \frac{dx}{(x-4)^2} = \frac{-1}{(x-4)} + k$

c) $\int (x-4)^2\,dx = \frac{(x-4)^3}{3} + k$

d) $\int \frac{dx}{(x-4)^3} = \int (x-4)^{-3}\,dx = \frac{(x-4)^{-2}}{-2} + k = \frac{-1}{2(x-4)^2} + k$

6 **Halla las siguientes integrales del tipo exponencial:**

a) $\int e^{x-4}\,dx$ **b)** $\int e^{-2x+9}\,dx$

c) $\int e^{5x}\,dx$ **d)** $\int (3^x - x^3)\,dx$

a) $\int e^{x-4}\,dx = e^{x-4} + k$

b) $\int e^{-2x+9}\,dx = \frac{-1}{2}\int -2e^{-2x+9}\,dx = \frac{-1}{2}e^{-2x+9} + k$

c) $\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + k$

d) $\int (3^x - x^3)\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x^4}{4} + k$

7 **Resuelve las siguientes integrales del tipo arco tangente:**

a) $\int \frac{2\,dx}{1+9x^2}$ **b)** $\int \frac{5\,dx}{4x^2+1}$ **c)** $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2}$ **d)** $\int \frac{dx}{4+x^2}$

a) $\int \frac{2\,dx}{1+9x^2} = \frac{2}{3}\int \frac{3\,dx}{1+(3x)^2} = \frac{2}{3}\,\text{arc tg}\,(3x) + k$

b) $\int \frac{5\,dx}{4x^2+1} = \frac{5}{2}\int \frac{2\,dx}{(2x)^2+1} = \frac{5}{2}\,\text{arc tg}\,(2x) + k$

c) $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2} = \int \frac{4\,dx}{3(1+x^2)} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4}{3}\,\text{arc tg}\,x + k$

d) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1/4}{1+(x/2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+(x/2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\left(\frac{x}{2}\right) + k$

8 **Expresa el integrando de las siguientes integrales de la forma:**

$$\frac{\textbf{dividendo}}{\textbf{divisor}} = \textbf{cociente} + \frac{\textbf{resto}}{\textbf{divisor}}$$

y resuélvelas:

a) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx$ **b)** $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+1}\,dx$ **c)** $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}\,dx$

a) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx = \int \left(x - 6 + \frac{10}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 10\ln|x+1| + k$

b) $\int \frac{x^2+2x+4}{x+1}\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{3}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x+1| + k$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2}\, dx = \int \left(x^2 - x - 1 - \frac{3}{x - 2}\right) dx =$

$\displaystyle = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3\, ln|x - 2| + k$

9 **Halla estas integrales sabiendo que son del tipo arco seno:**

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ **c)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (ln\, x)^2}}$ (*)

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2\, dx}{\sqrt{1 - (2x)^2}} = \frac{1}{2}\, arc\ sen\ (2x) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{1/2\, dx}{\sqrt{1 - (x/2)^2}} = arc\ sen \left(\frac{x}{2}\right) + k$

c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - (e^x)^2}}\, dx = arc\ sen\ (e^x) + k$

d) (*) En el libro debería decir: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - (ln\, x)^2}}$

$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - (ln\, x)^2}} = \int \frac{1/x\, dx}{\sqrt{1 - (ln\, x)^2}} = arc\ sen\ (ln\,|x|) + k$

Integrales de la forma $\int f(x)^n \cdot f'(x)\, dx$

10 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\displaystyle\int cos\, x\, sen^3\, x\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{3}{(x + 1)^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(x^2 + 3)^5}$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, ln^3\, x\, dx$

a) $\displaystyle\int cos\, x\, sen^3\, x\, dx = \frac{sen^4\, x}{4} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{3}{(x + 1)^2}\, dx = 3\int (x + 1)^{-2}\, dx = 3 \cdot \frac{(x + 1)^{-1}}{-1} = \frac{-3}{x + 1} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(x^2 + 3)^5} = \frac{1}{2} \int 2x(x^2 + 3)^{-5}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 3)^{-4}}{-4} + k = \frac{-1}{8(x^2 + 3)^4} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, ln^3\, x\, dx = \frac{ln^4|x|}{4} + k$

11 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int sen\, x \cos x\, dx$ **b)** $\int \frac{sen\, x\, dx}{\cos^5 x}$

c) $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **d)** $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+5}}$

a) $\int sen\, x \cos x\, dx = \frac{sen^2 x}{2} + k$

b) $\int \frac{sen\, x\, dx}{\cos^5 x} = -\int (-sen\, x) \cdot \cos^{-5} x\, dx = \frac{-\cos^{-4} x}{-4} + k = \frac{1}{4\cos^4 x} + k$

c) $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\int -2x(9-x^2)^{-1/2}\, dx = -\frac{(9-x^2)^{1/2}}{1/2} + k = -2\sqrt{9-x^2} + k$

d) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{-1/2}\, dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+5)^{1/2}}{1/2} = \sqrt{x^2+5} + k$

12 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\, dx$ **b)** $\int \frac{arc\, sen\, x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

c) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\, dx$ **d)** $\int \sqrt{(1+\cos x)^3}\, sen\, x\, dx$

a) $\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-2x}\,(2x-2)\, dx =$

$= \frac{1}{2}\int (x^2-2x)^{1/2}(2x-2)\, dx =$

$= \frac{1}{2}\frac{(x^2-2x)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{\sqrt{(x^2-2x)^3}}{3} + k$

b) $\int \frac{arc\, sen\, x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, arc\, sen\, x\, dx = \frac{arc\, sen^2 x}{2} + k$

c) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\, dx = \int (1+\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{(1+\ln x)^3}{3} + k$

d) $\int \sqrt{(1+\cos x)^3}\, sen\, x\, dx = -\int (1+\cos x)^{3/2}(-sen\, x)dx =$

$= -\frac{(1+\cos x)^{5/2}}{5/2} + k = \frac{-2\sqrt{(1+\cos x)^5}}{5} + k$

Página 357

Integración por partes

s13 **Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:**

a) $\int x \ln x \, dx$ **b)** $\int x e^{2x} \, dx$

c) $\int 3x \cos x \, dx$ **d)** $\int \ln(2x-1) \, dx$

e) $\int \frac{x}{e^x} \, dx$ **f)** $\int \text{arc tg } x \, dx$

g) $\int \text{arc cos } x \, dx$ **h)** $\int x^2 \ln x \, dx$

a) $\int x \ln x \, dx$

$$\begin{cases} u = \ln x \;\rightarrow\; du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = x\, dx \;\rightarrow\; v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} + k$$

b) $\int x e^{2x} \, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = e^{2x}\, dx \;\rightarrow\; v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int xe^{2x} \, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + k$$

c) $\int 3x \cos x \, dx = 3\int x \cos x \, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = \cos x\, dx \;\rightarrow\; v = \text{sen } x \end{cases}$$

$$3\int x \cos x \, dx = 3\left[x \,\text{sen } x - \int \text{sen } x \, dx\right] = 3[x \,\text{sen } x + \cos x] + k =$$

$$= 3x \,\text{sen } x + 3\cos x + k$$

d) $\int \ln(2x-1) \, dx$

$$\begin{cases} u = \ln 2x - 1 \;\rightarrow\; du = \frac{2}{2x-1} \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int ln\,(2x-1)\,dx = x\,ln\,(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}\,dx =$$

$$= x\,ln\,(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right) dx =$$

$$= x\,ln\,(2x-1) - x - \frac{1}{2}\,ln\,(2x-1) + k$$

e) $\int \frac{x}{e^x}\,dx$

$$\begin{cases} u = x \ \rightarrow \ du = dx \\ dv = e^{-x\,dx} \ \rightarrow \ v = -e^{-x}\,dx \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{e^x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + k$$

f) $\int arc\,tg\,x\,dx$

$$\begin{cases} u = arc\,tg\,x \ \rightarrow \ du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx \ \rightarrow \ v = x \end{cases}$$

$$\int arc\,tg\,x = x\,arc\,tg\,x - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x\,arc\,tg\,x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\,arc\,tg\,x - \frac{1}{2}\,ln\,(1+x^2) + k$$

g) $\int arc\,cos\,x\,dx$

$$\begin{cases} u = arc\,cos\,x \ \rightarrow \ du = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \ \rightarrow \ v = x \end{cases}$$

$$\int arc\,cos\,x\,dx = x\,arc\,cos\,x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,arc\,cos\,x - \sqrt{1-x^2} + k$$

h) $\int x^2\,ln\,x\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,x \ \rightarrow \ du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx \ \rightarrow \ v = \dfrac{x^3}{2} \end{cases}$$

$$\int x^2\,ln\,x\,dx = \frac{x^3\,ln\,x}{3} - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3\,ln\,x}{3} - \frac{x^3}{9} + k$$

14 **Resuelve las siguientes integrales aplicando dos veces la integración por partes:**

a) $\int x^2 \, sen\, x \, dx$ **b)** $\int x^2 e^{2x} \, dx$

c) $\int e^x \, sen\, x \, dx$ **d)** $\int (x+1)^2 e^x \, dx$

a) $\int x^2 \, sen\, x \, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \ \rightarrow \ du = 2x\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \ \rightarrow \ v = -cos\, x \end{cases}$$

$$\int x^2 \, sen\, x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2 \underbrace{\int x \cos x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \ \rightarrow \ du_1 = dx \\ dv_1 = \cos x\, dx \ \rightarrow \ v_1 = sen\, x \end{cases}$$

$$I_1 = x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx = x\, sen\, x + \cos x$$

Por tanto:

$$\int x^2 \, sen\, x\, dx = -x^2 \cos x + 2x\, sen\, x + 2 \cos x + k$$

b) $\int x^2 e^{2x} \, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \ \rightarrow \ du = 2x\, dx \\ dv = e^{2x}\, dx \ \rightarrow \ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \underbrace{\int x\, e^{2x}\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \ \rightarrow \ du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x}\, dx \ \rightarrow \ v_1 = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

Por tanto:

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + k = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + k$$

c) $\int e^x sen\ x\ dx$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x\,dx \\ dv = sen\ x\ dx \rightarrow v = -cos\ x \end{cases}$$

$$\int e^x\ sen\ x\ dx = -e^x\ cos\ x + \underbrace{\int e^x\ cos\ x\ dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = e^x \rightarrow du_1 = e^x\,dx \\ dv_1 = cos\ x\ dx \rightarrow v_1 = sen\ x \end{cases}$$

$$I_1 = e^x\ sen\ x - \int e^x\ sen\ x\ dx$$

Por tanto:

$$\int e^x\ sen\ x\ dx = -e^x\ cos\ x + e^x\ sen\ x - \int e^x\ sen\ x\ dx$$

$$2\int e^x\ sen\ x\ dx = e^x\ sen\ x - e^x\ cos\ x$$

$$\int e^x\ sen\ x\ dx = \frac{e^x\ sen\ x - e^x\ cos\ x}{2} + k$$

d) $\int (x+1)^2\ e^x\ dx$

$$\begin{cases} u = (x+1)^2 \rightarrow du = 2(x+1)\ dx \\ dv = e^x\ dx \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\int (x+1)^2\ e^x\ dx = (x+1)^2\ e^x - 2\underbrace{\int (x+1)\ e^x\ dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = (x+1) \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = e^x\ dx \rightarrow v_1 = e^x \end{cases}$$

$$I_1 = (x+1)\ e^x - \int e^x\ dx = (x+1)\ e^x - e^x = (x+1-1)\ e^x = x\ e^x$$

Por tanto:

$$\int (x+1)^2\ e^x\ dx = (x+1)^2\ e^x - 2x\ e^x + k =$$

$$= (x^2 + 2x + 1 - 2x)\ e^x + k = (x^2+1)\ e^x + k$$

Integrales racionales

15 **Aplica la descomposición en fracciones simples para resolver las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{3x^3}{x^2-4}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-4x^2-25x+100}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \quad \begin{cases} A = -1/5 \\ B = 1/5 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{-1/5}{x+3}\,dx + \int \frac{1/5}{x-2}\,dx = -\frac{1}{5}\,ln\,|x+3| + \frac{1}{5}\,ln\,|x-2| + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^3}{x^2-4}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 & x^2-4 \\ \cline{2-2} -3x^3+12x & 3x \\ \hline 12x & \end{array} \qquad \frac{3x^3}{x^2-4} = 3x + \frac{12x}{x^2-4}$$

$$\int \frac{3x^3}{x^2-4}\,dx = \int \left(3x + \frac{12x}{x^2-4}\right)dx = \frac{3x^2}{2} + 6\,ln\,|x^2-4| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-4x^2-25x+100}$

$x^3-4x^2-25x+100=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & -25 & 100 \\ 5 & & 5 & 5 & -100 \\ \hline & 1 & 1 & -20 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^2+x-20=0 \;\rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} \quad \begin{cases} x = -5 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^3-4x^2-25x+100} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x-4} \;\rightarrow\; A = \frac{1}{10},\; B = \frac{1}{90},\; C = -\frac{1}{9}$$

$$\int \frac{1}{x^3-4x^2-25x+100}\,dx = \frac{1}{10}\,ln\,|x-5| + \frac{1}{90}\,ln\,|x+5| - \frac{1}{9}\,ln\,|x-4| + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

Por el mismo procedimiento:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x} = 1 + \frac{-x+1}{x^2+x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx = x + ln\,|x| - 2ln\,|x+1| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx$

$$\frac{4}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \;\rightarrow\; A = -\frac{4}{3},\;\; B = \frac{4}{3}$$

$$\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx = -\frac{4}{3}\,ln\,|x+2| + \frac{4}{3}\,ln\,|x-1| + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx$

$$\frac{x^2}{x^2+4x+3} = 1 - \frac{4x+3}{x^2+4x+3} = 1 - \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}\right) \;\rightarrow\; A = \frac{9}{2},\;\; B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx = \int \left[1 - \left(\frac{9/2}{x+3} + \frac{-1/2}{x+1}\right)\right] dx =$$

$$= x - \frac{9}{2}\,ln\,|x+3| + \frac{1}{2}\,ln\,|x+1| + k$$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}\,dx$

$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2} = x + 1 + \frac{2x-3}{(x-2)(x-1)} = x + 1 + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + ln\,|x-2| + ln\,|x-1| + k$$

h) Análogamente:

$$\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x-5} + \frac{2}{x+3}\right) dx = -2ln\,|x-5| + 2ln\,|x+3| + k$$

16 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)} = \frac{A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x+3)}$$

$$2x-4 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 1 & \rightarrow\ -2 = 4B & \rightarrow & B = -1/2 \\ x = -3 & \rightarrow\ -10 = 16C & \rightarrow & C = -5/8 \\ x = 0 & \rightarrow\ -4 = -3A + 3B + C & \rightarrow & A = 5/8 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)}\,dx = \int \frac{5/8}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-5/8}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{5}{8}\,ln|x-1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{5}{8}\,ln|x+3| + k = \frac{5}{8}\,ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \frac{1}{2x-2} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)\,(x+5)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x+3}{(x-2)\,(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-2)}{(x-2)\,(x+5)}$$

$$2x+3 = A(x+5) + B(x-2)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 2 & \rightarrow\ 7 = 7A & \rightarrow & A = 1 \\ x = -5 & \rightarrow\ -7 = -7B & \rightarrow & B = 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)\,(x+5)}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+5}\,dx =$$

$$= ln|x-2| + ln|x+5| + k = ln|(x-2)(x+5)| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)}{(x-1)(x+3)^2}$$

$$1 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 1 & \to & 1 = 16A & \to & A = 1/16 \\ x = -3 & \to & 1 = -4C & \to & C = -1/4 \\ x = 0 & \to & 1 = 9A - 3B - C & \to & B = -1/16 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1/16}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/16}{x+3}\,dx + \int \frac{-1/4}{(x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\,ln|x-1| - \frac{1}{16}\,ln|x+3| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)} + k =$$

$$= \frac{1}{16}\,ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \frac{1}{4(x+3)} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$3x - 2 = A(x+2) + B(x-2)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 2 & \to & 4 = 4A & \to & A = 1 \\ x = -2 & \to & -8 = -4B & \to & B = 2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx =$$

$$= ln|x-2| + 2\,ln|x+2| + k = ln\left[|x-2|(x+2)^2\right] + k$$

PARA RESOLVER

17 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int x^4 e^{x^5}\,dx$ **b)** $\int x \text{ sen } x^2\,dx$ **c)** $\int \sqrt{(x+3)^5}\,dx$ **d)** $\int \frac{-3x}{2-6x^2}\,dx$

a) $\int x^4 e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}\int 5x^4 e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}e^{x^5} + k$

b) $\int x \text{ sen } x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x \text{ sen } x^2\,dx = \frac{-1}{2}\cos x^2 + k$

c) $\int \sqrt{(x+3)^5}\,dx = \int (x+3)^{5/2}\,dx = \frac{(x+3)^{7/2}}{7/2} = \frac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} + k$

d) $\int \frac{-3x}{2-6x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{-12x}{2-6x^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln|2-6x^2| + k$

18 **Resuelve estas integrales:**

a) $\int x \cdot 2^{-x}\,dx$ **b)** $\int x^3 \text{ sen } x\,dx$ **c)** $\int e^x \cos x\,dx$ **d)** $\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

a) $\int x \cdot 2^{-x}\,dx$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = 2^{-x}\,dx \rightarrow v = \dfrac{-2^{-x}}{\ln 2} \end{cases}$$

$$\int x\, 2^{-x}\,dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \int \frac{2^{-x}}{\ln 2}\,dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}\int 2^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{-x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2} + k$$

b) $\int x^3 \text{ sen } x\,dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \rightarrow du = 3x^2\,dx \\ dv = \text{sen } x\,dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x^3 \text{ sen } x\,dx = -x^3 \cos x + 3\int \underbrace{x^2 \cos x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x^2 \rightarrow du_1 = 2x\,dx \\ dv_1 = \cos x\,dx \rightarrow v_1 = \text{sen } x \end{cases}$$

$$I_1 = x^2 \text{ sen } x - 2\int \underbrace{x \text{ sen } x\,dx}_{I_2}$$

$$\begin{cases} u_2 = x \rightarrow du_2 = dx \\ dv_2 = \text{sen } x\,dx \rightarrow v_2 = -\cos x \end{cases}$$

$$I_2 = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \text{sen } x$$

Así: $I_1 = x^2 \, sen\, x + 2x \cos x - 2\, sen\, x$

Por tanto:

$$\int x^3 \, sen\, x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \, sen\, x + 6x \cos x - 6\, sen\, x + k$$

c) $\int e^x \cos x \, dx$

$$\begin{cases} u = e^x \ \rightarrow \ du = e^x \, dx \\ dv = \cos x \, dx \ \rightarrow \ v = sen\, x \end{cases}$$

$$I = e^x \, sen\, x - \underbrace{\int e^x \, sen\, x \, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u = e^x \ \rightarrow \ du = e^x \, dx \\ dv = sen\, x \, dx \ \rightarrow \ v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_1 = -\cos x \, e^x + \int e^x \cos x \, dx$$

$$I = e^x \, sen\, x - (-\cos x \, e^x + I)$$

$$2I = e^x \, sen\, x + e^x \cos x$$

$$I = \frac{e^x \, sen\, x + e^x \cos x}{2} + k$$

d) $\int x^5 e^{-x^3} \, dx = \int x^3 \cdot x^2 e^{-x^3} \, dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \ \rightarrow \ du = 3x^2 \, dx \\ dv = x^2 e^{-x^3} \, dx \ \rightarrow \ v = \dfrac{-1}{3} e^{-x^3} \end{cases}$$

$$\int x^5 e^{-x^3} \, dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} + \int x^2 e^{-x^3} \, dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} - \frac{1}{3} e^{-x^3} + k =$$

$$= \frac{(-x^3 - 1)}{3} e^{-x^3} + k$$

19 Calcula las integrales racionales siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+1} \, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2} \, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} \, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} \, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+1} \, dx \overset{(1)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx + \int \frac{2}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + 2 \, arc\, tg\, x + k$

(1) Hacemos $\displaystyle\int \frac{(x+2)dx}{x^2+1} = \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \right) dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x+1)^2}$$

$1 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$

Calculamos A, B, C y D, dando a x los valores 1, –1, 0 y 2:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \;\rightarrow\; 1 = 4B \;\rightarrow\; B = 1/4 \\ x = -1 \;\rightarrow\; 1 = 4D \;\rightarrow\; D = 1/4 \\ x = 0 \;\rightarrow\; 1 = -A + B + C + D \;\rightarrow\; 1/2 = -A + C \\ x = 2 \;\rightarrow\; 1 = 9A + 9B + 3C + D \;\rightarrow\; -3/2 = 9A + 3C \;\rightarrow\; -1/2 = 3A + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -1/4 \\ B = 1/4 \\ C = 1/4 \\ D = 1/4 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx = \int \frac{-1/4}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1/4}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1/4}{(x+1)}\,dx + \int \frac{1/4}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{-1}{4}\, ln|x-1| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4}\, ln|x+1| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)} + k =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - ln|x+1| + \frac{1}{x+1} \right] + k =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2x}{x^2-1} \right] + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples (para ello, encontramos las raíces del denominador):

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$2x^2 + 7x - 1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 1 & \rightarrow & 8 = 4A & \rightarrow & A = 2 \\ x = -1 & \rightarrow & -6 = -2C & \rightarrow & C = 3 \\ x = 0 & \rightarrow & -1 = A - B - C & \rightarrow & B = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2 + 7x - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = 2\,ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx = \int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x-1)(x+2)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x = 0 & \to \; -1 = -2A & \to & A = 1/2 \\ x = 1 & \to \; 6 = 3B & \to & B = 2 \\ x = -2 & \to \; -3 = 6C & \to & C = -1/2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx = \int \frac{1/2}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/2}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln|x| + 2\,ln|x-1| - \frac{1}{2}\,ln|x+2| + k =$$

$$= ln\left(\frac{(x-1)^2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}\right) + k$$

20 **Para resolver la integral $\int \cos^3 x\,dx$, hacemos:**

$$\boldsymbol{\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x(1 - sen^2 x) =}$$

$$\boldsymbol{= \cos x - \cos x\, sen^2 x}$$

Así, la descomponemos en dos integrales inmediatas. Calcúlala.

Resuelve, después, $\int sen^3 x\,dx$.

- $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x\,dx - \int \cos x\, sen^2 x\,dx = sen\,x - \frac{sen^3 x}{3} + k$

- $\displaystyle\int sen^3 x\,dx = \int sen\,x\,(sen^2 x)\,dx = \int sen\,x(1 - \cos^2 x)\,dx =$

$$= \int sen\,x\,dx - \int sen\,x \cos^2 x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$$

s21 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \int \frac{dx}{(x + 1)(x - 2)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)}$$

$$1 = A(x - 2) + B(x + 1)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = -1 & \rightarrow & 1 = -3A & \rightarrow & A = -1/3 \\ x = 2 & \rightarrow & 1 = 3B & \rightarrow & B = 1/3 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}\,dx = \int \frac{-1/3}{x + 1}\,dx + \int \frac{1/3}{x - 2}\,dx =$$

$$= \frac{-1}{3}\,ln|x + 1| + \frac{1}{3}\,ln|x - 2| + k =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln\left|\frac{x - 2}{x + 1}\right| + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{3x^2 - 6}{x(x - 1)(x + 2)}\right) dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x^2 - 6}{x(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$\frac{3x^2 - 6}{x(x - 1)(x + 2)} = \frac{A(x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 1)}{x(x - 1)(x + 2)}$$

$$3x^2 - 6 = A(x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 0 & \rightarrow & -6 = -2A & \rightarrow & A = 3 \\ x = 1 & \rightarrow & -3 = 3B & \rightarrow & B = -1 \\ x = -2 & \rightarrow & 6 = 6C & \rightarrow & C = 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = \int \left(x - 1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + 3\, ln|x| - ln|x-1| + ln|x+2| + k =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + ln\left|\frac{x^3(x+2)}{x-1}\right| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx = \int \frac{5x^2}{(x-1)^3}\, dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

$5x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & \rightarrow & 5 = C \\ x = 2 & \rightarrow & 20 = A + B + C \\ x = 0 & \rightarrow & 0 = A - B + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 5 \\ B = 10 \\ C = 5 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{5x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx = \int \left(\frac{5}{x-1} + \frac{10}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3}\right) dx =$$

$$= 5\, ln|x-1| - \frac{10}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}\, dx = \int \frac{2x-3}{(x-2)(x-3)(x+3)}\, dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-3}{(x-2)(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-3}{(x-2)(x-3)(x+3)} = \frac{A(x-3)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+3)}$$

$2x - 3 = A(x-3)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x-3)$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 2 & \rightarrow & 1 = -5A & \rightarrow & A = -1/5 \\ x = 3 & \rightarrow & 3 = 6B & \rightarrow & B = 1/2 \\ x = -3 & \rightarrow & -9 = 30C & \rightarrow & C = -3/10 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-3}{x^3-2x^2-9x+18}\,dx = \int \left(\frac{-1/5}{x-2} + \frac{1/2}{x-3} + \frac{-3/10}{x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{-1}{5}\,ln|x-2| + \frac{1}{2}\,ln|x-3| - \frac{3}{10}\,ln|x+3| + k$$

22 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\displaystyle\int \frac{ln\,x}{x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1-sen\,x}{x+cos\,x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,ln\,x}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x+2}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{arc\,tg\,x}{1+x^2}\,dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{sen\,x}{cos^4\,x}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{ln\,x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,ln\,x\,dx = \frac{ln^2|x|}{2} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{1-sen\,x}{x+cos\,x}\,dx = ln|x+cos\,x| + k$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,ln\,x}\,dx = \int \frac{1/x}{ln\,x}\,dx = ln\big|ln|x|\big| + k$

d) $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx = ln|e^x+x| + k$

e) $\displaystyle\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx = -\int \frac{-1}{x^2}\,sen\left(\frac{1}{x}\right)dx = cos\left(\frac{1}{x}\right) + k$

f) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x+2}\,dx = \int \left(2 - \frac{7}{x+2}\right)dx = 2x - 7\,ln|x+2| + k$

g) $\displaystyle\int \frac{arc\,tg\,x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,arc\,tg\,x\,dx = \frac{arc\,tg^2\,x}{2} + k$

h) $\displaystyle\int \frac{sen\,x}{cos^4\,x}\,dx = -\int (-sen\,x)(cos\,x)^{-4}\,dx = \frac{-(cos\,x)^{-3}}{-3} + k = \frac{1}{3\,cos^3\,x} + k$

Página 358

23 **Calcula las integrales indefinidas:**

a) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int ln\,(x-3)\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int ln\,(x^2+1)\,dx$

e) $\displaystyle\int (ln\,x)^2\,dx$ **f)** $\displaystyle\int e^x\cos e^x\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,(-sen\,\sqrt{x})\,dx = -2\cos(\sqrt{x}) + k$

b) $\displaystyle\int ln\,(x-3)\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,(x-3) \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x-3}\,dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int ln\,(x-3)\,dx = x\,ln|x-3| - \int \frac{x}{x-3}\,dx = x\,ln|x-3| - \int 1 + \frac{3}{x-3}\,dx =$$

$$= x\,ln|x-3| - x - 3\,ln|x-3| + k = (x-3)\,ln|x-3| - x + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,\sqrt{x} \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}\,dx \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;\rightarrow\; dv = 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\int \frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,ln\,\sqrt{x} - \int \frac{2\sqrt{x}}{2x}\,dx = 2\sqrt{x}\,ln\,\sqrt{x} - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\,ln\,\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + k = 2\sqrt{x}\,(ln\,\sqrt{x} - 1) + k$$

d) $\displaystyle\int ln\,(x^2+1)\,dx$

$$\begin{cases} u = ln\,(x^2+1) \;\rightarrow\; du = \dfrac{2x}{x^2+1}\,dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int ln\ (x^2 + 1)\ dx = x\ ln\ (x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1}\ dx =$$

$$= x\ ln\ (x^2 + 1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2 + 1}\right) dx = x\ ln\ (x^2 + 1) - 2x + 2\ arc\ tg\ x + k$$

e) $\int (ln\ x)^2\ dx$

$$\begin{cases} u = (ln\ x)^2 & \rightarrow \quad du = 2\ (ln\ x) \cdot \dfrac{1}{x}\ dx \\ dv = dx & \rightarrow \quad v = x \end{cases}$$

$$\int (ln\ x)^2\ dx = x\ (ln\ x)^2 - 2 \int ln\ x\ dx = x\ ln^2|x| - 2\ x\ ln|x| + 2x + k$$

f) $\int e^x\ cos\ e^x dx = sen\ e^x + k$

g) $\int \dfrac{1}{1 - x^2}\ dx = \int \dfrac{-1}{(x + 1)(x - 1)}\ dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = -1 & \rightarrow & -1 = -2A & \rightarrow & A = 1/2 \\ x = 1 & \rightarrow & -1 = 2B & \rightarrow & B = -1/2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{1 - x^2}\ dx = \int \left(\frac{1/2}{x + 1} + \frac{-1/2}{x - 1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ ln|x + 1| - \frac{1}{2}\ ln|x - 1| + k = ln \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} + k$$

h) $\int \dfrac{(1 - x)^2}{1 + x}\ dx = \int \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}\ dx = \int \left(x - 3 + \dfrac{4}{x + 1}\right) dx =$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ ln|x + 1| + k$$

s24 **Resuelve:**

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

☛ ***En el numerador, suma y resta*** e^x.

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

☛ ***Descomponla en suma de otras dos.***

a) $$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx \overset{(1)}{=} \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) = x - \ln(1+e^x) + k$$

(1) Sumamos y restamos e^x en el numerador.

b) $$\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \int \frac{3dx}{\sqrt{9-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$

$$= -\sqrt{9-x^2} + 3\int \frac{1/3}{\sqrt{1-(x/3)^2}}\,dx =$$

$$= -\sqrt{9-x^2} + 3\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{3}\right) + k$$

25 **Resuelve por sustitución:**

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}}$ **c)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$ **e)** $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

☛ ***a), c), d) Haz*** $x+1=t^2$. ***b) Haz*** $x=t^4$. ***e), f) Haz*** $x=t^2$.

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

Cambio: $x+2=t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)t\cdot 2t\,dt = \int (2t^4-2t^2)\,dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

Cambio: $x = t^4 \;\rightarrow\; dx = 4t^3\,dt$

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3\,dt}{t^4 - t} = \int \frac{4t^2\,dt}{t^3 - 1} = \frac{4}{3}\int \frac{3t^2\,dt}{t^3 - 1} = \frac{4}{3}\,ln|t^3 - 1| + k =$$

$$= \frac{4}{3}\,ln|\sqrt[4]{x^3} - 1| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}}\,dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}}\,dx = \int \frac{(t^2 - 1)}{t}\cdot 2t\,dt = \int (2t^2 - 2)\,dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{(x + 1)^3}}{3} - 2\sqrt{x + 1} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}\,dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{(t^2 - 1)\,t} = \int \frac{2\,dt}{(t + 1)(t - 1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{(t + 1)(t - 1)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t - 1} = \frac{A(t - 1) + B(t + 1)}{(t + 1)(t - 1)}$$

$$2 = A(t - 1) + B(t + 1)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lll} t = -1 & \rightarrow\; 2 = -2A & \rightarrow\; A = -1 \\ t = 1 & \rightarrow\; 2 = 2B & \rightarrow\; B = 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2\,dt}{(t + 1)(t - 1)} = \int \left(\frac{-1}{t + 1} + \frac{1}{t - 1}\right) dt = -ln|t + 1| + ln|t - 1| + k =$$

$$= ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + k$$

Así:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}\,dx = ln\left|\frac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt{x + 1} + 1}\right| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

Cambio: $x = t^2 \ \rightarrow \ dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{t^2+t} = \int \frac{2\,dt}{t+1} = 2\,ln|t+1| + k =$$

$$= 2\,ln\,(\sqrt{x}+1) + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

Cambio: $x = t^2 \ \rightarrow \ dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \int \frac{t \cdot 2t\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2t^2\,dt}{1+t^2} = \int \left(2 - \frac{2}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= 2t - 2\,arc\,tg\,t + k = 2\sqrt{x} - 2\,arc\,tg\,\sqrt{x} + k$$

26 **Resuelve, utilizando un cambio de variable, estas integrales:**

a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^{x}}$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

a) Haz $\boldsymbol{x = sen\,t}$***.***

a) Hacemos $x = sen\,t \ \rightarrow \ dx = cos\,t\,dt$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-sen^2\,t}\ cos\,t\,dt = \int cos^2\,t\,dt \overset{(1)}{=} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos\,2t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int 2\,cos\,2t\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\,sen\,2t + k$$

(1) $cos^2\,t = \dfrac{1+cos\,2t}{2}$

Deshacemos el cambio:

$sen\,t = x \ \rightarrow \ cos\,t = \sqrt{1-x^2}\,; \quad t = arc\,sen\,x$

$sen\,2t = 2\,sen\,t\,cos\,t = 2x\sqrt{1-x^2}$

Por tanto:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(arc\,sen\,x + x\sqrt{1-x^2}\right) + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x}$

Hacemos el cambio: $e^x = t \ \to \ x = ln\ t \ \to \ dx = \frac{1}{t}\ dt$

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x} = \int \frac{1/t}{t^2 - 3t}\ dt = \int \frac{1}{t^3 - 3t^2}\ dt = \int \frac{1}{t^2(t-3)}\ dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-3} = \frac{At(t-3) + B(t-3) + Ct^2}{t^2(t-3)}$$

$$1 = At(t-3) + B(t-3) + Ct^2$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} t = 0 & \to \ 1 = -3B & \to & B = -1/3 \\ t = 3 & \to \ 1 = 9C & \to & C = 1/9 \\ t = 1 & \to \ 1 = -2A - 2B + C & \to & A = -1/9 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{1}{t^2(t-3)}\ dt = \int \left(\frac{-1/9}{t} + \frac{-1/3}{t^2} + \frac{1/9}{t-3} \right) dt =$$

$$= \frac{-1}{9}\ ln|t| + \frac{1}{3t} + \frac{1}{9}\ ln|t-3| + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x} = \frac{-1}{9}\ ln\ e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\ ln|e^x - 3| + k =$$

$$= -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\ ln|e^x - 3| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1}\ dx$

Hacemos el cambio: $e^x = t \ \to \ x = ln\ t \ \to \ dx = \frac{1}{t}\ dt$

$$\int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1}\ dx = \int \frac{t^3 - t}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{t}\ dt = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\ dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2 + 1}\right) dt =$$

$$= t - 2\ arc\ tg\ t + k = e^x - 2\ arc\ tg\ (e^x) + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\ dx$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \ \to \ dx = 2t\ dt$

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\ dx = \int \frac{2t\ dt}{1 + t} = \int \left(2 - \frac{2}{1 + t}\right) dt = 2t - 2\ ln|1 + t| + k =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ ln\ (1 + \sqrt{x}) + k$$

s27 **Encuentra la primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$ que se anula para $x = 0$.**

$$F(x) = \int \frac{1}{1+3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+3x}\,dx = \frac{1}{3}\,ln|1+3x| + k$$

$F(0) = k = 0$

Por tanto: $F(x) = \dfrac{-1}{3}\,ln|1+3x|$

28 **Halla la función F para la que $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $F(1) = 2$.**

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x} + k$$

$F(1) = -1 + k = 2 \quad \Rightarrow \quad k = 3$

Por tanto: $F(x) = \dfrac{-1}{x} + 3$

29 **De todas las primitivas de la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de ellas toma el valor 4 para $x = 1$?**

$$F(x) = \int (4x-6)\,dx = 2x^2 - 6x + k$$

$F(1) = 2 - 6 + k = 4 \quad \Rightarrow \quad k = 8$

Por tanto: $F(x) = 2x^2 - 6x + 8$

30 **Halla $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = 6x$, $f'(0) = 1$ y $f(2) = 5$.**

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \displaystyle\int 6x\,dx = 3x^2 + c \\ f'(0) = c = 1 \end{array}\right\} \quad f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \displaystyle\int (3x^2+1)\,dx = x^3 + x + k \\ f(2) = 10 + k = 5 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k = -5$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + x - 5$

31 **Resuelve las siguientes integrales por sustitución:**

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \sqrt{e^x - 1}\,dx$

☛ ***a) Haz*** $\sqrt{e^x} = t$. ***b) Haz*** $\sqrt{e^x - 1} = t$.

a) $\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}\,dx$

Cambio: $\sqrt{e^x} = t \ \rightarrow\ e^{x/2} = t \ \rightarrow\ \frac{x}{2} = \ln t \ \rightarrow\ dx = \frac{2}{t}\,dt$

$$\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}} = \int \frac{t^2 \cdot (2/t)\,dt}{1-t} = \int \frac{2t\,dt}{1-t} = \int \left(-2 + \frac{2}{1-t}\right) dt =$$

$$= -2t - 2\ln|1-t| + k = -2\sqrt{e^x} - 2\ln\left|1-\sqrt{e^x}\right| + k$$

b) $\int \sqrt{e^x - 1}\,dx$

Cambio: $\sqrt{e^x-1} = t \ \rightarrow\ e^x = t^2+1 \ \rightarrow\ x = \ln(t^2+1) \ \rightarrow\ dx = \frac{2t}{t^2+1}\,dt$

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int t \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = \int \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= 2t - 2\,\text{arc tg}\,t + k = 2\sqrt{e^x-1} - 2\,\text{arc tg}\,\sqrt{e^x-1} + k$$

32 **Calcula** $\int \frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx.$

Multiplica el numerador y el denominador por 1 – cos x.

$$\int \frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{\text{sen}^2 x\,(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\,dx = \int \frac{\text{sen}^2 x\,(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\text{sen}^2 x\,(1-\cos x)}{\text{sen}^2 x}\,dx = \int (1-\cos x)\,dx = x - \text{sen}\,x + k$$

33 **En el ejercicio resuelto de la página 344, se ha calculado la integral** $\int \cos^2 x\,dx$ **de dos formas:**

— Aplicando fórmulas trigonométricas.

— Integrando por partes.

Utiliza estos dos métodos para resolver:

$$\int \text{sen}^2 x\,dx$$

- $\int \text{sen}^2 x\,dx \overset{(1)}{=} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x + k$

  (1) Aplicando la fórmula: $\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

- Por partes:

$$\begin{cases} u = \text{sen}\,x \ \rightarrow\ du = \cos x\,dx \\ dv = \text{sen}\,x\,dx \ \rightarrow\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$I = -sen\,x\,\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -sen\,x\,\cos x + \int (1 - sen^2\,x)\,dx$$

$$2I = -sen\,x\,\cos x + x \;\rightarrow\; I = \frac{-sen\,x\,\cos x}{2} + \frac{1}{2}x$$

$$I = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sen\,2x + k = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}sen\,2x + k$$

s34 **Encuentra una primitiva de la función $f(x) = x^2\,sen\,x$ cuyo valor para $x = \pi$ sea 4.**

$$F(x) = \int x^2\,sen\,x\,dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 \;\rightarrow\; du = 2x\,dx \\ dv = sen\,x\,dx \;\rightarrow\; v = -\cos x \end{cases}$$

$$F(x) = -x^2 \cos x + 2\underbrace{\int x \cos x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \;\rightarrow\; du_1 = dx \\ dv_1 = \cos x\,dx \;\rightarrow\; v_1 = sen\,x \end{cases}$$

$$I_1 = x\,sen\,x - \int sen\,x\,dx = x\,sen\,x + \cos x$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = -x^2 \cos x + 2\,x\,sen\,x + 2\cos x + k \\ F(\pi) = \pi^2 - 2 + k = 4 \;\Rightarrow\; k = 6 - \pi^2 \end{array}\right\}$$

$$F(x) = -x^2 \cos x + 2\,x\,sen\,x + 2\cos x + 6 - \pi^2$$

s35 **Determina la función $f(x)$ sabiendo que:**

$$\boldsymbol{f''(x) = x\ln x,\; f'(1) = 0 \;\text{ y }\; f(e) = \frac{e}{4}}$$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx \;\rightarrow\; f'(x) = \int x\ln x\,dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \ln x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + k$$

$f'(1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + k = -\frac{1}{4} + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}$

$f'(x) = \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$

$f(x) = \int f'(x)\,dx \;\to\; f(x) = \int \left[\frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right] dx = \underbrace{\int \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) dx}_{I} + \frac{1}{4}x$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) \;\to\; du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{x^2}{2}\,dx \;\to\; v = \frac{x^3}{6} \end{cases}$$

$I = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \int \frac{x^2}{6}\,dx = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + k$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}x + k \\ f(e) = \frac{e^3}{12} - \frac{e^3}{18} + \frac{e}{4} + k = \frac{e^3}{36} + \frac{e}{4} + k = \frac{e}{4} \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{e^3}{36} \end{array}\right\}$$

$f(x) = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}x - \frac{e^3}{36}$

s36 Calcula la expresión de una función $f(x)$ tal que $f'(x) = x\,e^{-x^2}$ y que $f(0) = \frac{1}{2}$.

$f(x) = \int x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} + k$

$f(0) = -\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k = 1$

Por tanto: $f(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} + 1$

s37 De una función $y = f(x)$, $x > -1$ sabemos que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$ donde a es una constante. Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

$y = \int \frac{a}{1+x}\,dx \;\to\; f(x) = a\,ln(1 + x) + k \qquad (x > -1)$

$f(0) = 1 \;\rightarrow\; a\,ln(1 + 0) + k = 1 \;\rightarrow\; k = 1$

$f(1) = -1 \;\rightarrow\; a\,ln\,2 + k = -1 \;\rightarrow\; a\,ln\,2 = -1 - 1 \;\rightarrow\; a = \dfrac{-2}{ln\,2}$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{-2}{ln\,2}\,ln(1 + x) + 1,\;\; x > -1.$

Página 359

s38 **Dada la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ln\,(1 + x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.**

$\int ln\,(1 + x^2)\,dx$

Integramos por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln(1 + x^2) \;\rightarrow\; du = \dfrac{2x}{1 + x^2}\,dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{array}\right\}$$

$$\int ln\,(1 + x^2)\,dx = x\,ln\,(1 + x^2) - \int \frac{2x^2}{1 + x^2}\,dx =$$

$$= x\,ln\,(1 + x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx =$$

$$= x\,ln\,(1 + x^2) - 2(x - arc\;tg\;x) + k$$

$F(x) = x\,ln\,(1 + x^2) - 2x + 2arc\;tg\;x + k$

Debe pasar por $(0, 0) \;\rightarrow\; F(0) = 0$

$F(0) = 0 - 2 \cdot 0 + 0 + k = 0 \;\rightarrow\; k = 0$

Así, $F(x) = x\,ln\,(1 + x^2) - 2x + 2arc\;tg\;x.$

s39 **Calcula a para que una primitiva de la función $\int (ax^2 + x\cos x + 1)\,dx$ pase por $(\pi, -1)$.**

$$I = \int (ax^2 + x\cos x + 1)\,dx = \int (ax^2 + 1)\,dx + \int x\cos x\,dx =$$

$$= \frac{ax^3}{3} + x + \underbrace{\int x\cos x\,dx}_{I_1}$$

Calculamos I_1 por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = \cos x\,dx \;\rightarrow\; v = sen\,x \end{array}\right\}$$

$$I_1 = x\,sen\,x - \int sen\,x\,dx = x\,sen\,x + \cos x + k$$

$F(x) = \frac{ax^3}{3} + x + x \text{ sen } x + \cos x$

Como pasa por $(\pi, -1)$:

$F(\pi) = -1 \rightarrow \frac{a\pi^3}{3} + \pi + \cancel{\pi \cdot \text{sen } \pi} + \cos \pi = -1$

$\frac{a\pi^3}{3} + \pi - 1 = -1 \rightarrow \frac{a\pi^3}{3} = -\pi \rightarrow a = \frac{-3\pi}{\pi^3} = \frac{-3}{\pi^2}$

Así, $F(x) = \frac{-3}{\pi^2}\frac{x^3}{3} + x + x \text{ sen } x + \cos x = -\frac{x^3}{\pi^2} + x + x \text{ sen } x + \cos x$

s40 **Halla $\int e^{ax}(x^2 + bx + c)\, dx$ en función de los parámetros a, b y c.**

$I = \int e^{ax}(x^2 + bx + c)\, dx$

Integramos por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 + bx + c \rightarrow du = (2x + b)dx \\ dv = e^{ax}dx \rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right\}$$

Así:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}\underbrace{\int e^{ax}(2x + b)\, dx}_{I_1}$$

Volvemos a integrar por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x + b \rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{ax}dx \rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}I_1 =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}(2x + b) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\, 2dx\right] =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a^2}e^{ax}(2x + b) + \frac{2}{a^3}e^{ax} + k$$

s41 **Encuentra la función derivable $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y**

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$:

$$f(x) = \int f'(x)\, dx \quad \begin{cases} \int (x^2 - 2x)\, dx & \text{si } -1 \le x < 0 \\ \int (e^x - 1)\, dx & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + k & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x + c & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

- Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(1) = -1$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 0$.

$$f(1) = -1 \Rightarrow e - 1 + c = -1 \Rightarrow c = -e$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 - e \end{array}\right\} k = 1 - e$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

s42 De una función derivable se sabe que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \le 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

a) Si $x \ne 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ \ln x + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(-1) = -4$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1$:

$$f(-1) = -\frac{5}{2} + k = -4 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = c \end{array}\right\} c = 0$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(2) = \ln 2$; $f'(2) = \dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente será: $y = \ln 2 + \dfrac{1}{2}(x - 2)$

s43 **Calcula:**

a) $\int |1-x|\,dx$ **b)** $\int (3+|x|)\,dx$

c) $\int |2x-1|\,dx$ **d)** $\int \left|\frac{x}{2}-2\right|\,dx$

a) $\int |1-x|\,dx$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x<1 \\ -1+x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |1-x|\,dx = \begin{cases} x-\dfrac{x^2}{2}+k & \text{si } x<1 \\ -x+\dfrac{x^2}{2}+c & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

En $x = 1$, la función ha de ser continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2}+k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\dfrac{1}{2}+c \end{array}\right\} \dfrac{1}{2}+k = -\dfrac{1}{2}+c \;\Rightarrow\; c = 1+k$$

Por tanto:

$$\int |1-x|\,dx = \begin{cases} x-\dfrac{x^2}{2}+k & \text{si } x<1 \\ -x+\dfrac{x^2}{2}+1+k & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

b) $\int (3+|x|)\,dx$

$$3+|x| = \begin{cases} 3-x & \text{si } x<0 \\ 3+x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \int (3+|x|)\,dx = \begin{cases} 3x-\dfrac{x^2}{2}+k & \text{si } x<0 \\ 3x+\dfrac{x^2}{2}+c & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, $f(x)$ ha de ser continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = c \end{array}\right\} c = k$$

Por tanto:

$$\int (3+|x|)\,dx = \begin{cases} 3x-\dfrac{x^2}{2}+k & \text{si } x<0 \\ 3x+\dfrac{x^2}{2}+k & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

c) $\int |2x - 1| \, dx$

$$|2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |2x - 1| \, dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x + c & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$f(x)$ ha de ser continua en $x = \dfrac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (1/2)^-} f(x) = \dfrac{1}{4} + k \\ \lim\limits_{x \to (1/2)^+} f(x) = -\dfrac{1}{4} + c \end{array}\right\} \dfrac{1}{4} + k = -\dfrac{1}{4} + c \Rightarrow c = \dfrac{1}{2} + k$$

Por tanto:

$$\int |2x - 1| \, dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x + \dfrac{1}{2} + k & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d) $\int \left|\dfrac{x}{2} - 2\right| dx$

$$\left|\frac{x}{2} - 2\right| = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} + 2 & \text{si } x < 4 \\ \dfrac{x}{2} - 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \int \left|\frac{x}{2} - 2\right| dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + 2x + k & \text{si } x < 4 \\ \dfrac{x^2}{4} - 2x + c & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$f(x)$ ha de ser continua en $x = 4$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 4 + k \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -4 + c \end{array}\right\} 4 + k = -4 + c \Rightarrow c = 8 + k$$

Por tanto:

$$\int \left|\frac{x}{2} - 2\right| dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + 2x + k & \text{si } x < 4 \\ \dfrac{x^2}{4} - 2x + 8 + k & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

44 **Calcula** $\int \frac{1}{sen^2 x \cos^2 x} dx$.

☛ ***Utiliza la igualdad*** $sen^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\int \frac{1}{sen^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^2 x \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{sen^2 x}{sen^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{sen^2 x \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{sen^2 x} dx = tg\, x - cotg\, x + k$$

45 **Calcula** $\int \cos^4 x\, dx$ **utilizando la expresión:**

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\cos^4 x = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos^2 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}\right) + \frac{\cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} = \frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}$$

(1) $\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}$

Por tanto:

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{3}{8}x + \frac{sen\, 4x}{32} + \frac{sen\, 2x}{4} + k$$

46 **Resuelve:**

a) $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

b) $\int \sqrt{9 - 4x^2}\, dx$

☛ ***a) Haz*** $x = 2\, sen\, t$. ***b) Haz*** $x = 3/2\, sen\, t$.

a) $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

Hacemos $x = 2sen\, t \rightarrow dx = 2\cos t\, dt$

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int \sqrt{4 - 4sen^2 t}\; 2\cos t\, dt = \int \sqrt{4(1 - sen^2 t)}\; 2\cos t\, dt =$$

$$= \int 4\cos^2 t\, dt = 4\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = 4\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} sen\, 2t\right) + k =$$

$$= 2t + sen\, 2t + k$$

Deshacemos el cambio con $t = arc\ sen\ \dfrac{x}{2}$:

$$sen\ 2t = 2sen\ t\ cos\ t = 2sen\ t\ \sqrt{1 - sen^2\ t} = 2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$$I = 2arc\ sen\ \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + k$$

b) $\displaystyle\int \sqrt{9 - 4x^2}\ dx$

Hacemos $x = \dfrac{3}{2}\ sen\ t \to dx = \dfrac{3}{2}\ cos\ t\ dt$

$$\int \sqrt{9 - 4x^2}\ dx = \int \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{9}{4} sen^2\ t} \cdot \frac{3}{2}\ cos\ t\ dt = \frac{3}{2}\int \sqrt{9(1 - sen^2\ t)}\ cos\ t\ dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int 3cos^2\ t\ dt = \frac{9}{2}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos\ 2t}{2}\right) dt = \frac{9}{2}\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} sen\ 2t\right) =$$

$$= \frac{9}{4}t + \frac{9}{8} sen\ 2t + k$$

Deshacemos el cambio:

$$\frac{2x}{3} = sen\ t \to t = arc\ sen\ \frac{2x}{3}$$

$$sen\ 2t = 2sen\ t\ cos\ t = 2sen\ t\ \sqrt{1 - sen^2\ t} = 2 \cdot \frac{2x}{3}\sqrt{1 - \frac{4x^2}{9}} = \frac{4x}{9}\sqrt{9 - 4x^2}$$

$$I = \frac{9}{4}\left(arc\ sen\ \frac{2x}{3}\right) + \frac{9}{8}\left(\frac{4x}{9}\sqrt{9 - 4x^2}\right) + k = \frac{9}{4}\ arc\ sen\ \frac{2x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9 - 4x^2} + k$$

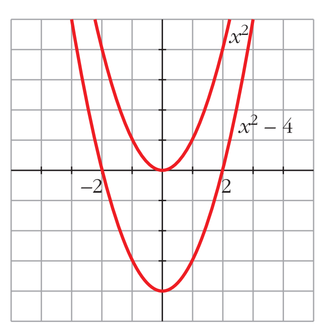
47 **Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x$ tal que $F(x) \le 0$ en el intervalo [–2, 2].**

$F(x) = \displaystyle\int 2x\ dx = x^2 + k$

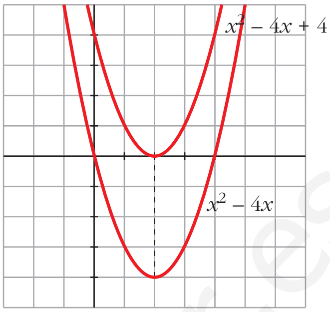
$x^2 + k \le 0$ en [–2, 2]

Debe ser $k \le -4$; por ejemplo, la función $F(x) = x^2 - 4$ es menor o igual que 0 en [–2, 2].

Representamos x^2 y $x^2 - 4$:



48 **Busca una primitva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x - 4$ que verifique $F(x) \geq 0$ en el intervalo [0, 4].**



$F(x) = \int (2x - 4)\ dx = x^2 - 4x + k$

Debe ser $F(x) \geq 0$ en [0, 4].

Representamos $y = x^2 - 4x$:

Para que $F(x) \geq 0$ en [0, 4] debe ser $k \geq 4$.

Por ejemplo, $F(x) = x^2 - 4x + 4$.

49 **Halla $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = \cos\frac{x}{2},\quad f'(2\pi) = 0 \ \text{ y } \ f(0) = 1$$

$$f'(x) = \int f''(x)\ dx = \int \cos\frac{x}{2}\ dx = 2\int \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\ dx = 2\ sen\,\frac{x}{2} + k$$

$$f'(x) = 2\ sen\,\frac{x}{2} + k;\ \text{ como } f'(2\pi) = 0 \ \rightarrow\ 2\ sen\,\frac{2\pi}{2} + k = 0 \ \rightarrow\ k = 0$$

$$f(x) = \int f'(x)\ dx = \int 2sen\,\frac{x}{2}\ dx = 2 \cdot 2\int \frac{1}{2}\ sen\,\frac{x}{2}\ dx = 4\left(-\cos\frac{x}{2}\right) + k'$$

$$f(x) = -4\cos\frac{x}{2} + k';\ \text{ como } f(0) = 1 \ \rightarrow\ f(0) = -4\cos 0 + k' = 1 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ -4 + k' = 1 \ \rightarrow\ k' = 5$$

Por tanto, la función que buscamos es $f(x) = -4\cos\dfrac{x}{2} + 5$

50 **a) Halla la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquiera de sus puntos viene dada por la función:**

$$f(x) = \frac{x - 2}{2x + 4}$$

b) Determina, de esa familia, la curva que pasa por el punto $A\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$.

a) La pendiente de la recta tangente a la curva en uno de sus puntos viene dada por la derivada de la curva en ese punto.

Por tanto, $m = F'(x) = \dfrac{x - 2}{2x + 4}$.

Buscamos $F(x) = \displaystyle\int \frac{x - 2}{2x + 4}\ dx$.

$$F(x) = \int \frac{x - 2}{2x + 4}\ dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2x + 4}\right) dx = \frac{1}{2}x - 2\int \frac{2}{2x + 4}\ dx =$$

$$= \frac{x}{2} - 2\,ln|2x + 4| + k$$

b) Debe ser:

$$F\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{-5/2}{2} - 2ln\left|2\left(-\frac{5}{2}\right) + 4\right| + k = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{-5}{4} - 2ln\ 1 + k = \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2 \rightarrow F(x) = \frac{x}{2} - 2ln|2x + 4| + 2$$

51 **Calcula la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = x$, que la gráfica de f pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la tangente en P es paralela a la recta de ecuación $3x + 3y - 1 = 0$.**

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx \rightarrow f'(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + k$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx \rightarrow \int\left(\frac{x^2}{2} + k\right)dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + kx + k'$$

f pasa por $P(1, 1) \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow \frac{1}{6} + k + k' = 1 \quad (1)$

La pendiente de la recta tangente en P es $m = -1$; por ello:

$f'(1) = -1 \rightarrow \frac{1}{2} + k = -1 \quad (2)$

De las igualdades (1) y (2) obtenemos los valores de k y k':

$$k = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}; \quad k' = 1 - \frac{1}{6} - k = 1 - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{7}{3}$$

Por tanto, la función que buscamos es: $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

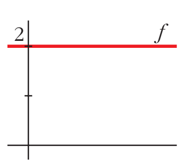
CUESTIONES TEÓRICAS

s52 **Prueba que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C un número real cualquiera, la función $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$.**

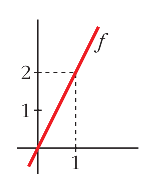
$F(x)$ primitiva de $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) + C \text{ es primitiva de } f(x).$$

53 **a) Representa tres primitivas de la función f cuya gráfica es la siguiente:**



b) Representa tres primitivas de la siguiente función:



a) $f(x) = 2 \Rightarrow F(x) = 2x + k$

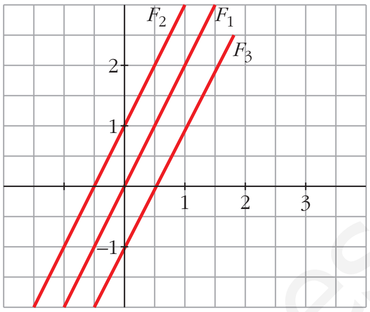
Por ejemplo:

$F_1(x) = 2x$

$F_2(x) = 2x + 1$

$F_3(x) = 2x - 1$

cuyas gráficas son:



b) $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2 + k$

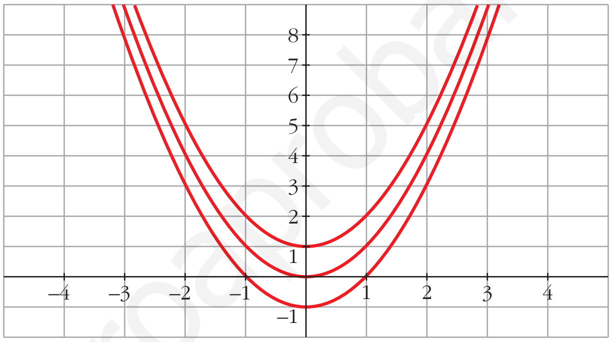
Por ejemplo:

$F_1(x) = x^2$

$F_2(x) = x^2 + 1$

$F_3(x) = x^2 - 1$

cuyas gráficas son:



54 **Sabes que una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es $F(x) = ln\,|x|$. ¿Por qué se toma el valor absoluto de x?**

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ está definida para todo $x \neq 0$; y es la derivada de la función:

$$F(x) = \begin{cases} ln\,x & \text{si } x > 0 \\ ln\,(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es decir, de $F(x) = ln\,|x|$.

Página 360

55 **En una integral hacemos el cambio de variable $e^x = t$. ¿Cuál es la expresión de dx en función de t?**

$e^x = t \rightarrow x = ln\,t \rightarrow dx = \dfrac{1}{t}\,dt$

56 **Comprueba que $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = ln|\sec x + tg\,x| + k$**

Tenemos que probar que la derivada de $f(x) = ln\,|\sec x + tg\,x| + k$ es $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Derivamos $f(x) = ln\left|\dfrac{1 + sen\, x}{cos\, x}\right| + k$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{cos^2 x + sen\, x(1 + sen\, x)}{cos^2 x}}{\dfrac{1 + sen\, x}{cos\, x}} = \frac{\dfrac{cos^2 x + sen\, x + sen^2 x}{cos\, x}}{1 + sen\, x} =$$

$$= \frac{1 + sen\, x}{(1 + sen\, x)\, cos\, x} = \frac{1}{cos\, x}$$

57 **Comprueba que** $\displaystyle\int \frac{1}{sen\, x\, cos\, x}\, dx = ln|tg\, x| + k$

Tenemos que comprobar que la derivada de la función $f(x) = ln|tg\, x| + k$ es $f'(x) = \dfrac{1}{sen\, x\, cos\, x}$.

Derivamos $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1/cos^2 x}{tg\, x} = \frac{1/cos^2 x}{sen\, x/cos\, x} = \frac{1}{sen\, x\, cos\, x}$$

58 **Sin utilizar cálculo de derivadas, prueba que:**

$$F(x) = \frac{1}{1 + x^4} \text{ y } G(x) = \frac{-x^4}{1 + x^4}$$

son dos primitivas de una misma función.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de una misma función, su diferencia es una constante. Veámoslo:

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{1 + x^4} - \left(\frac{-x^4}{1 + x^4}\right) = \frac{1 + x^4}{1 + x^4} = 1$$

Por tanto, hemos obtenido que: $F(x) = G(x) + 1$

Luego las dos son primitivas de una misma función.

59 **Sean f y g dos funciones continuas y derivables que se diferencian en una constante.**

¿Podemos asegurar que f y g tienen una misma primitiva?

No. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x + 1 \;\rightarrow\; F(x) = x^2 + x + k \\ g(x) = 2x + 2 \;\rightarrow\; G(x) = x^2 + 2x + c \end{array}\right\}$$

$f(x)$ y $g(x)$ son continuas, derivables y se diferencian en una constante (pues $f(x) = g(x) - 1$).

Sin embargo, sus primitivas, $F(x)$ y $G(x)$, respectivamente, son distintas, cualesquiera que sean los valores de k y c.

60 **Calcula $f(x)$ sabiendo que:**

$$\int f(x)\,dx = ln \frac{|x-1|^3}{(x+2)^2} + c$$

$F(x) = \int f(x)\,dx = ln \frac{|x-1|^3}{(x+2)^2} + c$

Sabemos que $F'(x) = f(x)$.

Por tanto, calculamos la derivada de $F(x)$.

Aplicamos las propiedades de los logaritmos antes de derivar:

$F(x) = 3ln\,|x-1| - 2ln\,(x+2) + c$

$F'(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} = \frac{3(x+2) - 2(x-1)}{x^2+x-2} = \frac{x+8}{x^2+x-2}$

Por tanto, $f(x) = \frac{x+8}{x^2+x-2}$.

61 **Las integrales:**

$$\int \frac{(arc\ tg\ x)^2}{1+x^2}\,dx \ \text{ y } \int (tg^3\,x + tg^5\,x)\,dx$$

¿son del tipo $\int f(x)^n f'(x)\,dx$?

En caso afirmativo, identifica, en cada una de ellas, $f(x)$, n y $f'(x)$.

Ambas son del tipo $\int f(x)^n f'(x)\,dx$.

- $\int \frac{(arc\ tg\ x)^2}{1+x^2}\,dx = \int (arc\ tg\ x)^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$

  $f(x) = arc\ tg\ x$; $n = 2$; $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- $\int (tg^3\,x + tg^5\,x)\,dx = \int tg^3\,x\,(1 + tg^2\,x)\,dx$

  $f(x) = tg\ x$; $n = 3$; $f'(x) = 1 + tg^2\,x$

PARA PROFUNDIZAR

62 **Para integrar una función cuyo denominador es un polinomio de segundo grado sin raíces reales, distinguiremos dos casos:**

a) Si el numerador es constante, transformamos el denominador para obtener un binomio al cuadrado. La solución será un arco tangente:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

(Completa la resolución).

b) Si el numerador es de primer grado, se descompone en un logaritmo neperiano y un arco tangente:

$$\int \frac{(x+5)\,dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{8\,dx}{x^2+2x+3}$$

(Completa su resolución).

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = arc\ tg(x+2) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{(x+5)\,dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+2x+3}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{8\,dx}{x^2+2x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 4\int \frac{dx}{(x+1)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 2\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 2\sqrt{2}\int \frac{(1/\sqrt{2})\,dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + 2\sqrt{2}\ arc\ tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

63 **Observa cómo se resuelve esta integral:**

$$I = \int \frac{x+1}{x^3+2x^2+3x}\,dx$$

$$x^3+2x^2+3x = x(x^2+2x+3)$$

La fracción se descompone así: $\displaystyle\frac{x+1}{x^3+2x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$

Obtenemos: $A = \dfrac{1}{3},\ B = -\dfrac{1}{3},\ C = \dfrac{1}{3}$

Sustituimos: $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx$

(Completa su resolución).

Completamos la resolución:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln|x| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{3}\,ln|x| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+2-4}{x^2+2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln|x| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-2}{x^2+2x+3}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+2x+3} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{3}\,ln|x| - \frac{1}{6}\,ln(x^2+2x+3) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,arc\ tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

(*) $\left(\text{Ver en el ejercicio 62 apartado b) el cálculo de } \int \frac{dx}{x^2+2x+3}\right)$.

64 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$

c) $\int \frac{x^2+3x+8}{x^2+9}\,dx$ **d)** $\int \frac{2x+10}{x^2+x+1}\,dx$

e) $\int \frac{2}{x^2+3x+4}\,dx$ **f)** $\int \frac{dx}{(x+1)^2\,(x^2+1)}$

☛ ***e) Multiplica el numerador y el denominador por 4.***

a) $\int \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

$$2x-1 = A(x^2+1) + Bx^2 + Cx$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lllll} x=0 & \to & -1 = A & & \\ x=1 & \to & 1 = 2A+B+C & \to & 3 = B+C \\ x=-1 & \to & -3 = 2A+B-C & \to & -1 = B-C \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \\ C=2 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-1}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{x+2}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \int \frac{-1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -ln|x| + \frac{1}{2}\,ln(x^2+1) + 2\,arc\ tg\,x + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$1 = A(x^2-x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x=-1 & \to \ 1 = 3A & \to & A = 1/3 \\ x = 0 & \to \ 1 = A + C & \to & C = 2/3 \\ x = 1 & \to \ 1 = A + 2B + 2C & \to & B = -1/3 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \frac{1/3}{x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{4/3}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+8}{x^2+9}\,dx = \int\left(1+\frac{3x-1}{x^2+9}\right)dx = x + \int\frac{3x}{x^2+9}\,dx - \int\frac{dx}{x^2+9} =$

$$= x + \frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+9}\,dx - \int\frac{1/9}{(x/3)^2+1}\,dx =$$

$$= x + \frac{3}{2}ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\ arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + k$$

d) $\displaystyle\int\frac{2x+10}{x^2+x+1}\,dx = \int\frac{2x+1+9}{x^2+x+1}\,dx = \int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + 9\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx =$

$$= ln(x^2+x+1) + 9\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= ln(x^2+x+1) + 6\sqrt{3}\int\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= ln(x^2+x+1) + 6\sqrt{3}\ arc\ tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

e) $\displaystyle\int\frac{2}{x^2+3x+4}\,dx = \int\frac{8}{4x^2+12x+16}\,dx = \int\frac{8}{(2x+3)^2+7}\,dx =$

$$= \int\frac{8/7}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dx = \frac{8}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\int\frac{2/\sqrt{7}}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{4\sqrt{7}}{7}\ arc\ tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + k$$

f) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + Cx(x+1)^2 + D(x+1)^2$$

Hallamos A, B, C y D:

$$\left.\begin{array}{lll} x=-1 & \to\ 1 = 2B & \to\ B = 1/2 \\ x=0 & \to\ 1 = A+B+D & \\ x=1 & \to\ 1 = 4A+2B+4C+4D & \\ x=-2 & \to\ 1 = -5A+5B-2C+D & \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = 1/2 \\ C = -1/2 \\ D = 0 \end{array}\Bigg\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\,(x^2+1)} = \int \left(\frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4} ln(x^2+1) + k$$

Página 361

65 **Se llama ecuación diferencial de primer orden a una ecuación en la que, además de x e y, figura también y'. Resolverla es buscar una función $y = f(x)$ que verifique la ecuación.**

Por ejemplo, resolvamos $x\,y^2 + y' = 0$:

$$y' = -x\,y^2 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -x\,y^2 \;\rightarrow\; dy = -x\,y^2\,dx$$

Separamos las variables:

$$\frac{dy}{y^2} = -x\,dx \;\rightarrow\; \int \frac{dy}{y^2} = \int (-x)\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + k \;\rightarrow\; y = \frac{2}{x^2 - 2k}$$

Hay infinitas soluciones. Busca la que pasa por el punto (0, 2) y comprueba que la curva que obtienes verifica la ecuación propuesta.

- Buscamos la solución que pasa por el punto $(0, 2)$:

$$y = \frac{2}{x^2 - 2k} \;\rightarrow\; 2 = \frac{2}{-2k} \;\Rightarrow\; -4k = 2 \;\Rightarrow\; k = \frac{-1}{2}$$

Por tanto: $y = \dfrac{2}{x^2+1}$

- Comprobamos que verifica la ecuación $xy^2 + y' = 0$:

$$xy^2 + y' = x\left(\frac{2}{x^2+1}\right)^2 - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = x \cdot \frac{4}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

66 **Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:**

a) $y\,y' - x = 0$

b) $y^2\,y' - x^2 = 1$

c) $y' - x\,y = 0$

d) $y'\sqrt{x} - y = 0$

e) $y'\,e^y + 1 = e^x$

f) $x^2\,y' + y^2 + 1 = 0$

☛ ***En todas ellas, al despejar y' se obtiene en el segundo miembro el producto o el cociente de dos funciones, cada una de ellas con una sola variable.***

a) $y y' - x = 0$

$$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k \Rightarrow y^2 = x^2 + 2k \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 2k}$$

b) $y^2 y' - x^2 = 1$

$$y' = \frac{1 + x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + x^2}{y^2} \Rightarrow y^2\,dy = (1 + x^2)\,dx$$

$$\int y^2\,dy = \int (1 + x^2)\,dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = x + \frac{x^3}{3} + k \Rightarrow y^3 = 3x + x^3 + 3k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{3x + x^3 + 3k}$$

c) $y' - x y = 0$

$$y' = xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$ln\,|y| = \frac{x^2}{2} + k \Rightarrow |y| = e^{(x^2/2) + k} \Rightarrow y = \pm e^{(x^2/2) + k}$$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$ln\,|y| = 2\sqrt{x} + k \Rightarrow |y| = e^{2\sqrt{x} + k} \Rightarrow y = \pm e^{2\sqrt{x} + k}$$

e) $y' e^y + 1 = e^x$

$$y' = \frac{e^x - 1}{e^y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 1}{e^y}$$

$$e^y\,dy = (e^x - 1)\,dx \Rightarrow \int e^y\,dy = \int (e^x - 1)\,dx$$

$$e^y = e^x - x + k \Rightarrow y = ln\,|e^x - x + k|$$

f) $x^2 y' + y^2 + 1 = 0$

$$y' = \frac{-1 - y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y^2)}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{-1}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{-1}{x^2}\,dx \Rightarrow arc\,tg\,y = \frac{1}{x} + k$$

$$y = tg\left(\frac{1}{x} + k\right)$$

Página 361

AUTOEVALUACIÓN

Resuelve las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int (\cos x + tg\ x)\ dx$

$$\int (\cos x + tg\ x)\ dx = \int \cos x\ dx + \int \frac{sen\ x}{\cos x}\ dx = sen\ x - \ln|\cos x| + k$$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx$

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx = 2\ln|x| + \frac{x^{3/2}}{3/2} = 2\ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$$

3. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\ dx$

$$\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\ dx = \frac{1}{4}\int 4x\,(2x^2+1)^{1/3}\ dx = \frac{1}{4}(2x^2+1)^{4/3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(2x^2+1)^4} + k$$

4. $\displaystyle\int \frac{tg^2\ x}{\cos^2 x}\ dx$

$$\int \frac{tg^2\ x}{\cos^2 x}\ dx = \frac{tg^3\ x}{3} + k$$

5. $\displaystyle\int x\ arc\ tg\ x\ dx$

$$\int x\ arc\ tg\ x\ dx \overset{(1)}{=} \frac{x^2}{2}arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{x^2}{1+x^2}\ dx}_{I_1} \overset{(2)}{=} \frac{x^2}{2}arc\ tg\ x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arc\ tg\ x + k$$

(1) Por partes:

$$\begin{cases} arc\ tg\ x = u \ \rightarrow\ \dfrac{1}{1+x^2}dx = du \\ x\ dx = dv \ \rightarrow\ \dfrac{x^2}{2} = v \end{cases}$$

(2) $\displaystyle I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^2}\ dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - arc\ tg\ x$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, sen\,(ln\ x)\, dx$

$$\int \frac{1}{x}\, sen\,(ln\ x)\, dx = -cos\,(ln\ x) + k$$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x-21}\, dx$

$I = \displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x-21}\, dx$. Descomponemos en fracciones simples:

$$x^2+4x-21=0 \;\; \begin{cases} x=-7 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\frac{x}{(x-3)(x+7)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+7} \;\to\; x = A(x+7)+B(x-3) \;\to\; A=\frac{3}{10},\;\; B=\frac{7}{10}$$

$$I = \int \frac{3/10}{x-3}\, dx + \int \frac{7/10}{x+7}\, dx = \frac{3}{10}\, ln\,|x-3| + \frac{7}{10}\, ln\,|x+7| + k$$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+4}\, dx$

$$\int \frac{1}{3x^2+4}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\dfrac{3x^2}{4}+1}\, dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2+1}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\, arc\ tg\, \frac{\sqrt{3}x}{2} + k$$

9. Resuelve, por el método de sustitución, la integral: $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$

$$I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$$

Hacemos el cambio $\sqrt{x} = t \;\to\; x = t^2 \;\to\; dx = 2t\, dt$

$$I = \int \frac{1+t^2}{1+t}\cdot 2t\, dt = 2\int \frac{t+t^3}{1+t}\, dx \overset{(1)}{=} 2\int\left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right) dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2ln\,|t+1|\right)$$

(1) Dividimos $(t^3+t) : (t+2)$ y expresamos de la forma:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{}$$

Deshaciendo el cambio: $I = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4ln\,(\sqrt{x}+1) + k$

10. **Aplica la integración por partes para calcular $\int \cos(\ln x)\,dx$.**

$$I = \int \cos(\ln x)\,dx$$

$$\begin{cases} \cos(\ln x) = u \;\rightarrow\; -\dfrac{1}{x}\,\text{sen}(\ln x)\,dx = du \\ dx = dv \;\rightarrow\; x = v \end{cases}$$

$$I = x\cos(\ln x) + \underbrace{\int \text{sen}(\ln x)\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} \text{sen}(\ln x) = u \;\rightarrow\; \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx = du \\ dx = dv \;\rightarrow\; x = v \end{cases}$$

$$I_1 = x\,\text{sen}(\ln x) - \underbrace{\int \cos(\ln x)\,dx}_{I}$$

$$I = x\cos(\ln x) + x\,\text{sen}(\ln x) - I \;\rightarrow\; I = \frac{x\cos(\ln x) + x\,\text{sen}(\ln x)}{2} + k$$

11. **De la función $f(x)$, se sabe que:**

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2};\; f(2) = 0$$

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

a) $f(x) = \displaystyle\int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = 3\int (x+1)^{-2}\,dx = \frac{3(x+1)^{-1}}{-1} + k = \frac{-3}{x+1} + k$

$f(2) = \dfrac{-3}{2+1} + k = -1 + k \;\rightarrow\;$ Como $f(2) = 0$, $-1 + k = 0 \;\rightarrow\; k = 1$

$f(x) = \dfrac{-3}{x+1} + 1 = \dfrac{x-2}{x+1}$

b) $g(x) = \displaystyle\int \frac{x-2}{x+1}\,dx = \int \left(1 + \frac{-3}{x+1}\right)dx = x - 3\ln|x+1| + k$

$g(0) = 0 - 3\ln|0+1| + k = k \;\rightarrow\;$ Como $g(0) = 1$, $k = 1$.

La primitiva de f que pasa por (0, 1) es $g(x) = x - 3\ln|x+1| + 1$.

12. **De una función f derivable en $\mathbb{R}$, sabemos que:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Halla f sabiendo que $f(1) = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \int (2x - 1)\, dx & \text{si } x < 0 \\ \int -1\, dx & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x + k & \text{si } x < 0 \\ -x + k' & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que f sea derivable en $x = 0$ y, por tanto, en $\mathbb{R}$, debe ser continua y, para ello, $k = k'$.

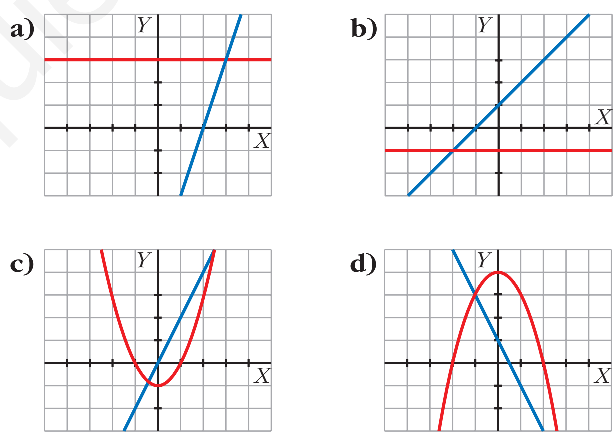
Además, $f(1) = -1 + k' = 2 \rightarrow k' = 3 \rightarrow k = 3$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si } x < 0 \\ -x + 3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

13. **¿Cuáles de los siguientes apartados representan la gráfica de una función $f(x)$ y la de una de sus primitivas $F(x)$?**

Justifica tu respuesta.



a) Las funciones representadas son $y = 3$ e $y = 3x - 6$, que cumplen:

$$\int 3\, dx = 3x + k$$

Por tanto, $f(x) = 3$, y $F(x) = 3x - 6$ es una primitiva de f.

b) Las funciones son:

$$y = -1 \text{ e } y = x + 1 \rightarrow \int -1\, dx = -x + k$$

No corresponden a una función y su primitiva.

c) Las funciones son $y = x^2 - 1$ e $y = 2x$.

$\int 2x\, dx = x^2 + k$. Por tanto, $f(x) = 2x$, y una de sus primitivas es $F(x) = x^2 - 1$.

d) Las funciones son $y = -x^2 - 1 + 4$ e $y = -2x + 1 \rightarrow \int -2x + 1\, dx = -x^2 + x + k$

No corresponden a una función y su primitiva.

2 ÁLGEBRA DE MATRICES

Página 49

REFLEXIONA Y RESUELVE

Elección de presidente

- **Ayudándote de la tabla, estudia detalladamente los resultados de la votación, analiza algunas características de los participantes y opina quién crees que debería ser presidente.**

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De la tabla podemos deducir muchas cosas:

— Al consejero A no le gusta ninguno de sus colegas como presidente.

— B solo tiene un candidato (el C).

— Dos consejeros (C y E) están de acuerdo en los mismos candidatos (B, C y D).

— El consejero F no opta por ninguno de sus compañeros.

— Al candidato E no le prefiere ninguno de los otros consejeros. De hecho, es el único que no se considera idóneo para el cargo.

— Los candidatos B y D han obtenido los mismos resultados.

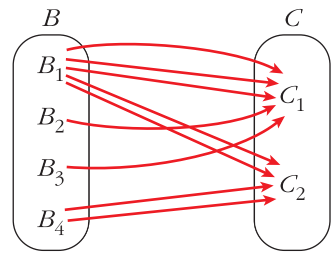
— Solo A y C se consideran idóneos para el puesto de presidente.

— …

Según los resultados, el candidato C es el más idóneo para presidir la empresa (por lo menos eso piensan sus compañeros del consejo).

Vuelos internacionales

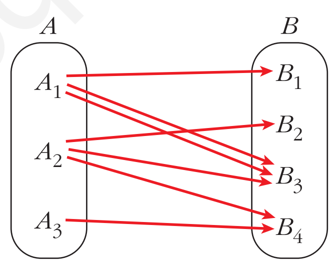
■ **Aquí tienes representados, mediante flechas, los vuelos que hay el martes desde el país *B* hasta el país *C*. Representa, mediante una tabla, la información recogida en el diagrama.**



	C_1	C_2
B_1	3	2
B_2	1	0
B_3	1	0
B_4	0	2

Conexiones de vuelos

■ **Supón que una persona quiere salir el lunes de *A*, pasar la noche en *B* y llegar el martes a *C*.**



¿Cuántas posibles combinaciones tiene por cada punto de salida y cada punto de llegada? Es decir, ¿de cuántas formas puede ir de A_1 a C_1, de A_1 a C_2, de A_2 a C_1, etc.?

Continúa tú, rellenando razonadamente el resto de la tabla y explicando, en cada caso, cómo llegas a la respuesta.

	C_1	C_2
A_1	**5**	2
A_2	2	2
A_3	0	2

Página 51

1. Escribe las matrices traspuestas de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = (5 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 1)$$

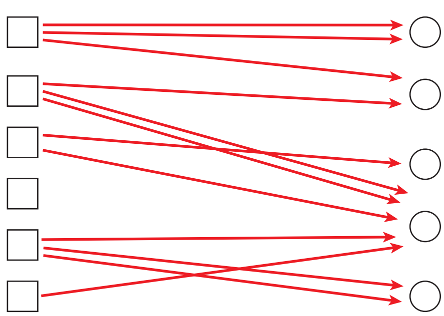
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Escribe una matriz X tal que $X^t = X$; esto es, que sea simétrica.

Por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Escribe una matriz que describa lo siguiente:



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Página 52

1. **Sean las matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $\boldsymbol{E = 2A - 3B + C - 2D}$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Página 55

2. **Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3. **Intenta conseguir una matriz $\boldsymbol{I_3}$ de dimensión 3×3 que, multiplicada por cualquier matriz cuadrada $\boldsymbol{A}(3 \times 3)$, la deje igual.**

Es decir: $\boldsymbol{A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A}$

La matriz $\boldsymbol{I_3}$ que verifica la igualdad anterior se llama matriz unidad de orden 3.

Una vez que sepas cuál es su fisonomía, sabrás obtener la matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 56

1. Comprueba las propiedades 2 y 3 del producto de números por matrices, tomando:

$$\boldsymbol{a = 3,\ b = 6} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD 2

$$\left.\begin{aligned} 9A &= \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \\ 3A + 6A &= \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$9A = 3A + 6A$$

PROPIEDAD 3

$$\left.\begin{aligned} 3(A + B) &= 3\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \\ 3A + 3B &= \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$3(A + B) = 3A + 3B$$

Página 57

2. Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C &= \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left.\begin{aligned} (B + C) \cdot D &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \\ B \cdot D + C \cdot D &= \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$$

Página 59

1. Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-(2.^a) \\ (2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-3\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)+(2.^a) \\ (2.^a)}}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (-1/2)\cdot(2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)+2\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

En la parte de la izquierda, la 2.ª fila está compuesta de ceros. Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

2. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-4\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-7\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(2.^a)}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

En la parte de la izquierda, la 3.ª fila está compuesta de ceros. Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-3\cdot(3.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(3.^a) \\ (3.^a)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-2\cdot(2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+2\cdot(2.^a)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ -5\cdot(2.^a)+(3.^a) \\ -(1/10)\cdot(3.^a)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-3\cdot(3.^a) \\ -(1/5)\cdot(2.^a) \\ (3.^a)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-(2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right)$$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

Página 61

3. Calcula x, y, z, t para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-z & 2y-t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2x - z = 5 & x = \dfrac{5}{2} \\ 2y - t = 1 & y = \dfrac{3}{2} \\ z = 0 & z = 0 \\ t = 2 & t = 2 \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. **Para las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **comprueba:**

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ &A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{b) } (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ &A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{c) } A \cdot (B \cdot C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ &(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

5. **Sean** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. **Encuentra** X **que cumpla:** $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

6. **Encuentra dos matrices,** A **y** B**, de dimensión** 2×2 **que cumplan:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{Sumando: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ -2X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Sumando: $-Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

8. Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla la siguiente condición:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x + y \\ z & z + t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z & y + t \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x + z \\ x + y = y + t \\ z = z \\ z + t = t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = t \\ \\ \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, donde x e y son números reales cualesquiera.

9. **Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A - B) \cdot C$

c) $A \cdot B \cdot C$

a) $A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

10. **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **comprueba que** $(A - I)^2 = 0$.

$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. **Halla la inversa de estas matrices:**

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7x + 3z & 7y + 3t \\ 2x + z & 2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 7x + 3z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = -2 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 7y + 3t = 0 \\ 2y + t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ t = 7 \end{array}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ -8x + 5z & -8y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 3x - 2z = 1 \\ -8x + 5z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -5 \\ z = -8 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 3y - 2t = 0 \\ -8y + 5t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -2 \\ t = -3 \end{array}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ 2d = 0,\ 2e = 1,\ 2f = 0,\ g = 0,\ h = 0,\ i = 1$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} a + 2d + 3g & b + 2e + 3h & c + 2f + 3i \\ d + 2g & e + 2h & f + 2i \\ d + g & e + h & f + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{aligned} a + 2d + 3g &= 1 \\ d + 2g &= 0 \\ d + g &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= 1 \\ d &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} b + 2e + 3h &= 0 \\ e + 2h &= 1 \\ e + h &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} b &= -1 \\ e &= -1 \\ h &= 1 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} c + 2f + 3i &= 0 \\ f + 2i &= 0 \\ f + i &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c &= -1 \\ f &= 2 \\ g &= -1 \end{aligned}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Página 62

1. Considera $\vec{u}(7, 4, -2)$, $\vec{v}(5, 0, 6)$, $\vec{w}(4, 6, -3)$, $a = 8$, $b = -5$, elementos de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}$.

Comprueba las ocho propiedades que se enumeran arriba.

- *Asociativa*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (12, 4, 4) + \vec{w} = (16, 10, 1)$

  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + (9, 6, 3) = (16, 10, 1)$

- *Conmutativa*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

  $\vec{u} + \vec{v} = (12, 4, 4) = \vec{v} + \vec{u}$

- *Vector nulo*: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$

  $\vec{v} + \vec{0} = (5, 0, 6) + (0, 0, 0) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

- *Vector opuesto*: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

  $\vec{v} + (-\vec{v}) = (5, 0, 6) + (-5, 0, -6) = (0, 0, 0)$

- *Asociativa*: $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$

  $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = (8 \cdot (-5)) \cdot (5, 0, 6) = -40 \cdot (5, 0, 6) = (-200, 0, -240)$

  $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 8 \cdot [-5 \cdot (5, 0, 6)] = 8 \cdot (-25, 0, -30) = (-200, 0, -240)$

- *Distributiva I*: $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$

  $(a + b) \cdot \vec{v} = 3 \cdot (5, 0, 6) = (15, 0, 18)$

  $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v} = 8 \cdot (5, 0, 6) - 5 \cdot (5, 0, 6) = (40, 0, 48) - (25, 0, 30) = (15, 0, 18)$

- *Distributiva II*: $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

  $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 8 \cdot (12, 4, 4) = (96, 32, 32)$

  $a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = 8 \cdot (7, 4, -2) + 8 \cdot (5, 0, 6) = (56, 32, -16) + (40, 0, 48) = (96, 32, 32)$

- *Producto por 1*: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

  $1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot (5, 0, 6) = (5, 0, 6) = \vec{v}$

Página 64

Comprueba si los siguientes conjuntos de *n*-uplas son L.I. o L.D.

2. (3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (4, –2, 0, –5)

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(4, -2, 0, -5) = (0, 0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(3x + 2y + 4w, -y - 2w, x + 5y + z, z - 5w) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 4w = 0 \\ -y - 2w = 0 \\ x + 5y + z = 0 \\ z - 5w = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

3. (3, 0, 1, 0), (2, –1, 5, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(3, 0, 1, 0) + y(2, -1, 5, 0) + z(0, 0, 1, 1) + w(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(3x + 2y, -y, x + 5y + z, z + w) = (0, 0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y \quad\quad = 0 \\ -y \quad\quad = 0 \\ x + 5y + z \quad = 0 \\ z + w = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

4. **(2, –4, 7), (1, 0, 2), (0, 1, 2)**

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$x(2, -4, 7) + y(1, 0, 2) + z(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Operando, llegamos a:

$$(2x + y, -4x + z, 7x + 2y + 2z) = (0, 0, 0)$$

Esta igualdad da lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y \quad\quad = 0 \\ -4x \quad\quad + z = 0 \\ 7x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

5. **(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 0)**

Explica por qué si en un conjunto de vectores está el vector cero, entonces son L.D.

- Aplicamos la propiedad fundamental:

  $$x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

  Si hacemos $x = 0$, $y = 0$, z puede tomar cualquier valor, por tanto, los vectores son *linealmente dependientes*.

- Si en un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ está el vector cero, podemos conseguir una combinación lineal de ellos:

  $$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_{n-1}\vec{u}_{n-1} + x_n\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

  en la que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ y $x_n \neq 0$. Como no todos los coeficientes son nulos, los vectores son linealmente dependientes.

Página 66

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{10} & \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (2.^a) \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - 4 \cdot (2.^a) \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (D) = 3$$

Página 67

ESTILO MATEMÁTICO

1. Demuestra que los vectores (7, 2, –1, 0), (0, 4, 0, 5), (0, 0, –2, 0) son L.I.

$$\alpha(7, 2, -1, 0) + \beta(0, 4, 0, 5) + \gamma(0, 0, -2, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

La primera coordenada es $7\alpha + 0\beta + 0\gamma = 0 \ \rightarrow \ \alpha = 0$

La igualdad queda: $\beta(0, 4, 0, 5) + \gamma(0, 0, -2, 0) = (0, 0, 0, 0)$

La segunda coordenada es $4\beta + 0\gamma = 0 \ \rightarrow \ \beta = 0$

La igualdad queda: $\gamma(0, 0, -2, 0) = (0, 0, 0, 0)$

La tercera coordenada es $-2\gamma = 0 \ \rightarrow \ \gamma = 0$

Como $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$, los vectores son L.I.

Página 72

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2} A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

2 **Efectúa el producto** $(-3 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(7 \quad 7)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (7)$

3 **a) ¿Son iguales las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = (2 \quad 3)$**?**

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2. Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \quad 3)$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$A^t - B = (2 \quad 3) - (2 \quad 3) = (0 \quad 0)$

4 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **comprueba que:**

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } (A+B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A+B)^t = A^t + B^t$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } (3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ 3A^t = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (3A)^t = 3A^t$$

5 **Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.**

$$3A\,A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

6 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.**

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

7 **Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

8 **Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ verifica $(A + I)^2 = 6I$.**

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \to A + I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I$

Luego $(A + I)^2 = 6I$

9 **Dada la matriz:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

comprueba que $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})^2 = \mathbf{0}$ y expresa $\boldsymbol{A}^2$ como combinación lineal de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{I}$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$(A + I)^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A + I)(A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \rightarrow$

$\rightarrow A^2 = -2A - I$

Ecuaciones con matrices

s10 **Halla las matrices $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ que verifican el sistema:**

$$\mathbf{2}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2.ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

s11 **Calcula $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, siendo:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

s12 Determina los valores de m para los cuales $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique:

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$$

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2$; $m_2 = \frac{1}{2}$

s13 Resuelve:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{array}\right\}$$

Sumando:

$$4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$$

Solución: $x = \frac{-5}{4}$; $y = \frac{-7}{4}$

s14 Halla dos matrices A y B tales que:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-2A + 10B = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 32 \\ 34 & 2 & -20 \\ 18 & 10 & 26 \end{pmatrix}$$ Multiplicamos por 2 la 2.ª ecuación.

$$13B = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 39 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 13 & 39 \end{pmatrix}$$ Sumamos miembro a miembro.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ Multiplicamos por $\frac{1}{13}$.

Despejamos A en la 2.ª ecuación:

$$A = 5B - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 20 & 5 & -10 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

15 Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

halla dos matrices X e Y que verifiquen:

$$X - 2M = 3N; \quad M + N - Y = I$$

$$X = 3N + 2M = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Y = M + N - I = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

16 **Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = I$

17 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, prueba cuál de las siguientes matrices es su inversa:**

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. M no es inversa de A.

$A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. N es la inversa de A.

18 **Halla las matrices inversas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

$|A| = 2 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$|B| = -4 \to B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

$|C| = 1 \to C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Página 73

Rango de una matriz

19 **Estudia el rango de las matrices siguientes:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \to \textit{ran}\ (A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \textit{ran}\ (B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 12 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \textit{ran}\ (C) = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 6 \cdot (3.^a) - 9 \cdot (2.^a) \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \textit{ran}\ (D) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \textit{ran}\ (E) = 3$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \textit{ran}\ (F) = 3$$

s20 **Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \to \textit{ran}\ (A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \textit{ran}\ (B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(3.^a)\\(2.^a)\\(1.^a)\\(4.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\\(4.^a)-3\cdot(1.^a)\end{smallmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(2.^a)\\(4.^a)-(2.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\\(4.^a)-(1.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to ran\ (D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

PARA RESOLVER

s21 Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3. Utiliza esa igualdad para calcular A^4.

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4:

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$$

$$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

s22 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.**

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} AB = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos A^{-1}: $|A| = -3$; $A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$B = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

s23 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.**

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

☛ ***Multiplica $I + A + A^2$ por $I - A$.***

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

s24 **Calcula A^n y B^n siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

• $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

s25 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \dots, A^{128}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \quad A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

26 Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad k = 1$$

27 **Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:**

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 3, 7)$, $\vec{u}_2 = (2, 5, 0, 4)$ **y di cuál es el rango de la matriz cuyas columnas son** $\vec{u}_1$ **y** $\vec{u}_2$**.**

b) $\vec{v}_1 = (1, 0, -2, 3, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 3, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (4, -1, -1, 6, 4)$ **y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son** $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ **y** $\vec{v}_3$**.**

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (4.^a) - 7 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & -6 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 6 \cdot (2.^a) + 7 \cdot (3.^a) \\ 10 \cdot (2.^a) + 7 \cdot (4.^a) \end{array}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (M) = 2$$

Los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes.

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran\ (M) = 2$$

El conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ es linealmente dependiente. Hay dos vectores linealmente independientes.

28 **Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores según los valores de** t**:**

a) $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1, -2)$, $\vec{u}_3 = (3, 1, 1, t)$

b) $\vec{v}_1 = (2, -2, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 5, 3, 3)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, t, 1)$, $\vec{v}_4 = (2, 6, 4, 4)$

a) Debemos estudiar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & 1 & t-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & -1 & t+6 \end{pmatrix} \to ran\ (M) = 3 \text{ para cualquier valor de } t$$

Los tres vectores son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de t.

b) Hallamos el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a):2\\(2.^a)\\(4.^a):2\\(3.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & t & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\\(4.^a)-(1.^a)\end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a):3\\(3.^a):2\\(4.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & t & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\\(4.^a)-(2.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $t = 1$, $ran\ (M) = 2$ $\rightarrow$ Hay dos vectores linealmente independientes.
- Si $t \neq 1$, $ran\ (M) = 3$ $\rightarrow$ Hay tres vectores linealmente independientes.

s29 **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $ran\ (M) = 3$ para cualquier valor de k.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\2\cdot(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1 + 2k = 0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

- Si $k = -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 2$.
- Si $k \neq -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(3.^a):4\\(2.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- Si $k = -2$ $\rightarrow$ $ran\ (P) = 1$
- Si $k \neq -2$ $\rightarrow$ $ran\ (P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)+2\cdot(1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-3\cdot(2.^a)\end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- Si $k = 2$ $\rightarrow$ $ran\ (Q) = 2$
- Si $k \neq 2$ $\rightarrow$ $ran\ (Q) = 3$

s30 **En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes.**

Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y el tamaño de las ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

a) $\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$

Página 74

s31 **Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O).**

De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1\,354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1\,354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$$

s32 **Halla todas las matrices X de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a+b=0 \\ b^2 = 1 \\ b+c=0 \\ c^2=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = \pm 1 \\ a = -b \\ b = \pm 1 \\ c = -b \\ c = \pm 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1 \;\to\; b = -1 \;\to\; c = 1 \\ a = -1 \;\to\; b = 1 \;\to\; c = -1 \end{array}$$

Hay dos soluciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

s33 **Calcula una matriz X que conmute con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Después, calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.**

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ han de ser iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c=0 \\ d=a \\ c=0 \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

s34 **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcula B^{10}.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2c & 5b + 2c & 0 \\ 2a + 5c & 2b + 5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2b & 2a + 5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a + 2c = 5a + 2b \\ 5b + 2c = 2a + 5b \\ 2a + 5c = 7c \\ 2b + 5c = 7c \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array}\right\} \quad a = b = c$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así, $B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

s35 Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta. Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☛ ***Haz $A \cdot A^t = I$.***

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & (3/5)y - (3/5)x & 0 \\ (3/5)y - (3/5)x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9}{25} + x^2 = 1 \\[2ex] \dfrac{3}{5}y - \dfrac{3}{5}x = 0 \\[2ex] y^2 + \dfrac{9}{25} = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{16}{25} \\[2ex] y = x \\[2ex] y^2 = \dfrac{16}{25} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{4}{5} \\[2ex] y = x \end{array}\right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \dfrac{4}{5},\ y_1 = \dfrac{4}{5};\quad x_2 = -\dfrac{4}{5},\ y_2 = -\dfrac{4}{5}$

s36 Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \quad \to \quad X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

CUESTIONES TEÓRICAS

s37 Justifica por qué no es cierta la igualdad:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB = BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

s38 Sea A una matriz de dimensión 2×3:

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1×2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, entonces $B \cdot A = (5 \quad 2 \quad 0)$

s39 **Sean A y B dos matrices cuadradas de igual orden. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?**

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

s40 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10}.**

☛ ***Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.***

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \rightarrow A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

s41 **Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?**

No, porque el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. Si añadimos una fila, A seguiría teniendo dos columnas; y si añadimos una columna, A seguiría teniendo dos filas. Por tanto, el rango seguirá siendo 2.

s42 **Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.**

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

a) Tendrá rango 2.

b) No. Podría ser 2 ó 1. Por ejemplo:

Si en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suprimimos la 1.ª fila y la 3.ª columna, queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

que tiene rango 1 (A tenía rango 3).

43 **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal).**

Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$, su producto es:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$, que también es una matriz diagonal.

s44 **Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como:**

$$tr\,(A) = a_{11} + a_{22}$$

Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces:

$$tr\,(A \cdot B) = tr\,(B \cdot A)$$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$; entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad tr\,(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad tr\,(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Por tanto, $tr\,(A \cdot B) = tr\,(B \cdot A)$.

Página 75

PARA PROFUNDIZAR

45 **Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden.**

De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que:

$$A \cdot B = A \cdot C, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C, \text{ pero } B \neq C.$$

b) Debe existir A^{-1}.

s46 **a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.**

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$$AB + BA = \mathbf{0} \;\rightarrow\; A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \;\rightarrow\; B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ \left.\begin{array}{l} a + d = 0 \\ a + d = 0 \end{array}\right\} d = -a \\ 2b - c + 3d = 0 \;\rightarrow\; 3a - 2b + c = 0 \;\rightarrow \\ \rightarrow\; c = -3a + 2b \end{array}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a+2b & -a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

s47 **Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.**

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si su inversa, A^{-1}, coincide con su traspuesta, A^t, ha de tenerse que $A \cdot A^t = I$. Es decir:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{array}\right\} \text{Por ejemplo, obtenemos, entre otras: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

s48 **a) Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica ($A^t = -A$).**

b) Los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son ceros. Demuéstralo.

a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Para que $A^t = -A$, ha de ser:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} a=-a \\ c=-b \\ b=-c \\ d=-d \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=0 \\ c=-b \\ \\ d=0 \end{array}$$

Por tanto, una matriz *antisimétrica de orden 2* es de la forma $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

b) • Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, los elementos de su diagonal principal son a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$.

• La traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal también serán a_{ii} (los mismos que los de A).

• La opuesta de la traspuesta es $-A^t = (a_{ji})_{n \times n}$; los elementos de su diagonal principal serán $-a_{ii}$.

• Para que $-A^t = A$, han de ser $a_{ii} = -a_{ii}$; por tanto, $a_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, n$ (es decir, los elementos de la diagonal principal son ceros).

49 **Una matriz cuadrada es *mágica* de suma k cuando la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a k.**

¿Cuánto vale k si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

- Hemos visto en el ejercicio anterior que, en una *matriz antisimétrica*, los elementos de la diagonal principal son ceros. Por tanto, si la matriz es *antisimétrica*, $k = 0$.

- Buscamos las matrices *mágicas antisimétricas de orden 3*: (sabemos que, en este caso, la suma ha de ser cero).

  Veamos cómo es una *matriz antisimétrica de orden 3*:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot A \text{ } \textit{antisimétrica} \text{ si } A^t = -A; \text{ es decir:}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{cases}$$

  Luego, una matriz *antisimétrica de orden 3* es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$$

  Para que A sea *mágica*, ha de tenerse que:

$$\left.\begin{array}{r} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -b - c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{array}\right\}, \text{ es decir: } \begin{cases} c = -b \\ f = b \end{cases}$$

  Por tanto, las *matrices mágicas antisimétricas de orden 3* son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

50 **Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 0$.**

Una *matriz simétrica de orden 3* es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ (pues } A = A^t\text{). Para que sea mágica con } k = 0, \text{ ha de ser:}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c = 0 \\ b + d + e = 0 \\ c + e + f = 0 \\ a + d + f = 0 \\ 2c + d = 0 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (2.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \\ (5.^a) - 2 \cdot (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) : 2 \\ (5.^a) + (4.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{lll} a+b+c = 0 & \to & a = -b-c = -f \\ b + d + e = 0 & \to & b = -e = f \\ c + e + f = 0 & \to & c = 0 \\ d + e + f = 0 & \to & e = -f \\ 3d = 0 & \to & d = 0 \end{array}\right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con* $k = 0$, es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}.$$

51 Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 3$.

Una matriz *simétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Para que sea *mágica* con $k = 3$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c \qquad\qquad = 3 \\ \quad b \qquad + d + e \quad = 3 \\ \qquad\quad c \qquad + e + f = 3 \\ a \qquad\qquad + d \qquad + f = 3 \\ \qquad 2c + d \qquad\quad = 3 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (2.^a) \\ (5.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \\ (5.^a) - 2 \cdot (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) : 2 \\ (5.^a) + (4.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{lll} a + b + c = 3 & \to & a = 3 - b - c = 3 - f - 1 = 2 - f \\ b + d + e = 3 & \to & b = 3 - d - e = 3 - 1 - 2 + f = f \\ c + e + f = 3 & \to & c = 3 - e - f = 3 - 2 + f - f = 1 \\ d + e + f = 3 & \to & e = 3 - d - f = 3 - 1 - f = 2 - f \\ 3d = 3 & \to & d = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con* $k = 3$, es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, con $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Página 75

AUTOEVALUACIÓN

1. **Calcula la matriz $M = P^2 - 3P - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.**

$$\left.\begin{array}{l} P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ 3P = 3\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ 2I = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \begin{array}{l} M = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ M = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. **Calcula las matrices A y B que verifican:**

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos por $\frac{1}{2}$ los dos miembros de la segunda ecuación y sumamos después las dos ecuaciones:

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B + (A - B) = 2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Despejamos B en la primera ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1 \ \ -2 \ \ 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $X \cdot A = B \ \rightarrow \ X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \ \rightarrow \ X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \ \ -2 \ \ 3)\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

4. Determina a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{cases} 4-a=2 & \rightarrow \ a=2 \\ -2-b=-1 & \rightarrow \ b=-1 \\ 2a+ab=a & \rightarrow \ 4-2=2 \\ -a+b^2=b & \rightarrow \ -2+1=-1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

5. Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $ran\ (A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; es decir, $k = 2$.

6. Razona si es posible añadir una fila a la matriz de forma que la nueva matriz tenga rango 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-3\cdot(2.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 2; luego, añadiendo una fila, la matriz resultante no podrá tener rango 4 (tendría rango 2 ó 3).

7. **Calcula $A^{22} - 12A^2 + 2A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 12 + 2 & 22a - 24a + 2a \\ 0 & 1 - 12 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

8. **La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R, S por unidad de peso:**

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

a) **Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos, de manera que contenga 20 unidades de vitamina A, 25 de vitamina B y 6 de C.**

¿Es posible hacerlo? ¿De cuántas formas?

b) **Obtén, en función de la cantidad de Q que entre en la dieta, las cantidades de los otros productos.**

¿Entre qué valores habría de estar la cantidad de producto Q?

a) Llamemos $(x \ \ y \ \ z \ \ t)$ a las cantidades de cada uno de los productos P, Q, R y S que intervienen en la dieta.

Para que la dieta tenga las cantidades de vitaminas requeridas, debe cumplirse la siguiente igualdad:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & Q & R & S \end{array} \\ (x \ \ y \ \ z \ \ t) \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ (20 \ \ 25 \ \ 6) \end{array}$$

Multiplicando e igualando las matrices llegamos al sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 20 \\ 2x + z + t = 25 \\ 2y + t = 6 \end{cases}$$

Mediante el método de Gauss podemos comprobar que el sistema es *compatible indeterminado*.

Por ello, pueden elaborarse infinitas dietas de los productos P, Q, R, S con las vitaminas exigidas.

b) Resolvemos el sistema en función de y (cantidad de producto Q que interviene en la dieta).

Hacemos $y = \lambda$ y obtenemos las soluciones $(8 + \lambda, \ \lambda, \ 3, \ 6 - 2\lambda)$, que nos indican la cantidad de P, Q, R y S que forman cada una de las posibles dietas.

Para que estas cantidades no sean negativas, λ debe variar entre 0 y 3. Es decir: $0 < \lambda < 3$

3 DETERMINANTES

Página 77

REFLEXIONA Y RESUELVE

Determinantes de orden 2

■ **Resuelve los siguientes sistemas y calcula el determinante de cada matriz de coeficientes:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ *Solución:* $x = 4, \ y = 7$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0$ *Solución:* $x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda, \ y = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ *Solución:* $x = 5, \ y = -3$

d) $\left.\begin{array}{l} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *Incompatible*

e) $\left.\begin{array}{l} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$ *Solución:* $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda, \ y = \lambda$

f) $\left.\begin{array}{l} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0$ *Solución:* $x = \frac{1\,402}{109}, \ y = \frac{886}{109}$

Determinantes de orden 3

■ **Queremos calcular todos los posibles productos (de tres factores) en los que intervengan un elemento de cada fila y uno de cada columna de esta matriz:**

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Averigua cuántos productos hay y calcúlalos.

b) Hazlo de nuevo para una matriz 3×3 cualquiera.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a) Hay 6 productos:

$6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$ $\quad$ $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$

$2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$ $\quad$ $7 \cdot 8 \cdot 6 = 336$

$9 \cdot 8 \cdot 4 = 288$ $\quad$ $2 \cdot 9 \cdot 1 = 18$

b) $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ $\quad$ $a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$

$a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$ $\quad$ $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$

$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ $\quad$ $a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Determinantes de orden 4

■ **En una matriz 4×4, ¿cuántos productos de 4 factores hay en los que intervengan un elemento de cada fila y uno de cada columna?**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Hay $4! = 24$ productos.

Determinantes de orden n

■ **¿Sabrías decir, en general, en una matriz cuadrada $n \times n$, cuántos productos de n factores, uno de cada fila y uno de cada columna, pueden darse?**

Hay $n!$ productos.

Página 80

1. Calcula el valor de los siguientes determinantes y di por qué son cero algunos de ellos:

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -50$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene una columna de ceros.

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene sus dos filas iguales.

e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0$, porque sus filas son proporcionales: (1.ª) · 7 = (2.ª)

f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0$, porque sus dos columnas son proporcionales: (2.ª) · (–20) = (1.ª)

2. Calcula el valor de los siguientes determinantes teniendo en cuenta estos datos:

$$A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix} \qquad |A| = -13$$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ **b)** $|6A|$ **c)** $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix}$ **d)** $|A^{-1}|$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13$

b) $|6A| = \begin{vmatrix} 6l & 6m \\ 6n & 6p \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 36 \cdot (-13) = -468$

c) $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 4 \cdot (-13) = -52$

d) $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \to \quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-13} = -\dfrac{1}{13}$

Página 81

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

2. Halla el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000$

Página 83

3. Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3.ª fila es proporcional a la 1.ª:

(3.ª = (–2) · 1.ª) (propiedad 6)

c) La 3.ª fila es combinación lineal de las dos primeras:

(3.ª = 1.ª + 10 · 2.ª) (propiedad 9)

d) La 1.ª fila es combinación lineal de las otras dos:

(1.ª = 10 · 2.ª + 3.ª) (propiedad 9)

4. **Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:**

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{a)} \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \dfrac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Página 84

1. **Justifica que los siguientes determinantes valen:**

a) 0

b) 0

c) 96 ó –96

d) 1 ó –1

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 27 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 36 \\ 0 & 6 & 2 & 54 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 612 & 704 & 410 & 103 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

a) La 4.ª columna es proporcional a la 2.ª (4.ª = 9 · 2.ª), luego el determinante vale 0 (propiedad 6).

b) La 3.ª fila es combinación lineal de las otras tres (3.ª = 100 · 4.ª + 10 · 1.ª + 2.ª), luego el determinante es 0 (propiedad 9).

c) $4 \cdot 8 \cdot 1 \cdot (-3) = -96$; este es el único producto posible distinto de cero. Luego, el determinante valdrá 96 ó –96, según el signo que le corresponda a dicho producto.

d) $1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$ es el único producto posible distinto de cero. Luego, el determinante valdrá 1 ó –1, según el signo que le corresponda a dicho producto.

Página 85

1. Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz *M*.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menores de orden dos; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menores de orden tres; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

2. Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{12}, a_{33} y a_{43} de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

Página 87

1. Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desarrollando por la 1.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) =$$

$$= -120 + 518 + 58 = 456$$

Desarrollando por la 2.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) =$$

$$= 180 + 42 + 234 = 456$$

Desarrollando por la 3.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 =$$

$$= 396 - 104 + 164 = 456$$

Desarrollando por la 1.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 =$$

$$= -120 + 180 + 396 = 456$$

Desarrollando por la 2.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 =$$

$$= 518 + 42 - 104 = 456$$

Desarrollando por la 3.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 =$$

$$= 58 + 234 + 164 = 456$$

2. **Dada la matriz** $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$**:**

a) Halla la suma de los productos de cada elemento de la 1.ª fila por el correspondiente adjunto de la 3.ª fila.

b) Halla la suma de los productos de cada elemento de la 3.ª columna por el adjunto de los correspondientes elementos de la 2.ª columna.

c) Justifica por qué los dos resultados anteriores son cero.

a) $a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot A_{33} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 3 \cdot 44 - 7 \cdot 13 - 1 \cdot 41 = 132 - 91 - 41 = 0$

b) $a_{13} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{22} + a_{33} \cdot A_{32} = -1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (-74) + 6 \cdot 21 - 4 \cdot 13 = -74 + 126 - 52 = 0$

c) Por la propiedad 12.

3. **Calcula los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$

(1) Desarrollando por la 2.ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desarrollando por la 4.ª fila.

También podríamos haber observado que la 4.ª columna es igual a la suma de las otras tres; y, por tanto, el determinante vale cero.

c) $$\begin{vmatrix}0&0&3&4\\1&1&1&0\\2&0&3&5\\0&2&0&1\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 3\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\2&0&5\\0&2&1\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&3\\0&2&0\end{vmatrix} = 3\cdot(-12)-4\cdot(-2) = -36+8=-28$$

(1) Desarrollando por la 1.ª fila.

d) $$\begin{vmatrix}3&-1&4&0\\5&6&2&0\\0&1&3&0\\8&6&7&1\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix}3&-1&4\\5&6&2\\0&1&3\end{vmatrix} = 83$$

(1) Desarrollando por la 4.ª columna.

Página 88

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}4&2&7&1\\2&-5&3&6\\2&0&4&-3\\6&2&8&0\end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix}3&-5&2&2\\4&7&8&27\\1&5&3&12\\5&1&0&6\end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix}1&2&0&3&4\\0&0&1&-1&3\\1&0&-1&2&1\\3&1&0&0&1\\-2&-3&-1&0&2\end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix}0&0&1&2\\3&0&1&0\\-2&1&0&3\\0&-4&2&1\end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix}4&2&7&1\\2&-5&3&6\\2&0&4&-3\\6&2&8&0\end{vmatrix} = \begin{array}{c}\text{COLUMNAS}\\ \hline (1.^a)-3\cdot(2.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a)-4\cdot(2.^a)\\ (4.^a)\end{array} \begin{vmatrix}-2&2&-1&1\\17&-5&23&6\\2&0&4&-3\\0&2&0&0\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2\cdot\begin{vmatrix}-2&-1&1\\17&23&6\\2&4&-3\end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 145 = 290$$

(1) Desarrollando por la 4.ª fila.

b) $$\begin{vmatrix}3&-5&2&2\\4&7&8&27\\1&5&3&12\\5&1&0&6\end{vmatrix} = \begin{array}{c}\text{COLUMNAS}\\ \hline (1.^a)-5\cdot(2.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a)\\ (4.^a)-6\cdot(2.^a)\end{array} \begin{vmatrix}28&-5&2&32\\-31&7&8&-15\\-24&5&3&-18\\0&1&0&0\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix}28&2&32\\-31&8&-15\\-24&3&-18\end{vmatrix} = 0$$

(1) Desarrollando por la 4.ª fila.

c) $$\begin{vmatrix}1&2&0&3&4\\0&0&1&-1&3\\1&0&-1&2&1\\3&1&0&0&1\\-2&-3&-1&0&2\end{vmatrix} = \begin{array}{c}\text{FILAS}\\ \hline (1.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a)+(2.^a)\\ (4.^a)\\ (5.^a)+(2.^a)\end{array} \begin{vmatrix}1&2&0&3&4\\0&0&1&-1&3\\1&0&0&1&4\\3&1&0&0&1\\-2&-3&0&-1&5\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&4\\3&1&0&1\\-2&-3&-1&5\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c}\text{FILAS}\\ \hline (1.^a)-3\cdot(2.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a)\\ (4.^a)+(2.^a)\end{array} -\begin{vmatrix}-2&2&0&-8\\1&0&1&4\\3&1&0&1\\-1&-3&0&9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2&2&-8\\3&1&1\\-1&-3&9\end{vmatrix} = -16$$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{(1.ª), (2.ª), (3.ª), } 4\cdot(3.^{a})+(4.^{a})]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ -8 & 0 & 2 & 13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 13 \end{vmatrix} =$

$= \xrightarrow[\text{(1.ª), (2.ª), } (-2)\cdot(2.^{a})+(3.^{a})]{\text{COLUMNAS}} -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -8 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} = 27 - 16 = 9$

Página 90

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Luego, las dos primeras filas son linealmente independientes.

Observamos que la 3.ª fila es la suma de las dos primeras, y que la 4.ª fila es la suma de la 2.ª y la 3.ª. Por tanto, *ran* (*A*) = 2.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$

Luego las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3.ª fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \to \quad \text{Las 3 primeras filas son linealmente independientes.}$$

Veamos si la 4.ª fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\ (B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, las tres primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, entonces $ran\ (C) = 4$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Luego las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, la 1.ª, 2.ª y 4.ª fila son linealmente independientes.

La 3.ª fila es la suma de las dos primeras. Luego $ran\ (D) = 3$.

Página 95

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Determinantes de orden 2 y 3

1 **Calcula el valor de estos determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 15 & 8 \\ -9 & -4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1$ b) $\begin{vmatrix} 15 & 8 \\ -9 & -4 \end{vmatrix} = 12$ c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$ e) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

2 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

b) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x \end{vmatrix} = 6$

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12 \rightarrow (1+x)^2 - (1-x)^2 = 12 \rightarrow$

$\rightarrow 1 + 2x + x^2 - 1 + 2x - x^2 = 12 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3$

b) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x \end{vmatrix} = 6 \rightarrow x(x-2) - x(1-2x) = 6 \rightarrow x(x - 2 - 1 + 2x) = 6 \rightarrow$

$\rightarrow x(3x-3) = 6 \rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

s3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) =$

$= (a-1)[3 + a + 6 - 6] = (a-1)(3+a) = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a^2 = 3 \quad \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 =$

$= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \rightarrow$

$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases} \end{cases}$

Propiedades de los determinantes

4 **Si** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$**, razona cuál es el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b+2a \\ c & d+2c \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 7$, ya que el determinante de una matriz es igual que el de su traspuesta.

b) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -7$, ya que si se permutan dos columnas el determinante cambia de signo.

c) $\begin{vmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 = 21$, ya que si multiplicamos por 3 la 1.ª fila, el determinante queda multiplicado por 3.

d) $\begin{vmatrix} a & b+2a \\ c & d+2c \end{vmatrix} = 7$, ya que si a la 2.ª columna le sumamos el producto por 2 de la 1.ª, su determinante no varía.

e) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$, ya que si multiplicamos por 2 la 1.ª y la 2,ª fila, el determinante queda multiplicado por 4.

s5 De las siguientes operaciones con determinantes de orden 2 × 2, señala las que son correctas y, en su caso, enuncia las propiedades que se utilizan:

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a-1 & a \\ b+2 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 2a & a-b \\ 2b & b \end{vmatrix} = 2b\begin{vmatrix} a & a-b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) Verdadero. Tiene las dos columnas iguales.

b) Verdadero. Si una fila está multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) Falso; sería $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

d) Verdadero. Si restamos la 2.ª columna a la 1.ª, el valor del determinante no varía.

e) Verdadero. Si una fila o una columna está multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

s6 Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de los siguientes determinantes? Justifica las respuestas:

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} \frac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0$, pues las dos columnas son proporcionales.

(1) Si a una fila le sumamos otra multiplicada por un número, el determinante no varía.

(2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

(3) Si cambiamos de orden dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

(4) Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

7 **Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & 7 \\ \dots & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

s8 **Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x-a & y-b & z-c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$

$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\frac{1}{2}$ factor común de la 3.ª fila. El 2.° determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$

(1) Cuando cambiamos de orden dos filas consecutivas, el determinante cambia de signo.

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{(1.^a)-(3.^a) \\ (2.^a)+(3.^a) \\ (3.^a)}]{\text{COLUMNAS}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -a & b & c \\ -x & y & z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -5$

(1) Sacamos –1 factor común de la 1.ª columna.

d) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-(3.^a) \\ (3.^a)}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$

$= 2\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{(1.^a)+(3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)}]{\text{FILAS}} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$

(1) Sacamos factor común el 2 de la 3.ª fila.

e) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x-a & y-b & z-c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} x & y & z \\ -a & -b & -c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -a & -b & -c \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 15$

(1) Cuando permutamos dos filas, el determinante cambia de signo.

(2) Sacamos –1 factor común de la 2.ª fila.

(3) Sacamos 3 factor común de la 1.ª fila.

Determinantes de orden cualquiera

9 **Halla el valor de los siguientes determinantes de orden 4:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-12) = -24$

(1) Desarrollamos por la 3.ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a)}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 0$

(1) El determinante se anula, puesto que tiene dos filas iguales.

Página 96

s10 **Calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -72$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 938$

Rango de una matriz

s11 **Halla el rango de las siguientes matrices:**

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

• $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \;\to\; ran\,(A) \geq 2$

Las dos últimas filas son linealmente independientes.

Veamos si la 2.ª fila depende linealmente de las dos últimas:

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$ La 2.ª fila depende linealmente de las dos últimas.

Veamos si la 1.ª fila depende de las dos últimas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$ Por tanto, $ran\,(A) = 3$.

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Las dos primeras columnas son linealmente independientes. Luego, $ran\,(B) \geq 2$.

Veamos si la 3.ª columna depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$ Por tanto, $ran\,(B) = 3$.

- $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos $|C|$:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)-(1.^a)}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2-1) = 2 \neq 0 \;\to\; ran\,(C) = 4$$

(1) Desarrollamos por la 1.ª columna.

- $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3.ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4 + 7 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -8 - 6 + 14 = 0$$

La 3.ª fila depende linealmente de las otras dos.

Por tanto, $ran\ (D) = 2$

s12 **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \ \rightarrow \ a = 2$

- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = 2$
- **Si $a \neq 2$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 2 - 2a + 2 = 4a^2 - 2a = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 2a(2a - 1) = 0 \ \begin{cases} a = 0 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Observamos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (B) \geq 2$

- **Si $a = 0$** $\rightarrow$ $|B| = 0 \ \rightarrow \ ran\ (B) = 2$
- **Si $a = \dfrac{1}{2}$** $\rightarrow$ $|B| = 0 \ \rightarrow \ ran\ (B) = 2$
- **Si $a \neq 0$ y $a \neq \dfrac{1}{2}$** $\rightarrow$ $|B| \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (B) = 3$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad a = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \dfrac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = \ \ 1 \end{cases}$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (C) \geq 2$

Por tanto:

- **Si $a = 1$** $\rightarrow \quad |C| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (C) = 2$
- **Si $a = -8$** $\rightarrow \quad |C| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (C) = 2$
- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -8$** $\rightarrow \quad |C| \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (C) = 3$

d) $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

- **Si $a = 1$** $\rightarrow \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (D) = 2$
- **Si $a = -1$** $\rightarrow \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (D) = 2$
- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$** $\rightarrow \ |D| \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (D) = 3$

s13 **Estudia el rango de estas matrices según el valor del parámetro a:**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{pmatrix}$

a) Si $|A| = 0 \quad \rightarrow \quad a = 2$

- **Si $a = 2$** $\rightarrow \quad ran\ (A) = 3$
- **Si $a \neq 2$** $\rightarrow \quad ran\ (A) = 4$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

- **Si $a = 4$** $\rightarrow$ Las cuatro filas son proporcionales $\rightarrow \ ran\ (B) = 1$
- **Si $a \neq 4$** $\rightarrow \ \begin{vmatrix} 3 & a \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (B) = 2$

c) $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array} \right.$

- **Si $a = 1$,** queda:

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ (C) = 1$

- **Si $a = -1$,** queda:

$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\ (C) = 2$

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$** $\rightarrow ran\ (C) = 2$

d) $D = \begin{pmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a-2 & 1-a \\ a & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a - a + a^2 =$

$= 2a^2 - 3a = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$

- **Si $a = 0$** $\rightarrow D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\ (D) = 1$

- **Si $a = \dfrac{3}{2}$** $\rightarrow D = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ 3/2 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}$

  Las dos filas son proporcionales $\rightarrow ran\ (D) = 1$

- **Si $a \neq 0$ y $a \neq \dfrac{3}{2}$** $\rightarrow ran\ (D) = 2$

PARA RESOLVER

s14 Justifica, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos:

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

a) La 1.ª y la 3.ª columnas son proporcionales (la 3.ª es –5 por la 1.ª).

b) Sumamos la 3.ª fila a la 2.ª:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} 0$$

(*) Puesto que tiene dos filas iguales.

s15 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} x \cdot x^3 - 1 = x^4 - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{1} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

(1) Desarrollamos por la 1.ª columna.

(2) Son determinantes de matrices triangulares.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = a(x-b)(x-c) = 0 \begin{cases} x = b \\ x = c \end{cases}$

(Suponemos que $a \neq 0$).

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 2-x & -x & 1 & 0 \\ 2-x & 1 & -x & 1 \\ 2-x & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (2-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$

$= \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \underset{(4)}{=}$

$= -x \begin{vmatrix} -x-1 & -1 \\ -1 & -x-1 \end{vmatrix} = -x\,[(-x-1)^2 - 1] = -x[x^2 + 1 + 2x - 1] =$

$= -x(x^2 + 2x) = -x^2(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

(1) Sumamos a la 1.ª columna las demás.

(2) Sacamos $(2-x)$ factor común de la 1.ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1.ª columna.

(4) Desarrollamos por la 2.ª fila.

d) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} =$

$= (x-1)(x^3 + 1 + x - x) = (x-1)(x^3+1) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x^3 + 1 = 0 \ \to \ x = -1 \end{cases}$

(1) Sumamos a la 1.ª columna la 2.ª.

(2) Desarrollamos por la 1.ª columna.

16 **Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro que contienen:**

a) $A = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

FILAS
(1.ª) – 2 · (4.ª)
(2.ª)
(3.ª)
(4.ª)

$\begin{vmatrix} k-2 & k & -5 & 0 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$

$= \begin{vmatrix} k-2 & k & -5 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -5 \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 5 & k \end{vmatrix} = -40k = 0 \ \to \ k = 0$

(1) Desarrollamos por la 4.ª columna.

(2) Desarrollamos por la 3.ª columna.

- **Si** $\boldsymbol{k = 0}$ $\to$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \to \ ran\ (A) = 3$

- **Si** $\boldsymbol{k \neq 0}$ $\to$ $|A| \neq 0 \ \to \ ran\ (A) = 4$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to$ Hacemos $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ k & k & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ \to \ 6k - 18 = 0 \ \to \ k = 3$

- **Si** $\boldsymbol{k = 3}$ $\to$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \ \to \ ran\ (B) = 3$

- **Si** $\boldsymbol{k \neq 3}$ $\to$ $ran\ (B) = 3$

Por tanto, $ran\ (B) = 3$ para cualquier valor de k.

c) $|C| = \begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} m \begin{vmatrix} 1 & m-1 & m(m-1) \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} =$

$= m(m-2) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$

(1) Sacando m factor común de la 1.ª columna.

- **Si** $\boldsymbol{m = 0}$ $\to$ $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\ (C) = 2$

- **Si** $\boldsymbol{m = 2}$ $\to$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\ (C) = 2$

- **Si** $\boldsymbol{m \neq 0}$ **y** $\boldsymbol{m \neq 2}$ $\to$ $|C| \neq 0 \to ran\ (C) = 3$

17 **Estudia, según los valores del parámetro, el rango de cada matriz:**

a) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}}$ **b)** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}}$

c) $\boldsymbol{C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}}$ **d)** $\boldsymbol{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix}}$

a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 1 = 0 \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$

- **Si** $\boldsymbol{k = 1}$ $\to$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\ (A) = 3$

- **Si** $\boldsymbol{k = -1}$ $\to$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to$

  $\to ran\ (A) = 2$

- **Si** $\boldsymbol{k \neq -1}$ $\to$ $ran\ (A) = 3$

b) $B = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix} \to |B| = \begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 - 2t = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$

• **Si $t = 0$** $\rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$

• **Si $t = \sqrt{2}$** $\rightarrow B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$

• **Si $t = -\sqrt{2}$** $\rightarrow B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$

• **Si $t \neq 0$, $t \neq \sqrt{2}$ y $t \neq -\sqrt{2}$** $\rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -t & 6 & 3-t \end{vmatrix} = t - 9 = 0 \rightarrow t = 9$

• **Si $t = 9$** $\rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -9 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(C) = 2$

• **Si $t \neq 9$** $\rightarrow ran\,(C) = 3$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & a+3 & 4-a \\ 1 & a+3 & a^2+2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$

$$\underset{(1)}{=} (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 4-a \\ 1 & 1 & a^2+2 \end{vmatrix} = (a+3)(a^2 + a - 2) = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \\ a = -3 \end{cases}$$

(1) Sacamos $(a+3)$ factor común de la 2.ª columna.

• **Si $a = 1$** $\rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(D) = 3$

• **Si $a = -2$** $\rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$

$\rightarrow ran\,(D) = 2$

• **Si $a = -3$** $\rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 11 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(D) = 3$

• **Si $a \neq -2$** $\rightarrow ran\,(D) = 3$

Página 97

18 **Calcula el rango de estas matrices en función del parámetro t:**

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 2 & t & t^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -t^3 + 3t^2 - 2t = 0 \; \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

- **Si $t = 0$** $\to A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\ (A) = 3$

- **Si $t = 1$** $\to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\ (A) = 3$

- **Si $t = 2$** $\to A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to$

  $\to ran\ (A) = 2$

- **Si $t \neq 2$** $\to ran\ (A) = 3$

b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix} \to |B| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{vmatrix} =$

$= t(t^2 - 3t + 2) = 0 \; \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

- **Si $t = 0$** $\to B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\ (B) = 2$

- **Si $t = 1$** $\to B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\ (B) = 2$

- **Si $t = 2$** $\rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\ (B) = 2$

- **Si $t \neq 0$, $t \neq 1$ y $t \neq 2$** $\rightarrow ran\ (B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \end{vmatrix} = -3(3t-6) = 0 \rightarrow t = 2$

- **Si $t = 2$** $\rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$

$\rightarrow ran\ (C) = 2$

- **Si $t \neq 2$** $\rightarrow ran\ (C) = 3$

s19 Halla, en función de a, el valor de los determinantes siguientes:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (4a+1) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{array} (4a+1) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$$= (4a+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4a+1) \cdot 1 = 4a+1$$

(1) Sumamos a la 1.ª columna las demás.

(2) Sacamos $(4a+1)$ factor común, de la 1.ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1.ª columna.

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-0 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$= -a \begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-a \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -a(2-a)^3 = a(a-2)^3$$

(1) Desarrollamos por la 4.ª columna.

(2) Es el determinante de una matriz triangular.

s20 Prueba, sin desarrollarlos, que el valor de los siguientes determinantes es 0:

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$

pues las dos últimas filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{z} \begin{vmatrix} xyz & xyz & xyz \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 0$

(1) Sacamos factor común $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$ y $\dfrac{1}{z}$ en la 1.ª, 2.ª y 3.ª columnas.

(2) La 1.ª y 3.ª fila son proporcionales $(xyz \cdot 1.^a = 3.^a)$.

s21 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$, donde a, b y c son no nulos.

a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

b) Calcula el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = a\,b\,c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = abc \cdot 0 = 0$$

Pero $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -ab + 2ab = ab \neq 0$, pues a y b son no nulos.

Por tanto:

a) Hay dos columnas en la matriz A que son linealmente independientes.

b) $ran\ (A) = 2$

s22 Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a, b y c:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 0$$

(1) Sumamos a la 2.ª fila la 3.ª.

(2) Sacamos $(a+b+c)$ factor común de la 2.ª fila.

(3) Las dos primeras filas son proporcionales.

Luego, $ran\ (M) \le 2$. Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5b - 5a = 0 \quad \rightarrow \quad b = a$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ b & c \end{vmatrix} = 5c - 5b = 0 \quad \rightarrow \quad c = b$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix} = 5c - 5a = 0 \quad \rightarrow \quad a = c$$

Por tanto:

- **Si $a = b = c$** $\rightarrow$ $ran\ (M) = 1$
- **Si $a \ne b$ o $b \ne c$ o $a \ne c$** $\rightarrow$ $ran\ (M) = 2$

s23 Estudia el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\ \alpha & 0 \\ sen\ \alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -sen\ \alpha & 0 \\ sen\ \alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + sen^2\ \alpha = 1$$

(1) Desarrollamos el determinante por la 3.ª fila o por la 3.ª columna.

Por tanto, como $|A| \ne 0$, tenemos que $ran\ (A) = 3$.

CUESTIONES TEÓRICAS

24 **¿Cuál es el valor del determinante de la matriz unidad de orden n? ¿Y el de una matriz triangular de orden n?**

Justifica tus respuestas.

det $(I_n) = 1$. El determinante de una *matriz triangular de orden n* es el producto de los elementos de su diagonal principal (pues el resto de los productos que intervienen en la obtención del determinante serían cero). En el caso de la matriz unidad de orden n, tenemos un ejemplo de matriz triangular en la que los elementos de su diagonal principal son unos. Por eso, el determinante vale 1.

25 **Prueba que el determinante de una matriz de orden 3 es igual al de su traspuesta.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicando la definición de determinante, obtenemos que $|A^t| = |A|$. Lo vemos:

$|A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

$|A^t| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Luego $|A| = |A^t|$.

26 **¿Sabrías decir cuál de estos dos productos puede formar parte del desarrollo de un determinante de orden 4?:**

a) $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$ **b)** $a_{14} \cdot a_{41} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

Solo podría ser b), puesto que en cada producto ha de aparecer un factor de cada fila y uno de cada columna.

27 **Comprueba que: *det*$(A \cdot B)$ = *det*$(A) \cdot$ *det*(B) siendo A y B dos matrices diagonales de orden 3.**

Sea: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \rightarrow |A \cdot B| = a_{11}\, b_{11}\, a_{22}\, b_{22}\, a_{33}\, b_{33}$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \\ |B| = b_{11}\, b_{22}\, b_{33} \end{array}\right\} \quad |A| \cdot |B| = a_{11}\, b_{11}\, a_{22}\, b_{22}\, a_{33}\, b_{33}$$

Luego, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

s28 **Justifica que** $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

☛ ***Ten en cuenta que:*** $A \cdot A^{-1} = I$

Sabemos que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Como $A \cdot A^{-1} = I$, tenemos que:

$|A| \cdot |A^{-1}| = |I|$. Pero $|I| = 1$ (véase ejercicio 24). Por tanto, queda:

$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \rightarrow \quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

(Observación: $|A| \neq 0$, puesto que existe A^{-1}, luego podemos dividir entre $|A|$).

29 **Si A es una matriz cuadrada de orden 4, ¿puedes saber el valor de:**

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} + a_{24}A_{14}$$

sin conocer los elementos de la matriz?

El resultado es 0, pues tenemos un producto de los elementos de una fila (la 2.ª) por los adjuntos de otra (la 1.ª).

s30 **Las matrices A y B tienen 3 filas y 12 columnas, pero, en el proceso de edición, algunas de estas se han borrado.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -7 & 5 & -2 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

¿Puedes averiguar algo sobre los posibles valores de su rango?

Si llamamos C a la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B, ¿cuál será el rango de C?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots \\ 3 & -1 & 0 & \dots \\ -7 & 5 & -2 & \dots \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$, sabemos que

$ran\ (A) \geq 2$. También sabemos, puesto que A solo tiene 3 filas, que $ran\ (A) \leq 3$. Por tanto, podemos afirmar que $2 \leq ran\ (A) \leq 3$; es decir, $ran\ (A)$ podría ser 2 ó 3.

- En el caso de la matriz B, tenemos que:

  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \dots \\ 3 & 0 & 1 & \dots \\ 5 & 4 & 0 & \dots \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$; y B solo tiene tres filas,

  entonces $ran\ (B) = 3$.

- Si C es la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B, por los resultados anteriores tendremos que $ran\ (C) = 3$.

Página 98

31 **Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿qué rango tendrá la matriz B?**

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m-a & n-b & p-c \end{pmatrix}$$

Observamos que la 3.ª fila de B (la que hemos añadido respecto a A), es combinación lineal de las dos primeras (se obtiene restando la 2.ª menos la 1.ª). Por tanto, B tendrá el mismo rango que A, es decir, *ran* $(B) = 2$.

s32 **Dadas la matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $|(AB^{-1})^t|$. Justifica las respuestas.**

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{3}$ (véase ejercicio 28).

$|B^t \cdot A| \underset{(1)}{=} |B^t| \cdot |A| \underset{(2)}{=} |B| \cdot |A| = 2 \cdot 3 = 6$

$|(AB^{-1})^t| \underset{(2)}{=} |AB^{-1}| \underset{(1)}{=} |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \dfrac{1}{|B|} = \dfrac{|A|}{|B|} = \dfrac{3}{2}$

(1) Tenemos en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

(2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

s33 **De una matriz cuadrada A se sabe que su determinante vale –1, y que el determinante de $2A$ vale –8. ¿Cuál es el orden de la matriz A? Razona la respuesta.**

$|2A| = -8 = -1 \cdot 8 = -1 \cdot 2^3 = 2^3 \cdot |A|$. Si tenemos en cuenta la siguiente propiedad de los determinantes:

"Si multiplicamos una fila o una columna de una matriz por un n.°, el determinante queda multiplicado por ese n.°"; entonces, si A es una matriz cuadrada de orden n:

$|2A| = 2^n \cdot |A|$. En nuestro caso concreto, será $n = 3$.

Es decir, A es una matriz de orden 3.

s34 **Si llamamos c_1, c_2, c_3 a los vectores columna de una matriz A, el determinante puede designarse así:**

$$det(A) = det(c_1, c_2, c_3)$$

Si $det(A) = 5$, ¿cuál será el valor de estos determinantes?

a) $det(c_1 - 3c_2, c_2, c_3)$

b) $det(c_1, c_2, 2c_3)$

c) $det(c_1, c_1 - c_2, c_3)$

a) $det(c_1 - 3c_2, c_2, c_3) \overset{(1)}{=} det(c_1, c_2, c_3) = 5$

(1) Sumamos a la 1.ª columna la 2.ª multiplicada por 3.

b) $det(c_1, c_2, 2c_3) \overset{(2)}{=} 2\ det(c_1, c_2, c_3) = 2 \cdot 5 = 10$

(2) Si multiplicamos una columna de una matriz por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) $det(c_1, c_1 - c_2, c_3) \overset{(3)}{=} det(c_1, -c_2, c_3) \overset{(2)}{=} -det(c_1, c_2, c_3) = -5$

(3) Restamos a la 2.ª columna la 1.ª.

35 **a) Define a qué se llama rango de una matriz.**

b) Indica, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

I) $ran(A) = ran(-A)$ ($-A$ es la matriz opuesta de A).

II) $ran(A) = ran(A^t)$ (A^t es la matriz traspuesta de A).

III) $ran(A + B) = ran(A) + ran(B)$

IV) $ran(A^2) = [ran(A)]^2$

V) $ran(A) = ran(A^{-1})$ si A tiene inversa (A^{-1} es la matriz inversa de A).

a) El rango de una matriz es el número de filas (o de columnas) linealmente independientes. También podemos definirlo como el máximo orden de sus menores no nulos.

b) I) **Verdadera**. El hecho de cambiar de signo los elementos de A, solo afectará al signo de los menores; pero el máximo orden de los menores no nulos (el rango) no se ve influido.

II) **Verdadera**. El número de filas y el número de columnas linealmente independientes es el mismo. En A^t solo hemos cambiado filas por columnas.

III) **Falsa**. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \to \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$ran\ (A) = ran\ (B) = 2$ (pues $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$) y $ran\ (A + B) = 1$.

IV) **Falsa**. Por ejemplo, si A es una matriz de orden 2 y con $ran\ (A) = 2$, A^2 también será de orden 2; luego $ran\ (A^2) \leq 2$, y $[ran\ (A)]^2 = 2^2 = 4$ (si A^2 es de orden 2 *no* puede tener rango 4).

V) Si A es una matriz cuadrada de orden n, y existe su inversa, entonces $|A| \neq 0$ (y $|A^{-1}| \neq 0$). Luego $ran\ (A) = ran\ (A^{-1}) = n$. Por tanto, la igualdad es **verdadera**.

s36 **Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Demuestra que $det(A) = 0$ o $det(A) = 1$.**

$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |A| \;\rightarrow\; |A|^2 - |A| = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; |A|(|A| - 1) = 0 \quad \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases}$

(Hemos tenido en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$).

s37 **Escribe dos matrices A y $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tales que:**

a) $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$

b) $det(A + B) = det(A) + det(B)$

a) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = 7$; $|B| = -11$; $|A + B| = 0 \neq |A| + |B| = -4$

b) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$; $|B| = 0$; $|A + B| = 0 = |A| + |B|$

PARA PROFUNDIZAR

s38 **Demuestra, sin desarrollar el determinante, que:**

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

☛ ***Haz $c_1 - c_3$ y $c_2 - c_3$. Así podrás sacar factor común $(a - b)^2$. Después, haz $c_1 - 2c_2$.***

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{COLUMNAS} \\ (1.^a) - (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a)}}{=} \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & ab - b^2 & b^2 \\ 2a - 2b & a - b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & (a-b) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 (a + b - 2b) = (a-b)^2 (a-b) = (a-b)^3$$

(1) Sacamos $(a - b)$ factor común de la 1.ª y de la 2.ª columna.

(2) Desarrollamos por la 3.ª fila.

39 **Demuestra, sin desarrollar, que:**

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

☛ ***En el segundo miembro, multiplica y divide la primera fila por a; la segunda, por b, y la tercera, por c.***

Procediendo como se indica en la ayuda, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} bca & a^2 & a^3 \\ acb & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

40 **Prueba que:** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

☛ ***Este determinante se llama de Vandermonde. Haz $c_2 - c_1$ y $c_3 - c_1$. Extrae el factor $(b-a)$ de la 2.ª columna y $(c-a)$ de la 3.ª columna.***

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

s41 **Determina las matrices cuadradas de orden 2 cuyos elementos sean números enteros, con determinante igual a –1, y tal que su inversa coincida con su traspuesta.**

☛ ***Haz $A \cdot A^t = I$ y $|A| = -1$.***

Hay 4 soluciones.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Si $A^t = A^{-1}$, ha de ser:

$$A \cdot A^t = I \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{array}\right\}$$

Como a, b, c, d son enteros, tenemos solo cuatro soluciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

s42 **Escribe una matriz con 3 filas y 3 columnas, que tenga 3 elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden 2 sea nulo.**

Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ya que: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

43 **Calcula el valor de estos determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) \\ (5.^a)-(1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \\ (4.^a) \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \end{array} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -(-2) = 2$$

(1) Desarrollamos por la 1.ª columna.

(2) Es el determinante de una matriz triangular.

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) \\ (5.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(4.^a) \\ (4.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

(1) Desarrollamos por la 1.ª columna.

(2) Desarrollamos por la 4.ª columna.

Página 99

44 **Demostración de que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ para determinantes de orden 2:**

$$|AB| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}}_{(1)} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}}_{(2)} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}}_{(3)} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}}_{(4)}$$

a) Comprueba que los determinantes (1) y (4) son ambos cero.

b) En (2) y en (3) saca factor común los elementos b_{ij}. Llegarás a $|A| \cdot |B|$, como se quería demostrar.

a) (1) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} = a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} = 0$

(4) $\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} = a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} = 0$

b) (2) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\,|A|$

(3) $\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -b_{21}b_{12}\,|A|$

Por tanto, queda:

$|AB| = 0 + b_{11}b_{22}\,|A| - b_{21}b_{12}\,|A| + 0 = |A|\,(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) =$

$= |A| \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$

45 **Considera la siguiente matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz (A_{ij}) formada por los adjuntos de los elementos de A.

b) Prueba que $A \cdot (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$.

c) ¿Qué relación hay entre $|A|$ y $|(A_{ij})|$?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $|A| = -8 - 8 + 3 = -13$

$$A \cdot (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -8 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

c) $|(A_{ij})| = 169 = (-13)^2 = |A|^2$

46 **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con $|A| \neq 0$. Busca la relación que existe entre $|A|$ y $|(A_{ij})|$.**

Para ello, ten en cuenta el apartado b) del problema anterior y que:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

• Sabemos que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta: $|A_{ij}| = |A_{ji}|$.

• Por otra parte, tenemos que (suponemos que existe A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) \to |A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 \cdot |A_{ji}| = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| = |A^{-1}|$$

• También sabemos que:

$$A \cdot A^{-1} = I \to |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \to |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

• Uniendo las dos igualdades obtenidas, tenemos que:

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| \to |A_{ij}| = |A|^2 \ \ (A \text{ de orden } 3 \times 3)$$

47 **Si A es una matriz cuadrada de orden n, da el valor de $|(A_{ij})|$ en función de $|A|$.**

Con el mismo razonamiento que hemos seguido en el ejercicio anterior, llegamos a que si A es $n \times n$:

$$\left.\begin{array}{l} |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|^n}\,|A_{ij}| \\[2ex] |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \end{array}\right\} \to |A_{ij}| = |A|^{n-1}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} =$$

FILAS
(1.ª)
(2.ª) – (1.ª)
(3.ª) – (1.ª)
(4.ª) – (1.ª)

$$= (3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$$= (3+3x)\begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3+3x)(3-x)^3 = 3(1+x)(x-3)^3$$

(1) Sumamos a la 1.ª columna las demás.

(2) Sacamos $(3+3x)$ factor común de la 1.ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1.ª columna.

2. **Calcula el rango de la matriz siguiente:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro ***a*****.**

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-a\cdot(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -1-a & -1-a & 1-2a \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -1-a & -1-a & 1-2a \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 1+a & 1+a & 2a-1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(1+a) - 8(2a-1) - 12(1+a) + 16(1+a) =$$

$$= 8(1+a) - 8(2a-1) = 16 - 8a = 0 \;\rightarrow\; a = 2$$

(1) Desarrollamos por la 1.ª columna.

(2) Cambiamos el signo de la 2.ª y 3.ª fila.

- **Si** $\boldsymbol{a = 2}$ $\rightarrow$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(M) = 3$

- **Si** $\boldsymbol{a \neq 2}$ $\rightarrow$ $ran\,(M) = 4$

3. **Considera la siguiente matriz:**

$$N = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

Estudia su rango según los valores del parámetro ***a*****.**

Buscamos los valores que anulen el determinante formado por las tres primeras filas y las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 + 1 + 1 - (a+1) - (a+1) - (a+1) =$$

$$= (a+1)^3 - 3(a+1) + 2 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a - 3 + 2 =$$

$$= a^3 + 3a^2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 0 \\ a = -3 \end{array} \right.$$

• **Si** $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ $\to$ $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\to$ Las tres primeras filas son iguales y la 4.ª son ceros $\to$ $ran\ (N) = 1$

• **Si** $\boldsymbol{a} = \mathbf{-3}$ $\to$ $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Buscamos algún menor de orden 3 distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -3 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 9 = 27 \neq 0 \ \to \ ran\ (N) = 3$$

(1) Sacamos –3 como factor común de la 3.ª columna.

• **Si** $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ $\to$ $ran\ (N) = 3$

4. Prueba, sin desarrollarlo, que:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1}+\boldsymbol{a} & \mathbf{2}+\boldsymbol{a} & \mathbf{3}+\boldsymbol{a} & \mathbf{4}+\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 0 + 0 = 0$$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Hay dos filas iguales en cada uno de los determinantes.

5. Sean c_1, c_2, c_3 las columnas primera, segunda y tercera de una matriz cuadrada A de orden 3, cuyo determinante vale 6.

Calcula, indicando las propiedades que utilizas:

a) $|A^3|$ **b)** $|A^{-1}|$ **c)** $|2A|$

d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3c_1 - c_3$, $2c_3$ y c_2.

a) Como $|A| = 6 \ \to \ |A^3| = |A \cdot A \cdot A| \underset{(1)}{=} |A|^3 = 6^3 = 216$

(1) El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.

b) Sabemos que:

$$A \cdot A^{-1} = I \ \to \ |A \cdot A^{-1}| = |I| = 1 \ \to \ |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \ \to \ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{6}$$

c) $|2A| \underset{(1)}{=} 2^3|A| = 8 \cdot 6 = 48$

(1) Para obtener la matriz $2A$ hemos multiplicado por 2 todos los elementos de A. Por ello, podemos sacar factor común el 2 de cada fila.

d) $|3c_1 - c_2 \quad 2c_3 \quad c_2| \underset{(1)}{=} 2|3c_1 - c_2 \quad c_3 \quad c_2| \underset{(2)}{=} -2|3c_1 - c_2 \quad c_2 \quad c_3| \underset{(3)}{=}$

$$\underset{(3)}{=} -2|3c_1 \quad c_2 \quad c_3| \underset{(4)}{=} -6|c_1 \quad c_2 \quad c_3| = -6 \cdot 6 = -36$$

(1) Sacamos como factor común el 2 que multiplica a la 2.ª columna.

(2) Al permutar la 2.ª y la 3.ª columna, el determinante cambia de signo.

(3) Si sumamos la 2.ª columna a la 1.ª, el determinante no varía.

(4) Sacamos como factor común el 3 de la 1.ª columna.

6. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$?

Justifica tu respuesta y pon un ejemplo.

Tendremos en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Entonces:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \underset{(*)}{=} |B| \cdot |A| = |B \cdot A|.$$ Por tanto, sí se verifica la igualdad.

(*) Aunque el producto de matrices no es conmutativo, el producto de números (los determinantes son números), sí lo es.

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\[2ex] B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$|A \cdot B| = -1 - 3 = -4$

$|B \cdot A| = -16 + 12 = -4$

Comprobamos que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$.

BLOQUE II
GEOMETRÍA

Página 216

1 **Considera los vectores $\vec{u}(3, 2, -1)$, $\vec{v}(-4, 0, 3)$ y $\vec{w}(3, -2, 0)$:**

a) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

b) Halla m para que el vector $(2, -6, m)$ sea perpendicular a $\vec{u}$.

c) Calcula $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Resolución

a) Para que los tres vectores formen una base, han de ser L.I. Veámoslo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 28 \neq 0. \text{ Forman una base de } \mathbb{R}^3.$$

b) $(2, -6, m) \cdot (3, 2, -1) = 6 - 12 - m$

$(2, -6, m) \perp \vec{u} \iff 6 - 12 - m = 0 \iff m = -6$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$$cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-15}{\sqrt{14} \cdot 5} = -0{,}80179... \to (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 143°\ 18'\ 3''$$

2 **Halla un vector de módulo 13 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u}(24, 10, 7)$ y $\vec{v}(-12, -5, 8)$.**

Resolución

$\vec{u} \times \vec{v} = (115, -276, 0)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{115^2 + 276^2} = 299 = 13 \cdot 23$

El vector buscado es $\frac{1}{23}\ \vec{u} \times \vec{v} = (5, -12, 0)$.

También cumple las condiciones pedidas su opuesto: $(-5, 12, 0)$.

Soluciones: $(5, -12, 0)$ y $(-5, 12, 0)$

3 **Considera los puntos $P(2, 3, 5)$ y $Q(8, -9, 2)$:**

a) Halla el punto medio de PQ.

b) Halla el punto simétrico de P respecto de Q.

c) Obtén un punto R de PQ tal que $2\overline{PR} = \overline{RQ}$.

Resolución

a) Punto medio: $\left(\dfrac{2+8}{2}, \dfrac{3-9}{2}, \dfrac{5+2}{2}\right) = \left(5, -3, \dfrac{7}{2}\right)$

b) Sea $S(\alpha, \beta, \gamma)$ el simétrico de P respecto de Q. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2+\alpha}{2} = 8 \\ \dfrac{3+\beta}{2} = -9 \\ \dfrac{5+\gamma}{2} = 2 \end{array}\right\} \quad \alpha = 14, \ \beta = -21, \ \gamma = -1$$

Así, el simétrico de P respecto de Q es $(14, -21, -1)$.

c)

$\overrightarrow{PQ} = (6, -12, -3)$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OP} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = (2, 3, 5) + (2, -4, -1) = (4, -1, 4)$

4 **Dados los puntos $P(3, 2, 0)$, $Q(5, 1, 1)$ y $R(2, 0, -1)$:**

a) Halla la recta que pasa por P y Q.

b) Halla el plano que contiene a P, Q y R.

c) Halla la distancia entre P y Q.

Resolución

a) $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1)$

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{PR} = (-1, -2, -1)$

$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, -1, 1) \times (-1, -2, -1) = (3, 1, -5) \perp \pi$

π: $3(x - 3) + 1(y - 2) - 5(z - 0) = 0$

$3x + y - 5z - 11 = 0$

c) $dist\,(P, Q) = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

5 **Dados el punto $A(-1, 2, 3)$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$, calcula razonadamente:**

a) La distancia de A a r.

b) El punto simétrico de A respecto de r.

Resolución

$R(1+\lambda, -2+\lambda, 1+2\lambda)$ es un punto genérico de r.

$\overrightarrow{AR}(2+\lambda, -4+\lambda, -2+2\lambda)$

Buscamos R para que $\overrightarrow{AR} \perp r$; es decir, $\overrightarrow{AR} \perp (1, 1, 2)$:

$$(2+\lambda, -4+\lambda, -2+2\lambda) \cdot (1, 1, 2) = 2+\lambda-4+\lambda-4+4\lambda = 6\lambda-6$$

$$\overrightarrow{AR} \perp r \iff 6\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Por tanto, $R(2, -1, 3)$ es el pie de la perpendicular de A a r.

a) $dist\,(A, r) = dist\,(A, R) = \sqrt{3^2+3^2+0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) El simétrico de A respecto de r es el simétrico, $A'(\alpha, \beta, \gamma)$, de A respecto de R:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-1+\alpha}{2} = 2 \\[2mm] \dfrac{2+\beta}{2} = -1 \\[2mm] \dfrac{3+\gamma}{2} = 3 \end{array}\right\} \quad \alpha = 5, \;\; \beta = -4, \;\; \gamma = 3$$

Así, $A'(5, -4, 3)$.

6 **Calcula la posición relativa de la recta y el plano siguientes:**

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = \quad -\lambda \\ z = 0 \end{cases} \qquad \pi: x + y + z = 0$$

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} (3, -1, 0) = \vec{d}_r \,//\, r \\ (1, 1, 1) = \vec{n}_\pi \perp \pi \end{array}\right\} \quad \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 2 \neq 0$$

Por tanto, $\vec{d}_r$ no es perpendicular a $\vec{n}_\pi$. Es decir, la recta no es paralela al plano, ni está contenida en él.

Conclusión: la recta corta al plano.

7 **Dadas las rectas** $r: \begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$ **y** $s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$ **comprueba que se cruzan y calcula la distancia entre ellas y la ecuación de la perpendicular común.**

Resolución

Ecuaciones paramétricas de r. Llamamos $y = \lambda$:

$$r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \qquad \begin{matrix} R_0(4, 0, 5) \\ \vec{d}_r(-1, 1, -1) \end{matrix}$$

Ecuaciones paramétricas de s:

$$s: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 3\mu \end{cases} \qquad \begin{matrix} S_0(1, -1, 0) \\ \vec{d}_s(1, -1, 3) \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{R_0S_0} = (-3, -1, -5)$$

- Posición relativa:

  Vemos el rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$, $\overrightarrow{R_0S_0}$:

  $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

  Los tres vectores son L.I. Por tanto, las rectas se cruzan.

- El vector genérico $\overrightarrow{RS}(-3 + \lambda + \mu, -1 - \lambda - \mu, -5 + \lambda + 3\mu)$ tiene su origen en r y su extremo en s.

  $$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{RS} \perp r \Leftrightarrow \overrightarrow{RS} \perp \vec{d}_r \Leftrightarrow -(-3 + \lambda + \mu) + (-1 - \lambda - \mu) - (-5 + \lambda + 3\mu) = 0 \\ \overrightarrow{RS} \perp s \Leftrightarrow \overrightarrow{RS} \perp \vec{d}_s \Leftrightarrow (-3 + \lambda + \mu) - (-1 - \lambda - \mu) + 3(-5 + \lambda + 3\mu) = 0 \end{matrix}\right\}$$

  $$\left.\begin{matrix} 7 - 3\lambda - 5\mu = 0 \\ -17 + 5\lambda + 11\mu = 0 \end{matrix}\right\} \lambda = -1, \mu = 2$$

  Por tanto, los pies de la perpendicular común a las dos rectas son:

  $$\left.\begin{matrix} \lambda = -1 \to R(5, -1, 6) \\ \mu = 2 \to S(3, -3, 6) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{RS}(-2, -2, 0) // (1, 1, 0)$$

  $$dist\,(r, s) = dist\,(R, S) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

- Recta perpendicular común:

  $$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 6 \end{cases}$$

8 **Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$, es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\alpha: 2x - y + z + 1 = 0$.**

Resolución

$(1, -2, 0) \times (0, 0, 1) = (-2, -1, 0) \,//\, (2, 1, 0) = \vec{d}_r$

Sea π el plano buscado y $\vec{n}$ su vector normal. Entonces:

$\pi \,//\, r \;\Rightarrow\; \vec{d}_r \perp \vec{n}$

$\pi \perp \sigma \;\Rightarrow\; \vec{n} \perp (2, -1, 1)$

Por tanto, $\vec{n} = (2, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -2, -4)$.

Ecuación de π: $1(x - 1) - 2(y - 0) - 4(z + 1) = 0$

$$x - 2y - 4z - 5 = 0$$

9 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta perpendicularmente a la recta AB, siendo $A(2, 0, 2)$ y $B(-1, 2, 1)$.**

Resolución

$\overrightarrow{AB} = (-3, 2, -1) = \vec{d}_r$

$r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ es la recta AB.

Tomamos un vector genérico $\overrightarrow{OR}$ con origen en O y extremo variable en r:

$$\overrightarrow{OR}(2 - 3\lambda, 2\lambda, 2 - \lambda)$$

Obligamos a que $\overrightarrow{OR} \perp r$:

$$(2 - 3\lambda, 2\lambda, 2 - \lambda) \cdot (-3, 2, -1) = 0 \;\Leftrightarrow\; -6 + 9\lambda + 4\lambda - 2 + \lambda = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 14\lambda - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Para $\lambda = \frac{4}{7}$, obtenemos $R\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{10}{7}\right)$ y $\overrightarrow{OR}\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{10}{7}\right) // (2, 8, 10) // (1, 4, 5)$

La recta buscada es: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$

10 **Sean el plano $\pi: 3x - 2y + z - 1 = 0$ y las rectas:**

$$r: \begin{cases} x = \quad - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

a) Halla el ángulo que forman r y s.

b) Calcula el ángulo formado entre r y π.

c) Halla el ángulo que forma π con el plano σ determinado por r y s.

Resolución

$\vec{d}_r(-1, 1, -2) // r$, $\vec{d}_s(3, 4, 0) // s$, $\vec{n}(3, -2, 1) \perp \pi$

a) $\cos(\widehat{r, s}) = \dfrac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|} = \dfrac{1}{\sqrt{6} \cdot 5} = 0{,}08165 \rightarrow (\widehat{r, s}) = 85° \, 19'$

b) $sen(\widehat{r, \pi}) = |\cos(\widehat{\vec{d}_r, \vec{n}})| = \left| \dfrac{-7}{\sqrt{6}\sqrt{14}} \right| = 0{,}76376 \rightarrow (\widehat{r, \pi}) = 49° \, 47' \, 49''$

c) r y s se cortan en (0, 2, 3), evidentemente.

Determinan un plano cuyo vector normal es:

$$\vec{n}' = (-1, 1, -2) \times (3, 4, 0) = (8, -6, -7)$$

$$\cos(\widehat{\pi, \sigma}) = |\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{n}'})| = \frac{3 \cdot 8 + (-2) \cdot (-6) + 1 \cdot (-7)}{\sqrt{14}\sqrt{149}} =$$

$$= \frac{29}{\sqrt{14}\sqrt{149}} = 0{,}63495 \rightarrow (\widehat{\pi, \sigma}) = 50° \, 35' \, 1''$$

11 **Calcula la distancia que hay entre estos planos:**

$$\alpha: 2x + y - z + 1 = 0 \qquad \beta: 4x + 2y - 2z + 7 = 0$$

Resolución

$\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{-2} \neq \dfrac{1}{7}$; por tanto, α y β son paralelos.

El punto $A(0, 0, 1) \in \alpha$. Por tanto:

$$dist(\alpha, \beta) = dist(A, \beta) = \frac{|4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24} \simeq 1{,}02$$

12 **Calcula m para que r y s estén en el mismo plano:**

$$r: \frac{2x-1}{2} = 1-y = z \qquad s: \begin{cases} x+y+z+m=0 \\ 3x \qquad -4z+1=0 \end{cases}$$

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} r: \dfrac{x-(1/2)}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1} \qquad \vec{d}_r = (1, -1, 1) \\ s: \vec{d}_s = (1, 1, 1) \times (3, 0, -4) = (-4, 7, -3) \end{array}\right\}$$

Evidentemente, las rectas no son paralelas. Veamos cómo ha de ser m para que se corten.

Conviene expresar cada una de las dos rectas como intersección de dos planos. Obligamos a que los cuatro planos tengan algún punto común:

$$r: \begin{cases} \dfrac{2x-1}{2} = z \ \rightarrow \ 2x \qquad - 2z = 1 \\ 1-y=z \ \rightarrow \qquad\quad y + \ z = 1 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x+y+z \quad = -m \\ 3x - \qquad 4z = -1 \end{cases}$$

Para que el sistema tenga solución, es necesario que el determinante de la matriz ampliada sea cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -m \\ 3 & 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -2m - 8; \ \ -2m - 8 = 0 \iff m = -4$$

Si $m = -4$, las dos rectas se cortan. Por tanto, están en un mismo plano.

13 **Halla un punto de la recta s: $x = -y = z$ tal que su distancia a r: $\begin{cases} x+y \quad = 0 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$ sea igual a 1 unidad.**

Resolución

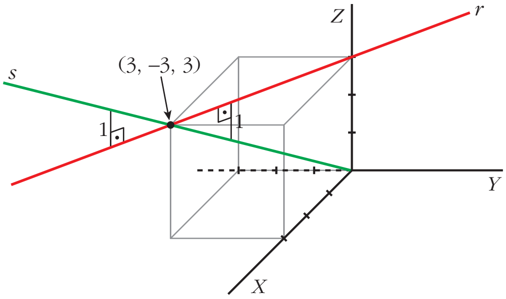
Un punto genérico de r: $R(\lambda, -\lambda, 3)$

Un punto genérico de s: $S(\mu, -\mu, \mu)$

Las dos rectas se cortan en $(3, -3, 3)$.

Al ser perpendicular a r desde s, la coordenada z debe distar 1 en ambas rectas. Por tanto, hay dos puntos de s cuya distancia a r es 1:

$(2, -2, 2)$ y $(4, -4, 4)$



14 **Calcula las ecuaciones de la recta r' sabiendo que es la proyección ortogonal de r sobre π:**

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 3 \end{cases} \qquad \pi: x - y + 2z + 4 = 0$$

Resolución

La recta r' es intersección de dos planos: el π y un plano α que contiene a r y es perpendicular a π.

Un vector normal a α es perpendicular al vector dirección de r y al vector normal a π.

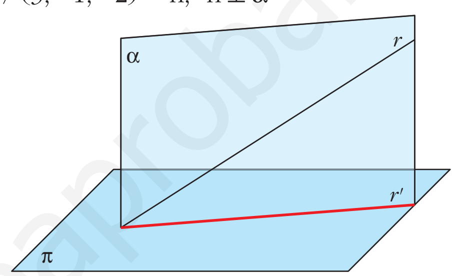
Por tanto: $(1, 3, 0) \times (1, -1, 2) = (6, -2, -4) \,//\, (3, -1, -2) = \vec{n};\ \vec{n} \perp \alpha$

$(0, -2, 3) \in \alpha$

α: $3(x - 0) - (y + 2) - 2(z - 3) = 0$

$3x - y - 2z + 4 = 0$

La recta es r': $\begin{cases} 3x - y - 2z + 4 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$



15 **Dada la recta $r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases}$ y el plano $\beta: x - 3y - z + 6 = 0$, halla la ecuación de un plano paralelo a β que diste de la recta r 3 unidades.**

Resolución

Para que el problema tenga solución, la recta debe ser paralela al plano. Comprobemos que es así:

$\vec{d}_r = (2, -5, 0) \times (1, 0, 5) = (-25, -10, 5) \,//\, (5, 2, -1)$

$\vec{n} = (1, -3, -1) \perp \beta$

$(5, 2, -1) \cdot (1, -3, -1) = 0 \Rightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n} \Rightarrow r \,//\, \beta$

La recta es paralela al plano.

Obtenemos un punto de la recta dando un valor a x. Por ejemplo, para $x = -2 \to$ $\to R(-2, -1, -1)$

Un plano cualquiera paralelo a β es de la forma: α: $x - 3y - z + k = 0$

La distancia de r a α es igual a la distancia de R a α y debe ser igual a 3:

$$dist\,(R, \alpha) = \frac{|-2 - 3(-1) - (-1) + k|}{\sqrt{1^2 + 3^3 + 1^2}} = 3$$

$2 + k = \pm 3\sqrt{11} \to k = -2 + 3\sqrt{11}$

Solución: Hay dos planos que cumplen esta condición:

$$\alpha_1: x - 3y - z - 2 - 3\sqrt{11} = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_2: x - 3y - z - 2 + 3\sqrt{11} = 0$$

16 **El plano $2x - y + 3z - 6 = 0$ corta a los ejes coordenados en los puntos P, Q y R.**

a) Calcula el área del triángulo PQR.

b) Halla el volumen del tetraedro de vértices P, Q, R y el origen de coordenadas.

Resolución

Puntos de corte con los ejes: $P(3, 0, 0)$, $Q(0, -6, 0)$, $R(0, 0, 2)$

a) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -6, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (-3, 0, 2)$

$$\text{Área } \widehat{PQR} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2}|(-12, 6, -18)| = 3\sqrt{14} \text{ u}^2$$

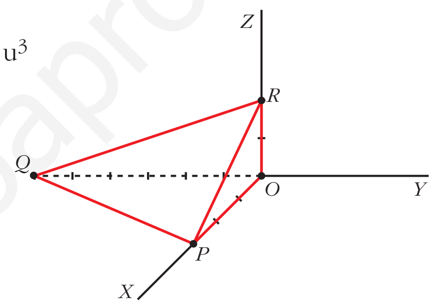
b) Para hallar el volumen del tetraedro, podemos utilizar dos métodos.

1.er MÉTODO. Utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PO}]| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| = 6 \text{ u}^3$$

2.° MÉTODO. Teniendo en cuenta que el tetraedro es la sexta parte de un ortoedro de dimensiones 3, 6 y 2:

$$V = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 6 \text{ u}^3$$



17 **Dada la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 39 = 0$, halla:**

a) Su centro.

b) La ecuación del plano tangente en el punto $P(1, -3, 7)$.

Resolución

a) *Centro*: $C(1, -3, 0)$

b) *Radio*: $r = 7$

$(1, -3, 7)$ ¿pertenece a la superficie esférica?

$1 + 9 + 49 - 2 - 18 - 39 = 0$. Sí pertenece, pues cumple la ecuación.

(También podríamos haber comprobado que $dist\,(P, C) = 7$).

El vector $\overrightarrow{CP}$ es perpendicular al plano tangente, π:

$\overrightarrow{CP}(0, 0, 7) \,//\, (0, 0, 1)$, perpendicular a π.

Ecuación del plano tangente a la esfera en el punto P es:

π: $0(x - 1) + 0(y + 3) + 1(z - 7) = 0 \;\rightarrow\; z = 7$

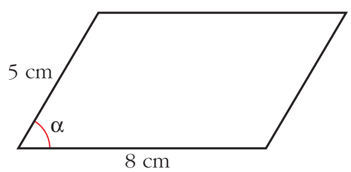
5 VECTORES EN EL ESPACIO

Página 133

REFLEXIONA Y RESUELVE

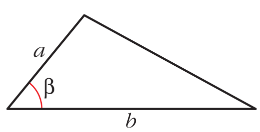
Relaciones trigonométricas en el triángulo

■ **Halla el área de este paralelogramo en función del ángulo α:**



$$\text{Área} = 8 \cdot 5 \; sen \; \alpha = 40 \; sen \; \alpha \text{ cm}^2$$

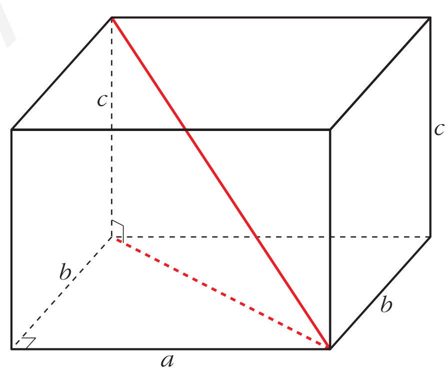
■ **Halla el área de este triángulo en función del ángulo β:**



$$\text{Área triángulo} = \frac{a \; b \; sen \; \beta}{2}$$

Diagonal de un ortoedro

■ **Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son $c = 3$ cm, $b = 4$ cm y $a = 12$ cm.**



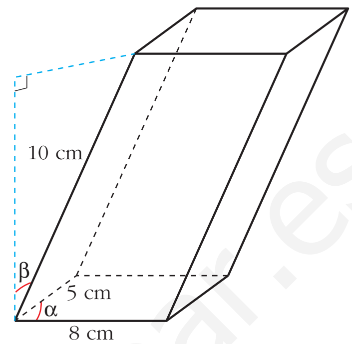
Diagonal $= \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm

■ **Escribe la expresión general de la diagonal de un ortoedro de aristas a, b y c.**

En general: Diagonal $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Volumen de un paralelepípedo

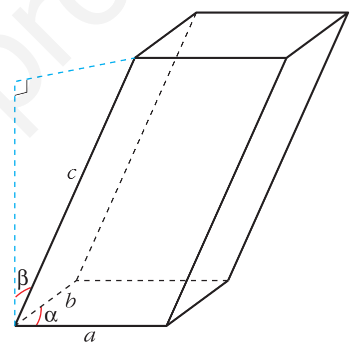
- **Halla el volumen de este paralelepípedo en función de α y de β:**



$$\left.\begin{array}{l}\text{Área base} = 40\ sen\ \alpha \\ \text{Altura} = 10\ cos\ \beta\end{array}\right\}$$

Volumen = $400\ sen\ \alpha\ cos\ \beta\ \text{cm}^3$

- **¿Cuál será el volumen de un paralelepípedo de aristas a, b, c, tal que las dos aristas de la base formen entre sí un ángulo α, y las aristas laterales formen un ángulo β con la perpendicular?**



Volumen = $a\ b\ c\ sen\ \alpha\ cos\ \beta$

Página 135

1. **La propiedad $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$ relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.**

a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?

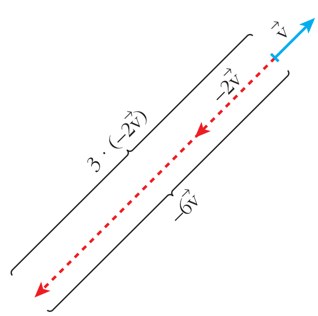
b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = -2$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Producto de números por vectores:

$b \cdot \vec{v}$; $(a \cdot b) \cdot \vec{v}$; $a \cdot (b \cdot \vec{v})$

Producto entre números: $a \cdot b$

b) $$\left.\begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v}\end{array}\right\} 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$$



2. **La propiedad distributiva $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ relaciona la suma de números con la suma de vectores.**

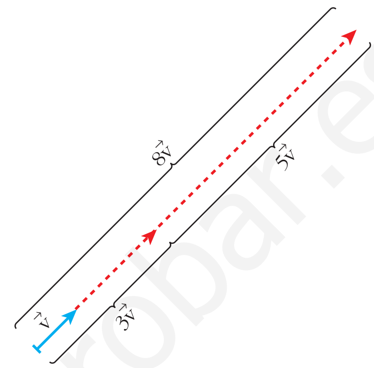
a) De las dos sumas que aparecen, ¿cuál es de cada tipo?

b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = 5$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Suma de números: $a + b$

Suma de vectores: $a\vec{v} + b\vec{v}$

b) $$\left.\begin{aligned} (a + b) \cdot \vec{v} &= 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} &= 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{aligned}\right\} \; 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$$



Página 137

1. **Si $\vec{u}(-3, 5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, -2)$, halla las coordenadas:**

a) $2\vec{u}$ **b) $0\vec{v}$** **c) $-\vec{u}$** **d) $2\vec{u} + \vec{v}$** **e) $\vec{u} - \vec{v}$** **f) $5\vec{u} - 3\vec{v}$**

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b) $0 \cdot \vec{v} = (0, 0, 0)$

c) $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e) $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) -3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

2. **Sean los vectores $\vec{x}(1, -5, 2)$, $\vec{y}(3, 4, -1)$, $\vec{z}(6, 3, -5)$, $\vec{w}(24, -26, -6)$. Halla a, b, c para que se cumpla:**

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$$

$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$

$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$

$$\left.\begin{aligned} a + 3b + 6c &= 24 \\ -5a + 4b + 3c &= -26 \\ 2a - b - 5c &= -6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2;$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución: $a = 6$, $b = -2$, $c = 4$, es decir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

Página 139

1. Respecto de una base ortonormal, las coordenadas de tres vectores son $\vec{u}(3, -1, 5)$, $\vec{v}(4, 7, 11)$, $\vec{w}(-2, k, 3)$.

a) Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Halla k para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -1, 5) \cdot (4, 7, 11) = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 + 5 \cdot 11 = 12 - 7 + 55 = 60$

b) Como $\vec{v} \neq 0$ y $\vec{w} \neq 0$, son perpendiculares si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 4 \cdot (-2) + 7 \cdot k + 11 \cdot 3 = -8 + 7k + 33 = 7k + 25 = 0 \rightarrow k = -\dfrac{25}{7}$

Página 141

1. Dados los vectores $\vec{u}(5, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, 2, -2)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. (Segmento y vector).

e) ¿Cuánto tiene que valer x para que el vector $(7, 2, x)$ sea perpendicular a $\vec{u}$?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0{,}669 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 132°\ 1'\ 26''$

d) *Segmento proyección de* $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{3} = -3{,}67$

Significa que el vector proyección de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ tiene módulo 3,67 y sentido contrario al de $\vec{v}$.

Vector proyección de $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,\vec{v} = \dfrac{-11}{9}\,(-1, 2, -2)$

Segmento proyección de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2{,}008$

Vector proyección de $\vec{v}$ *sobre* $\vec{u} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u} = \dfrac{-11}{30}\,(5, -1, 2)$

e) $(5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-33}{2}$

2. Obtén tres vectores perpendiculares a $\vec{v}$ que no sean paralelos entre sí:

$\vec{v}(3, 2, 7)$

Un vector, $\vec{u}\,(x, y, z)$, es perpendicular a $\vec{v}(3, 2, 7)$ si: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Por ejemplo: (0, –7, 2); (–7, 0, 3); (–2, 3, 0)

3. Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados:

$\vec{u}(5, -1, 2)$ $\quad$ $\vec{v}(-1, 2, -2)$

Queremos hallar las coordenadas de un vector $\vec{w}(x, y, z)$ que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} \perp \vec{u} \;\Rightarrow\; (5, -1, 2) \cdot (x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; (-1, 2, -2) \cdot (x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones proporcionales. Una de ellas es $x = -2$, $y = 8$, $z = 9$.

Es decir, el vector buscado puede ser (–2, 8, 9) o cualquier otro paralelo a él.

Página 144

1. Halla el producto vectorial de $\vec{u}\,(3, 7, -6)$ y $\vec{v}\,(4, 1, -2)$.

$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$

2. Halla un vector perpendicular a $\vec{u}\,(3, 7, -6)$ y a $\vec{v}\,(4, 1, -2)$.

$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$ o cualquier vector proporcional a él.

3. Halla el área del triángulo determinado por los vectores:

$$\vec{u}(3, 7, -6) \text{ y } \vec{v}(4, 1, -2)$$

Área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| = \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1\,013}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1\,013}}{2} \approx 15{,}91 \text{ u}^2$$

Página 145

1. Halla el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{w}(0, 6, 1)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \quad \rightarrow \quad \text{Volumen} = 53 \text{ u}^3$$

2. Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{z}(1, 14, x)$ sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

Página 149

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Dependencia lineal

1 Dados los vectores $\vec{u}(3, 3, 2)$, $\vec{v}(5, -2, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 0)$:

a) Halla los vectores $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$.

b) Calcula a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

a) $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3, 3, 2) - 2(5, -2, 1) + 3(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$

$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -2(3, 3, 2) + (5, -2, 1) - 4(1, -1, 0) = (-5, -4, -3)$

b) $(3, 3, 2) = a(5, -2, 1) + b(1, -1, 0) = (5a + b, -2a - b, a)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 5a + b \\ 3 = -2a - b \\ 2 = a \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} b = -7 \\ b = -7 \\ a = 2 \end{array}\right\} \quad \textit{Solución: } a = 2,\ b = -7, \text{ es decir: } \vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}.$$

2 Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3, -1, 0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1, 2, -1)$ y $\vec{v}(2, -3, 5)$. ¿Son linealmente independientes $\vec{x}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \rightarrow \quad (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = a + 2b \\ -1 = 2a - 3b \\ 0 = -a + 5b \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $|A'| = 28 \neq 0$, el sistema es *incompatible*.

Luego no es posible expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Como $ran\,(A') = 3$, los tres vectores son linealmente independientes.

3 Comprueba que cualquiera de los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$, $\vec{c}(1, 0, 1)$ puede expresarse como C.L. de los otros dos.

$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \quad \rightarrow \quad (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2x + y \\ 2 = x \\ 3 = 3x + y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = -3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{array}\right\} \quad \text{Por tanto: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

De aquí, también obtenemos que: $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

s4 **Determina m y n para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:**

a) $\vec{u}(m, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 3, m)$, $\vec{w}(4, 6, -4)$

b) $\vec{u}(3, 2, 5)$, $\vec{v}(2, 4, 7)$, $\vec{w}(1, -1, n)$

a) $\begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6m^2 - 24m - 24 = -6(m^2 + 4m + 4) = -6(m + 2)^2 = 0 \rightarrow m = -2$

Si $m = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 8n + 5 = 0 \rightarrow n = \frac{-5}{8}$

Si $n = \frac{-5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

s5 **¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?:**

$\boldsymbol{A} = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$

$\boldsymbol{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0,1)\}$

$\boldsymbol{C} = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$

$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$

Como $(2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1)$, los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no son una base.

$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Al ser cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, son dependientes, luego no son una base.

$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$

$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow$ Los vectores son linealmente independientes.

Un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes es una **base** de $\mathbb{R}^3$.

s6 **¿Para qué valores de a el conjunto de vectores $S = \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)\}$ es una base?**

Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$, formarán base cuando sean linealmente independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Por tanto, S es una base cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Producto escalar

7 **En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1, 2, 2)$ y $\vec{b}(-4, 5, -3)$. Calcula:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

c) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

d) El vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$

c) Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \ \rightarrow \ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$

d) *Vector proyeccción de* $\vec{b}$ *sobre* $\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ (vector cero)

8 **Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$ halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:**

a) Paralelos.

b) Ortogonales.

$\vec{a}(1, m, 1)$; $\quad \vec{b}(-2, 4, m)$

a) $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{4}{m} = \dfrac{m}{1} \ \rightarrow \ m = -2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \ \rightarrow \ m = \dfrac{2}{5}$

9 **Halla el vector proyección del vector $\vec{u}(3, 1, 2)$ sobre el vector $\vec{v}(1, -1, 2)$.**

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\frac{(3, 1, 2) \cdot (1, -1, 2)}{|(1, -1, 2)|^2}(1, -1, 2) = \frac{3 - 1 + 4}{1^2 + 1^2 + 2^2}(1, -1, 2) = \frac{6}{6}(1, -1, 2) = (1, -1, 2)$$

La proyección es el propio vector $\vec{v}$.

Razonadamente:

Longitud de la proyección:

$$|\vec{u}|\, cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}\ \frac{(3, 1, 2) \cdot (1, -1, 2)}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}\ \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{3 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

El vector proyección se obtiene multiplicando su longitud por un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v}$: $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\sqrt{6} \cdot \frac{(1, -1, 2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} (1, -1, 2) = (1, -1, 2)$$

10 **¿Son $\vec{a}(1, 2, 3)$ y $\vec{b}(2, -2, 1)$ ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0 \quad \to \quad$ no son ortogonales.

Si llamamos α al ángulo que forman, entonces:

$$cos\ \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}\,\sqrt{9}} \approx 0{,}089 \quad \to \quad \alpha = 84°\ 53'\ 20''$$

11 **Calcula m para que el vector $\vec{a}(1, 3, m)$ sea ortogonal al vector $\vec{b}(1, -2, 3)$.**

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \to \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, m) \cdot (1, -2, 3) = 1 - 6 + 3m = 3m - 5 = 0 \quad \to \quad m = \frac{5}{3}$$

12 **Comprueba que el vector $\vec{u}(1/2, 1/2, 0)$ no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$.**

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \quad \to \vec{u} \text{ no es unitario.}$$

Un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$ sería:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right). \text{ También podría ser } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Producto vectorial

13 **Dados $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, comprueba que los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos, y halla su módulo.**

$\vec{u}(2, -1, 1);\ \ \vec{v}(-1, 3, 2)$

$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5);\ \ \vec{v} \times \vec{u} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$

14 **Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}(7, -1, 2)$ y $\vec{b}(1, 4, -2)$.**

$\text{Área} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(-6, 16, 29)| = \sqrt{(-6)^2 + 16^2 + 29^2} = \sqrt{1\,133} \approx 33{,}66\ u^2$

15 **Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, 3, 1)$ y a $\vec{v}(-1, 3, 0)$ y que sea unitario.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$

Luego el vector que buscamos es: $\left(\dfrac{-3}{\sqrt{91}}, \dfrac{-1}{\sqrt{91}}, \dfrac{9}{\sqrt{91}}\right)$

16 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1, -1, 0)$ y $\vec{v}(2, 0, 1)$ cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.**

Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 2)$$

Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ es:

$$\frac{1}{|(-1, -1, 2)|}(-1, -1, 2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$$

Para que el módulo sea $\sqrt{24}$:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2) = 2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$$

El vector $(-2, -2, 4)$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, y su módulo es $\sqrt{24}$.

También cumple estas condiciones su opuesto: $(2, 2, -4)$.

Producto mixto

17 **Halla el producto mixto de los tres vectores que aparecen en cada caso:**

a) $\vec{u}(1, -3, 2)$, $\vec{v}(1, 0, -1)$, $\vec{w}(2, 3, 0)$

b) $\vec{u}(3, 2, 1)$, $\vec{v}(1, -2, 0)$, $\vec{w}(-4, 1, 1)$

c) $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(3, 0, 2)$, $\vec{w}(-1, 4, -4)$

Calcula, en cada apartado, el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$

El paralelepípedo tiene un volumen de 15 u^3.

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$

El paralelepípedo tiene un volumen de 15 u^3.

c) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Los tres vectores no forman un paralelepípedo (los vectores son coplanarios).

s18 **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-2, 1, 0)$ y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.**

Justifica por qué el resultado es $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$.

- $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$

  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow$ Volumen $= 70$ u^3

- $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$

  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}|^2$

19 **Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vectores siguientes:**

$$\vec{a}(3, -1, 1), \ \vec{b}(1, 7, 2), \ \vec{c}(2, 1, -4)$$

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \rightarrow$ Volumen $= \frac{1}{6} \cdot 111 = 18{,}5$u^3

s20 **Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ y $\vec{w}(-4, 5, -1)$ sean coplanarios.**

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$

Página 150

PARA RESOLVER

s21 **Prueba que los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$ son linealmente independientes cualesquiera que sean a, b y c.**

$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para cualquier valor de a, b, c.

Por tanto, son linealmente independientes.

22 **Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, -1)$ y $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprueba que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.**

$\vec{a}(1, 2, -1)$

$\vec{b}(1, 3, 0)$

$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$

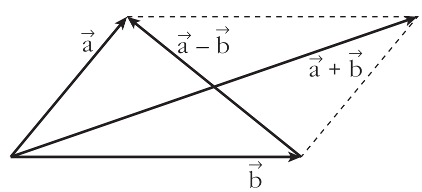
$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0$. Por tanto, $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, -1, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0$. Por tanto, $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

Hasta aquí, la comprobación rutinaria, numérica. Más interesante es la siguiente reflexión:



Los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto, están en el plano definido por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Y el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a dicho plano.

Así, $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son perpendiculares a $\vec{a} \times \vec{b}$.

23 **a) Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}(3, -2, 1)$ y $\vec{v}(4, 3, -6)$ es un rectángulo.**

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$. Luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array}\right\}$ Área $= \sqrt{854} \approx 29{,}22 \text{ u}^2$

Por otra parte:

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29{,}22 \text{ u}^2$

24 **Dado el vector $\vec{v}(-2, 2, -4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores:**

a) Unitario y perpendicular a $\vec{v}$. **b) Paralelos a $\vec{v}$ y de módulo 6.**

a) $\vec{u}(x, y, z)$ ha de cumplir $-2x + 2y - 4z = 0$ y ser unitario.

Por ejemplo, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

b) $(-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -2\sqrt{6})$ y $(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$

25 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(2, 3, -1)$ y a $\vec{v}(1, 4, 2)$ cuya tercera componente sea 1.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) \ // \ (2, -1, 1)$

El vector que buscamos es $(2, -1, 1)$.

s26 **Dados los vectores $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{u}_3$ sea ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?**

$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$

Para que $\vec{u}_3$ sea perpendicular a $\vec{v}$ ha de ser:

$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0$, es decir, $a = b$.

s27 **Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ y $\vec{w}(1, -1, 1)$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.**

$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$

Un vector ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$ es de la forma $(5k, 2k, -3k)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \ \rightarrow \ k = \frac{1}{2}$$

Por tanto: $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

s28 **a) Obtén λ para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:**

$\vec{u}_1 = (3, 2, 5)$, $\vec{u}_2 = (2, 4, 7)$, $\vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$

b) Para $\lambda = 3$, expresa el vector $\vec{v} = (7, 11, 14)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = \frac{-27}{8}$

b) Para $\lambda = 3$, tenemos que: $\vec{u}_1(3, 2, 5)$; $\vec{u}_2(2, 4, 7)$; $\vec{u}_3(1, -3, 3)$

Expresamos $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$:

$(7, 11, 14) = a(3, 2, 5) + b(2, 4, 7) + c(1, -3, 3)$

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 7 \\ 2a + 4b - 3c &= 11 \\ 5a + 7b + 3c &= 14 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 51$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & -3 \\ 14 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{102}{51} = 2; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 11 & -3 \\ 5 & 14 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{51}{51} = 1;$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 11 \\ 5 & 7 & 14 \end{vmatrix}}{51} = \frac{-51}{51} = -1$$

Por tanto: $\vec{v} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$

s29 **a) Determina los valores de a para los que resultan linealmente dependientes los vectores $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ y $(a, a, -2)$.**

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

a) $\begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a-1)(a+2)^2 = 0 \;<\; \begin{matrix} a = 1 \\ a = -2 \end{matrix}$

Para $a = 1$ y para $a = -2$, los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para $a = 1$, queda: $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$$

Para $a = -2$, queda: $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$$

s30 **Dados los vectores $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(3, 1, -1)$, halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a $\vec{u}$, sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Sea $\vec{w}(x, y, z)$ un vector tal que:

1.°) Es perpendicular a $\vec{u}$, es decir:

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z = 0$$

2.°) Es coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -x + 7y + 4z = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} x - y + 2z = 0 \\ -x + 7y + 4z = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x + 2z = y \\ -x + 4z = -7y \end{matrix}\right\} \quad \text{Sumando:} \quad \begin{matrix} 6z = -6y \;\rightarrow\; z = -y \\ x = y - 2z = y + 2y = 3y \end{matrix}$$

Soluciones: $(3\lambda, \lambda, -\lambda) \quad \lambda \neq 0$

s31 **Dados los vectores $\vec{u}(a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v}(a, 1, a)$ y $\vec{w}(1, a, 1)$, se pide:**

a) Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}(3, 3, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$.

c) Justifica razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

b) Para $a = 2$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}(3, 3, 0)$, depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para $a = 2$, tenemos que: $\vec{u}(2, 3, 4)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$, $\vec{w}(1, 2, 1)$

$(3, 3, 0) = x(2, 3, 4) + y(2, 1, 2) + z(1, 2, 1)$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 3 \\ 3x + y + 2z &= 3 \\ 4x + 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Por tanto:

$$\vec{c} = \frac{-3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 0$. Está probado en el apartado a).

s32 **a) Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto $S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$.**

b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de S?

c) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S.

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \quad ran\ (M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en S.

b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma: $\vec{u} = (k, k, k)$ con $k \neq 0$. Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de S como sigue:

$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$

c) Sea $\vec{v}(1, 1, x)$ el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S, tenemos que:

$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$

$$\left.\begin{aligned} 2b &= 1 \\ 2a &= 1 \\ a - 3b &= x \end{aligned}\right\} \text{ Debe tener solución: } \quad b = \frac{1}{2}, \ a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \ \rightarrow \ x = \frac{-2}{2} = -1 \ \rightarrow \ x = -1$$

Por tanto, el vector es $\vec{v}(1, 1, -1)$.

s33 **Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$ y tal que determine con el vector $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área $25\ u^2$.**

Si $\vec{u}$ es de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$, será de la forma $\vec{u}(x, -2x, 3x)$, con $x \neq 0$.

Para que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área $25\ u^2$, ha de ser:

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x|\sqrt{125} = 25;$$

es decir: $125x^2 = 625 \ \rightarrow \ x^2 = 5 \ \rightarrow \ x = \pm\sqrt{5}$

Por tanto, hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$

s34 **Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}(2, -1, 1)$ y $\vec{b}(1, 0, 3)$ y ortogonal a $\vec{c}$ (2, 3, 0).**

Sea $\vec{v}(x, y, z)$ tal que:

1.°) es coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$$

2.°) es ortogonal a $\vec{c}$, es decir: $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y \qquad = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -3x + z = 5y \\ 2x \qquad = -3y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 5y + 3x = 5y - \dfrac{9}{2}y = \dfrac{1}{2}y \\ x = -\dfrac{3}{2}y \end{array}$$

Soluciones: $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ $(\lambda \neq 0)$

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para $\lambda = 1$, tenemos el vector $(-3, 2, 1)$.

s35 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$, con $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$

$= 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot cos\,60° = 16 + 4 + 8 = 28 \quad \to \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Por otra parte:

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$

$= 16 + 4 - 8 = 12 \quad \to \quad |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

s36 **De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$. Halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Así:

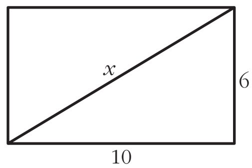
$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \quad \to \quad |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11{,}66$

$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \quad \to$

$\to \quad |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11{,}66$

Observación: Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$. En este caso, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 10^2 + 6^2 \;\rightarrow\; x^2 = 136 \;\rightarrow\; x = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

s37 **Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ y $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.**

Puesto que $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, empecemos desarrollando esta expresión:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

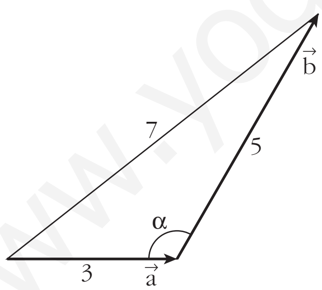
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Sustituimos $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ por sus valores, y $\vec{a} \cdot \vec{b}$ por su expresión, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

$$cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$$

Veamos otra forma de resolverlo, basada en la resolución de triángulos aprendida en 1.° de Bachillerato:

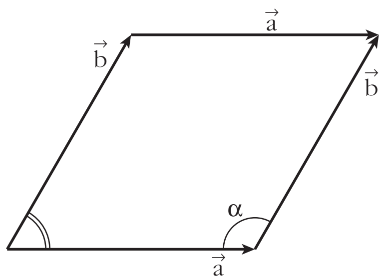


Aplicamos el teorema del coseno a este triángulo:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5cos\,\alpha \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; cos\,\alpha = \frac{7^2 - 3^2 - 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \alpha = 120°$$

Observamos que el ángulo buscado es el suplementario de α:



$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180° - \alpha = 180° - 120° = 60°$$

38 **De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que cumplen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$, siendo $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, 3, -1)$. Halla el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}\\ 2\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{b}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{r}3\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{a}\\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}\\ \hline 5\vec{u} \qquad = 3\vec{a} + \vec{b}\end{array} \qquad \begin{array}{r}2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a}\\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = -\vec{b}\\ \hline 5\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}\end{array}$$

El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con el ángulo formado por $\vec{u'} = 5\vec{u}$ y $\vec{v'} = 5\vec{v}$:

$\vec{u'} = (7, 0, -1)$; $\vec{v'} = (3, -5, 1)$

$\vec{u'} \cdot \vec{v'} = 20$

$|\vec{u'}| = \sqrt{50}$; $|\vec{v'}| = \sqrt{35}$

$$cos\,(\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}}) = \frac{\vec{u'} \cdot \vec{v'}}{|\vec{u'}|\,|\vec{v'}|} = \frac{20}{\sqrt{50}\,\sqrt{35}} = 0{,}4781$$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}}) = 61°\ 26'\ 21''$

39 **Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumplen las siguientes condiciones:**

$$|\vec{u}| = 5,\ |\vec{v}| = 4,\ |\vec{w}| = 7,\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

☛ ***Desarrolla el siguiente producto escalar:***

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

Desarrollando el producto escalar indicado:

$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{w}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$

Por otra parte: $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$

Así: $5^2 + 4^2 + 7^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}) = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{90}{2} = -45$$

Página 151

CUESTIONES TEÓRICAS

40 **Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿podemos asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?**

No. Por ejemplo, si $\vec{u}(3, -2, 0)$, $\vec{v}(5, 1, 0)$ y $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13\\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13\end{array}\right\} \ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

41 **Prueba, utilizando el producto escalar, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$ entonces $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \;\to\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \perp \vec{c} \;\to\; \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

Para demostrar que $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$

Por tanto, $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

42 **Demuestra que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no nulos que tienen el mismo módulo, entonces $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son ortogonales.**

Supongamos que $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$, entonces:

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ (pues $|\vec{a}| = |\vec{b}|$)

Observación: Si recordamos que $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, hemos probado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

43 **a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?**

b) Si dos vectores verifican $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$, ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2 \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -3 \;\to$

$\to\; \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\dfrac{3}{2} > 1$ Imposible.

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

b) Si $|\vec{u}||\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \;\to\; |\vec{u}||\vec{v}| = \begin{cases} +|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \\ -|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \end{cases} \;\to$

$$\to \begin{cases} |\vec{u}||\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \;\to\; \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \;\to\; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0° \\ |\vec{u}||\vec{v}| = -|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \;\to\; \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \;\to\; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180° \end{cases}$$

Por tanto, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

44 **Justifica por qué el producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ es igual a 0 cualesquiera que sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$.**

Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ son coplanarios; luego el volumen del paralelepípedo determinado por ellos (que coincide con su producto mixto en valor absoluto) es cero.

45 **Dados los vectores $\vec{a}(1, -2, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 1)$, $\vec{c}(-2, 0, 1)$, comprueba que:**

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, 1, 2) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-5, 8, 7) + (-2, -7, -4) = (-7, 1, 3)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-5, 8, 7) \times (-2, 0, 1) = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, -5, 2) = (11, 1, -3)$

46 **Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, ¿es $\vec{b} = \vec{c}$ necesariamente? Pon ejemplos.**

No. Por ejemplo, si consideramos $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 4, 6)$ y $\vec{c}(3, 6, 9)$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \text{ pero } \vec{b} \neq \vec{c}.$$

s47 **Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:**

$$[\vec{a} + \vec{c},\ \vec{a} - \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}], \quad [\vec{a} + \vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a} + \vec{b}], \quad [\vec{a} - \vec{c},\ \vec{c} - \vec{b},\ \vec{b} - \vec{a}]$$

Puesto que $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$ son L.I., los tomamos como base. Por tanto:

$\vec{a} + \vec{c} = (1, 0, 1)$; $\quad \vec{a} - \vec{c} = (1, 0, -1)$; $\quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1, 1, 1)$

$$[\vec{a} + \vec{c},\ \vec{a} - \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Son L.I.}$$

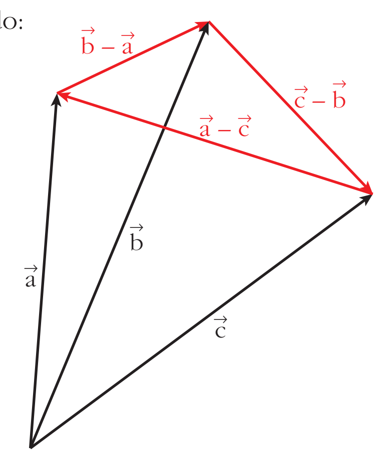
Análogamente:

$$[\vec{a} + \vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a} + \vec{b}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Son L.I.}$$

$$[\vec{a} - \vec{c},\ \vec{c} - \vec{b},\ \vec{b} - \vec{a}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \text{ Son L.D.}$$

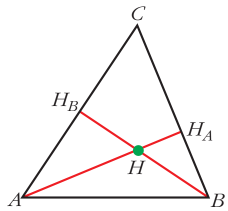
Interpretación geométrica de este último resultado:

Los vectores $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$ son los lados del triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ cuando los situamos con origen común. Por tanto, $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{b}$ y $\vec{b} - \vec{a}$ son coplanarios.



PARA PROFUNDIZAR

48 **“Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto”.**



Para demostarlo, llamamos H al punto en que se cortan dos alturas, AH_A y BH_B. Da los pasos que se indican a continuación:

a) Justifica que $\begin{cases} \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0 \\ \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0 \end{cases}$

b) De las igualdades anteriores se llega a:

$$\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$$

y de aquí se concluye que $\vec{HC} \perp AB$ y, por tanto, que las tres alturas se cortan en H. (Justifica las afirmaciones anteriores).

a) $\vec{HC} - \vec{HB} = \vec{BC}$; y, como AH_A es la altura correspondiente al lado BC, entonces:

$$\vec{BC} \perp AH_A \;\rightarrow\; \vec{BC} \perp \vec{HA} \;\rightarrow\; \vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0 \;\rightarrow\; \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0$$

Análogamente, como $\vec{HC} - \vec{HA} = \vec{AC}$, tenemos que: $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

b) $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = \vec{HC} \cdot \vec{HB} - \vec{HC} \cdot \vec{HA} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HC} \overset{(1)}{=}$

$$= \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) \overset{(2)}{=} 0$$

(1) $\vec{HA} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = 0 \;\rightarrow\; \vec{HA} \cdot \vec{HC} = \vec{HA} \cdot \vec{HB}$

(2) $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

Por tanto, si $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$, como $\vec{HB} - \vec{HA} = \vec{AB}$, entonces $\vec{HC} \perp \vec{AB}$; luego H también pertenece a la altura correspondiente al vértice C. Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto, H.

Página 151

AUTOEVALUACIÓN

1. a) Halla el valor de m para el cual $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(0, 1, 2)$ y $\vec{w}(-1, m, 3)$ son linealmente dependientes.

b) Obtén, en este caso, una relación de dependencia entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) Para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean L.D., el rango de la matriz que forman ha de ser menor que 3. Así:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & m & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M| = -2 - 2m = 0 \ \rightarrow \ m = -1$$

Si $m = -1$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son L.D.

b) Sea $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \ \rightarrow \ (1, 2, -1) = \alpha(0, 1, 2) + \beta(-1, -1, 3) \ \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 = -\beta \\ 2 = \alpha - \beta \\ -1 = 2\alpha + 3\beta \end{array}\right\} \begin{array}{l} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{array}$$

Así, $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$.

2. $\vec{u}(3, -2, \sqrt{3})$, $\vec{v}(4, -2, -4)$. Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ y el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

- $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 4 + 3} = \sqrt{16} = 4$
- $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$
- $cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + (-4) \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 6} =$

$$= \frac{12 + 4 - 4\sqrt{3}}{24} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{24} = \frac{4 - \sqrt{3}}{6} = 0{,}3780$$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\ cos\ (0{,}3780) = 67°\ 47'\ 26''$

- Vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u} = \frac{16 - 4\sqrt{3}}{16}(4, -2, -4) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)(4, -2, -4)$$

3. **Dados los vectores $\vec{u}(3, -4, 0)$ y $\vec{v}(m, 0, 7)$:**

a) Halla m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Halla un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

c) Obtén tres vectores unitarios. $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$, que tengan, respectivamente, la misma dirección que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

d) ¿Forman $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{w}'$ una base ortonormal?

a) Como $|\vec{u}| \neq 0$ y $|\vec{v}| \neq 0$, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3m + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 3m = 0 \ \rightarrow \ m = 0$

Así, $\vec{v}(0, 0, 7)$.

b) $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

$\vec{w} = (3, -4, 0) \times (0, 0, 7) = (-28, -21, 0)$

c) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$|\vec{v}| = 7$

$|\vec{w}| = 7\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = 7\sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$

Sean:

$\vec{u}' = \dfrac{1}{5}(3, -4, 0)$ $\quad \vec{u}'\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{-4}{5}, 0\right) \,//\, \vec{u}$

$\vec{v}' = \dfrac{1}{7}(0, 0, 7)$ $\quad \vec{v}'(0, 0, 1) \,//\, \vec{v}$

$\vec{w}' = \dfrac{1}{35}(-28, -21, 0)$ $\quad \vec{w}'\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}, 0\right) \,//\, \vec{w}$

$\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$ tienen módulo 1.

d) $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ no son coplanarios al ser perpendiculares entre sí. Por tanto, forman una base.

Por ser perpendiculares entre sí y, además, unitarios, la base $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ es ortonormal.

4. **Halla el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{u}(5, -1, 3)$ y $\vec{v}(4, 0, 7)$.**

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}|(-7, -23, 4)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2 + (-23)^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{594} = 12{,}2 \text{ u}^2$$

5. **Halla el volumen del tetraedro determinado por los vectores:**

$\vec{u}(5, -1, 3)$, $\vec{v}(4, 0, 7)$, $\vec{w}(-2, 6, 3)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \text{valor absoluto de} \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{6}\,|-112| = \frac{56}{3} = 18{,}7 \text{ u}^3$$

6. **Halla un vector de módulo 10 que sea perpendicular a (3, –1, 0) y forme un ángulo de 60° con (0, 0, 1).**

Llamamos (x, y, z) al vector buscado:

- Su módulo es 10 $\to$ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 10 \to x^2 + y^2 + z^2 = 100$
- Es perpendicular a (3, –1, 0) $\to$ $3x - y = 0$
- Forma un ángulo de 60° con (0, 0, 1) $\to$

$$\to \frac{(0, 0, 1) \cdot (x, y, z)}{|(0, 0, 1)| \cdot |(x, y, z)|} = \cos 60° \to \frac{z}{1 \cdot 10} = \frac{1}{2} \to 2z = 10 \to z = 5$$

Así:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ 3x - y = 0 \\ z = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ y = 3x \\ z = 5 \end{array}$$

Sustituyendo la 3.ª y 2.ª ecuación en la 1.ª:

$$x^2 + 9x^2 + 25 = 100 \to 10x^2 = 75 \to x = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$$

Soluciones: $\left(\sqrt{\frac{15}{2}}, 3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{15}{2}}, -3\sqrt{\frac{15}{2}}, 5\right)$

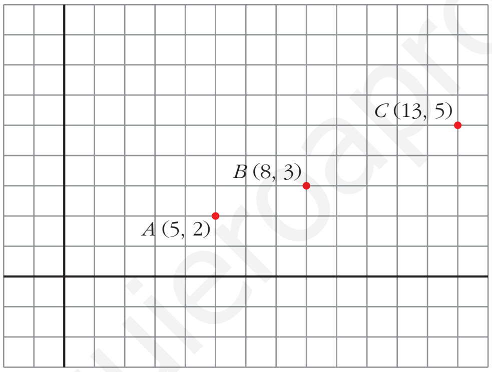
6 PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

Página 153

REFLEXIONA Y RESUELVE

Puntos alineados en el plano

■ **Comprueba que los puntos $A(5, 2)$, $B(8, 3)$ y $C(13, 5)$ no están alineados.**



$\overrightarrow{AB} = (3, 1)$; $\overrightarrow{BC} = (5, 2)$

No tienen las coordenadas proporcionales; luego no están alineados.

■ **Halla el valor de n para que el punto $D(9, n)$ esté alineado con los puntos A y B del gráfico anterior.**

$\overrightarrow{AB} = (3, 1)$; $\overrightarrow{BD} = (1, n - 3)$

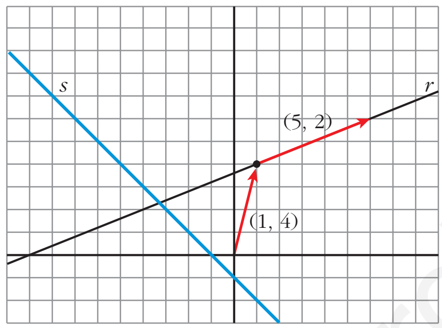
$\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BD} \rightarrow (3, 1) = k(1, n - 3) \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} k = 3 \\ 1 = k(n - 3) \end{array}\right\} \rightarrow 1 = 3(n - 3) \rightarrow n - 3 = \frac{1}{3} \rightarrow n = \frac{10}{3}$$

Rectas en el plano

- **Para hallar las ecuaciones paramétricas de la recta *r* que aparece a continuación, toma el vector $\vec{p}(1, 4)$ para situarte en ella y el vector $\vec{d}(5, 2)$ para deslizarte por ella.**

  Halla también su ecuación implícita.



Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

Ecuación implícita:

$$\begin{array}{rcl} -2x & = & -2 - 10\lambda \\ 5y & = & 20 + 10\lambda \\ \hline -2x + 5y & = & 18 \end{array} \quad \to \quad 2x - 5y + 18 = 0$$

- **Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta *s*.**

  La recta *s* pasa por el punto (–1, 0) y tiene la dirección del vector $\vec{d}(1, -1)$.

  Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$$

  Ecuación implícita:

  Sumando las dos anteriores: $x + y = -1 \quad \to \quad x + y + 1 = 0$

Página 154

1. Representa los puntos siguientes:

***P*(5, 2, 3), *Q*(3, –2, 5), *R*(1, 4, 0), *S*(0, 0, 4) y *T*(0, 6, 3).**

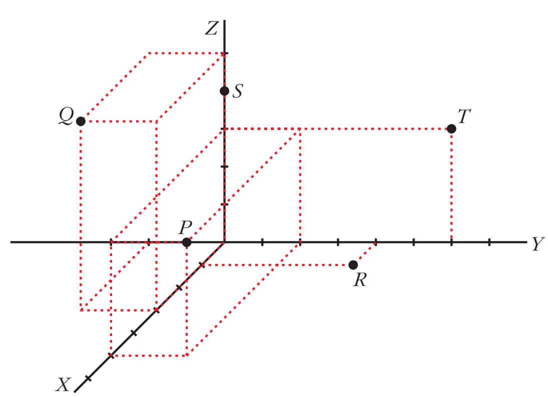
P(5, 2, 3)

Q(3, –2, 5)

R(1, 4, 0)

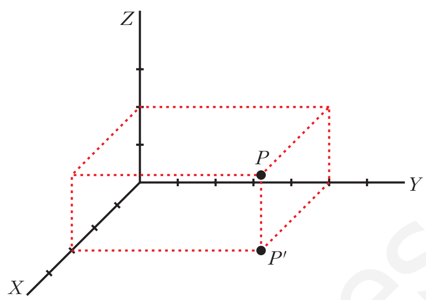
S(0, 0, 4)

T(0, 6, 3)



2. **Sitúa sobre unos ejes coordenados un punto P. Proyéctalo, P', sobre el plano XY. Sigue el proceso hasta determinar las coordenadas de P. (Observa que el único paso no determinado es decidir la situación de P').**

$P(3, 5, 2)$



Página 156

1. **Calcula m y n para que los puntos $P(7, -1, m)$, $Q(8, 6, 3)$ y $R(10, n, 9)$ estén alineados.**

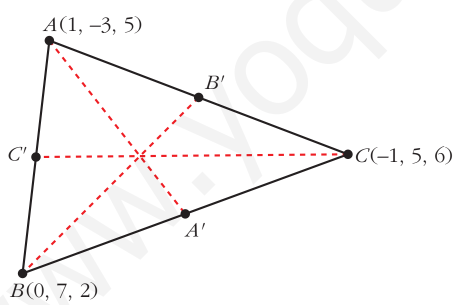
$\overrightarrow{PQ}(1, 7, 3-m)$, $\overrightarrow{QR} = (2, n-6, 6)$

P, Q, R están alineados $\to \overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{QR} \to \dfrac{2}{1} = \dfrac{n-6}{7} = \dfrac{6}{3-m}$

$\dfrac{n-6}{7} = 2 \to n = 20 \qquad \dfrac{6}{3-m} = 2 \to m = 0$

Luego $m = 0$ y $n = 20$.

2. **Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(1, -3, 5)$, $B(0, 7, 2)$ y $C(-1, 5, 6)$.**



$$C' = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{-3+7}{2}, \frac{5+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}\right)$$

$$A' = \left(\frac{0-1}{2}, \frac{7+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 6, 4\right)$$

$$B' = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{-3+5}{2}, \frac{5+6}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{11}{2}\right)$$

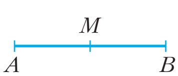
3. **Dados los puntos $A(-3, 5, 11)$ y $B(3, 5, -1)$:**

a) Halla el punto medio del segmento AB.

b) Halla el simétrico de B respecto de A.

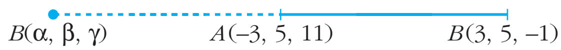
c) Obtén un punto M de AB tal que $\overline{AM} = 2\overline{MB}$.

d) Obtén un punto N de AB tal que $\overline{NB} = 3\overline{AN}$.

a) 

$$M_{AB} = \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{5+5}{2}, \frac{11-1}{2}\right) = (0, 5, 5)$$

b) Sea $B'(\alpha, \beta, \gamma)$ el simétrico de B respecto de A. Así:



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3+\alpha}{2} = -3 \;\rightarrow\; \alpha = -9 \\[2mm] \dfrac{5+\beta}{2} = 5 \;\rightarrow\; \beta = 5 \\[2mm] \dfrac{-1+\gamma}{2} = 11 \;\rightarrow\; \gamma = 23 \end{array}\right\} \; B'(-9, 5, 23)$$

c) Sea $M(x, y, z)$:

$$(x+3, y-5, z-11) = 2(3-x, 5-y, -1-z) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3 = \;\; 6-2x \\ y-5 = 10-2y \\ z-11 = -2-2z \end{array}\right\} \rightarrow\; x = 1, \;\; y = 5, \;\; z = 3 \;\rightarrow\; M(1, 5, 3)$$

d) Sea $N(x, y, z)$:

$$(3-x, 5-y, -1-z) = 3(x+3, y-5, z-11) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 3-x = 3x+9 \\ 5-y = 3y-15 \\ -1-z = 3z-33 \end{array}\right\} \rightarrow\; x = \frac{-3}{2}, \;\; y = 5, \;\; z = 8 \;\rightarrow\; N\left(\frac{-3}{2}, 5, 8\right)$$

Página 157

1. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por:

a) *A*(2, 0, 5) y *B*(–1, 4, 6)

b) *M*(5, 1, 7) y *N*(9, –3, –1)

c) *P*(1, 0, –3) y *Q*(1, 4, –3)

d) *R*(0, 2, 3) y *S*(0, 2, 1)

a) Vector dirección: $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left\{\begin{array}{l} x = 2-3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 5+\lambda \end{array}\right.$

b) Vector dirección: $\overrightarrow{MN} = (4, -4, -8) \parallel (1, -1, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases}$

c) Vector dirección: $\overrightarrow{PQ} = (0, 4, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4\lambda \\ z = -3 \end{cases}$

d) Vector dirección: $\overrightarrow{RS} = (0, 0, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

Página 159

2. Obtén las ecuaciones paramétricas, la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por estos puntos: (–5, 3, 7) y (2, –3, 3)

Vector dirección: (2, –3, 3) – (–5, 3, 7) = (7, –6, –4)

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \;\;\,2 + 7\lambda \\ y = -3 - 6\lambda \\ z = \;\;\,3 - 4\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-3}{-4}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y+3}{-6} \;\rightarrow\; -6x + 12 = 7y + 21 \\[2ex] \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{z-3}{-4} \;\rightarrow\; -4x + 8 = 7z - 21 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} 6x + 7y + 9 = 0 \\ 4x + 7z - 29 = 0 \end{cases}$$

3. Localiza seis puntos, además de los dados, de la recta anterior.

Dándole valores a λ, obtenemos:

$\lambda = 1 \rightarrow (9, 9, -1)$ $\qquad$ $\lambda = 4 \rightarrow (30, -27, -13)$

$\lambda = 2 \rightarrow (16, -15, -5)$ $\qquad$ $\lambda = -2 \rightarrow (-12, 9, 11)$

$\lambda = 3 \rightarrow (23, -21, -9)$ $\qquad$ $\lambda = -3 \rightarrow (-19, 15, 15)$

(Para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$, obtenemos los puntos que teníamos).

4. **Comprueba si alguno de los puntos que se dan a continuación pertenecen o no a la recta dada r:**

$A(5, 0, 0)$ $\quad B(3, 3, 4)$ $\quad C(15, -15, 4)$ $\quad D(1, 6, 0)$ $\quad r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = \quad 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$

$A \notin r$, pues $z \neq 4$

$$B: \left.\begin{cases} 5 - 2\lambda = 3 \;\rightarrow\; \lambda = 1 \\ 3\lambda = 3 \;\rightarrow\; \lambda = 1 \\ 4 = 4 \end{cases}\right\} B \in r$$

$$C: \left.\begin{cases} 5 - 2\lambda = 15 \;\rightarrow\; \lambda = -5 \\ 3\lambda = -15 \;\rightarrow\; \lambda = -5 \\ 4 = 4 \end{cases}\right\} C \in r$$

$D \notin r$, pues $z \neq 4$

Página 163

1. **Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en estos apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen:**

a) $\begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -5 + \lambda \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -1 - 6\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

a) $P = (1, 2, -5)$ $\qquad \vec{d}_1 = (-5, 3, 1)$

$Q = (1, 1, 0)$ $\qquad \vec{d}_2 = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = (0, -1, 5)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right);\; |M'| = -5 \;\rightarrow\; ran\,(M') = 3 \;\rightarrow\; \text{Las rectas se cruzan.}$$

M

b) $P = (3, 1, 5)$ $\qquad \vec{d}_1 = (2, -1, 0)$

$Q = (-1, 3, 5)$ $\qquad \vec{d}_2 = (-6, 3, 0)$

$\overrightarrow{PQ} = (-4, 2, 0)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right);\; ran\,(M) = ran\,(M') = 1 \;\rightarrow\; \text{Las dos rectas coinciden.}$$

M

2. **Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en estos apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen:**

a) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 \end{cases}$

a) $P = (0, 0, 0) \qquad \vec{d}_1 = (1, 1, 0)$

$Q = (3, 3, 0) \qquad \vec{d}_2 = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = (3, 3, 0)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc:c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right); \quad ran\ (M) = ran\ (M') = 2 \;\rightarrow\; \text{Las rectas se cortan.}$$

Hallamos el punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = 3 \\ 0 = \mu \end{array}\right\} \text{Se cortan en el punto } (3, 3, 0).$$

b) $P = (3, -2, 1) \qquad \vec{d}_1 = (1, -1, 0)$

$Q = (0, 3, -1) \qquad \vec{d}_2 = (-2, 2, 0)$

$\overrightarrow{PQ} = (-3, 5, -2)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc:c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{matrix} \end{array}\right); \quad ran\ (M) = 1; \quad ran\ (M') = 2 \;\rightarrow\; \text{Las rectas son paralelas.}$$

Página 165

1. **a) Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que pasa por $P(1, 7, -2)$, $Q(4, 5, 0)$ y $R(6, 3, 8)$.**

b) Halla otros tres puntos del plano.

c) Calcula n para que $A(1, n, 5)$ pertenezca al plano.

a) El plano es paralelo a $\overrightarrow{PQ} = (3, -2, 2)$ y a $\overrightarrow{QR} = (2, -2, 8) \,//\, (1, -1, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 4 + 3\lambda + \mu \\ y = 5 - 2\lambda - \mu \\ z = 2\lambda + 4\mu \end{cases}$

Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 3 & 1 \\ y-5 & -2 & -1 \\ z & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ es decir: } 6x + 10y + z - 74 = 0$$

b) $\lambda = 1,\ \mu = 0 \ \rightarrow\ (7, 3, 2);\ \lambda = 0,\ \mu = 1 \ \rightarrow\ (5, 4, 4);\ \lambda = 1,\ \mu = 1 \ \rightarrow\ (8, 2, 6)$

c) Sustituimos en la ecuación implícita:

$$6 \cdot 1 + 10 \cdot n + 5 - 74 = 0 \ \rightarrow\ 6 + 10n + 5 - 74 = 0 \ \rightarrow\ 10n = 63 \ \rightarrow\ n = \frac{63}{10}$$

Página 167

1. Estudia la posición relativa del plano y de la recta:

$$\pi: 2x - y + 3z = 8 \qquad r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte de r y π:

$2(2 + 3\lambda) - (-1 + 3\lambda) + 3(-\lambda) = 8$

$4 + 6\lambda + 1 - 3\lambda - 3\lambda = 8 \ \rightarrow\ 0\lambda = 3 \ \rightarrow$ No tiene solución.

La recta y el plano son paralelos, pues no tienen ningún punto en común.

2. Dados estos tres planos, estudia la posición relativa entre cada dos de ellos:

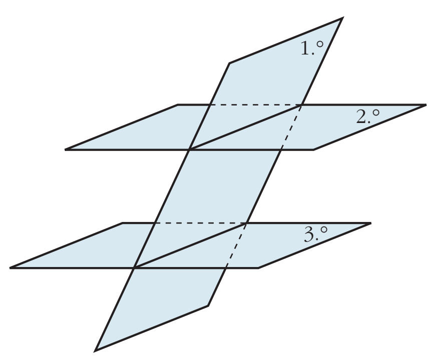
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 8 \\ x + 3y - z &= 5 \\ 2x + 6y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

¿Tienen los tres planos algún punto común?

$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 8 \\ x + 3y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$ Se cortan en una recta.

$\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 5 \\ 2x + 6y - 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$ Son paralelos.

$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 8 \\ 2x + 6y - 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$ Se cortan en una recta.

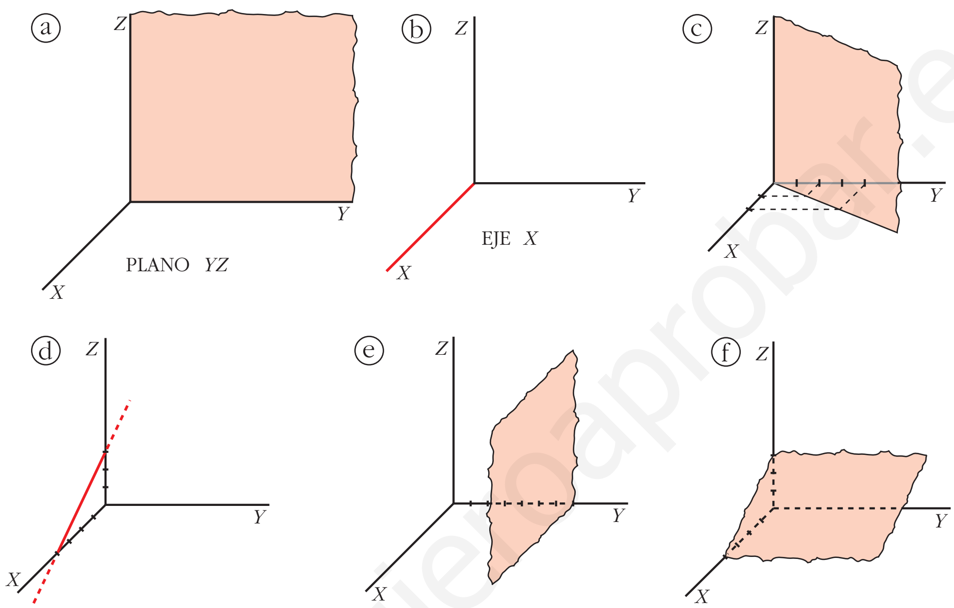


No hay ningún punto común a los tres planos.

Página 169

LENGUAJE MATEMÁTICO

1. Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de las siguientes figuras:



a) x siempre vale 0.

y puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

$$\pi: \ x = 0 \ \rightarrow \ \pi: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

b) x puede tomar cualquier valor.

y siempre vale 0.

z siempre vale 0.

$$\text{Eje } X: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \ \rightarrow \ r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) z puede tomar cualquier valor.

El plano π en su intersección con el plano XY determina la recta r de ecuación:

$r: 2x - y = 0$

Así, en el espacio XYZ:

$$\pi: 2x - y = 0 \;\rightarrow\; \pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

d) Calculamos la ecuación de la recta en el plano XZ:

r pasa por $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (-4, 3)$

$$r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ z = \quad 3\lambda \end{cases} \rightarrow \lambda = \frac{z}{3}$$

$$x = 4 - \frac{4}{3}z$$

r: $3x + 4z = 12$ en el plano XZ.

En el espacio XYZ la recta no toma valores en y, por tanto, $y = 0$. Luego la ecuación de la recta r en el espacio XYZ es:

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4z = 12 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 0 \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

e) x puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

y siempre vale 7.

$$\pi: y = 7 \;\rightarrow\; \pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 \\ z = \mu \end{cases}$$

f) y puede tener cualquier valor.

Calculamos la recta que determina el plano ρ en su intersección con el plano XZ:

r pasa por $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$.

Por el apartado d):

r: $3x + 4z = 12$ en el plano XZ.

Así:

$$\pi: 3x + 4z = 12 \;\rightarrow\; \pi: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = \mu \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

2. Representa las figuras dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $\boldsymbol{z = 4}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{x = \lambda} \\ \boldsymbol{y = \mu} \\ \boldsymbol{z = 4} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \boldsymbol{x = \lambda} \\ \boldsymbol{y = \lambda} \\ \boldsymbol{z = 4} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \boldsymbol{x = \lambda} \\ \boldsymbol{y = 0} \\ \boldsymbol{z = 4} \end{cases}$

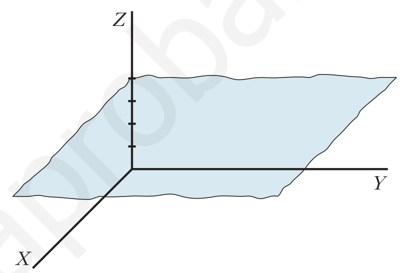
e) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ **g)** $y = 0$ **h)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \tau \end{cases}$ **k)** $x + y + z = 1$ **l)** $\begin{cases} x + y + z \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

¡Atención! Una de ellas representa un punto, y otra, todo el espacio. Hay una que tiene dos parámetros, pero actúan como si solo hubiera uno.

a) $z = 4 \rightarrow z$ siempre vale 4.

x e y pueden tomar cualquier valor.

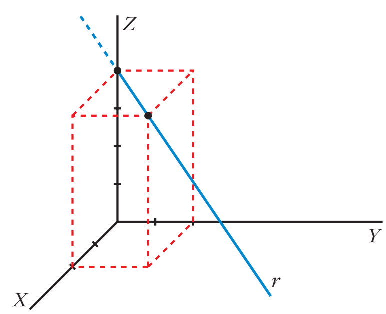


b) $\begin{cases} x = \lambda & \rightarrow & x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = \mu & \rightarrow & y \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ z = 4 & \rightarrow & z \text{ siempre vale 4.} \end{cases}$

Es el mismo plano que el del apartado anterior.

c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}$ x e y siempre toman los mismos valores. $z = 4 \rightarrow z$ siempre vale 4.

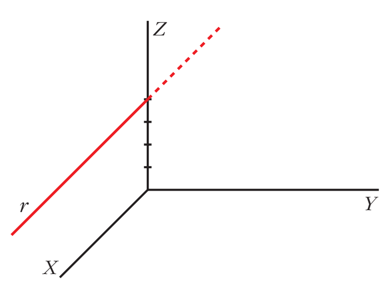
Como solo hay un parámetro, es una recta (paralela al plano XY).



d) $\begin{cases} x = \lambda & \rightarrow & x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = 0 & \rightarrow & y \text{ siempre vale 0.} \\ z = 4 & \rightarrow & z \text{ siempre vale 4.} \end{cases}$

Como solo hay un parámetro, es una recta.

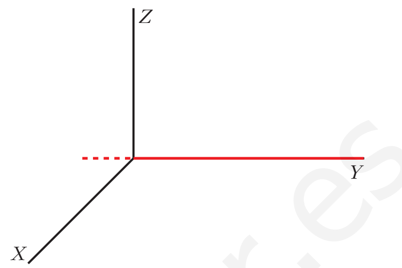
Como $y = 0$ siempre, es una recta del plano XZ.



e) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ Es la ecuación implícita de la recta anterior.

f) $\begin{cases} x = 0 & \rightarrow \quad x \text{ siempre vale } 0. \\ z = 0 & \rightarrow \quad z \text{ siempre vale } 0. \\ & \qquad\; y \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases}$

Es la ecuación del eje Y.

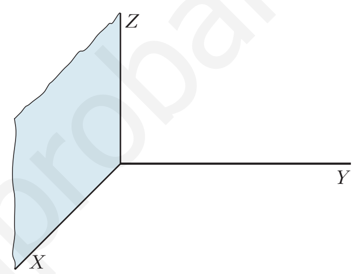


g) $y = 0 \quad \rightarrow \quad y$ siempre vale 0.

x puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

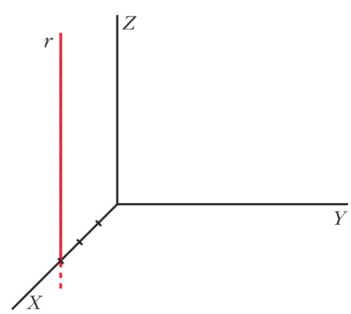
Es la ecuación del plano XZ.



h) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \rightarrow$ si hacemos $\lambda + \mu = \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, tenemos:

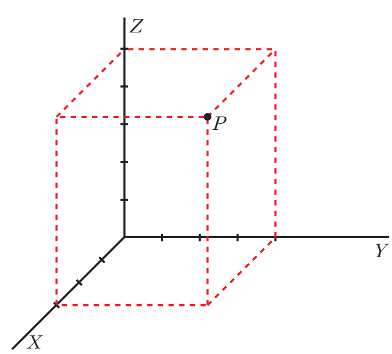
$\begin{cases} x = 3 & \rightarrow \quad x \text{ siempre vale } 3. \\ y = 0 & \rightarrow \quad y \text{ siempre vale } 0. \\ z = \rho & \rightarrow \quad z \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases}$ $\rightarrow$ Nos movemos en el plano XZ.

Como solo hay un parámetro, es una recta.



i) $\begin{cases} x = 3 & \rightarrow \quad x \text{ siempre vale } 3. \\ y = 4 & \rightarrow \quad y \text{ siempre vale } 4. \\ z = 5 & \rightarrow \quad z \text{ siempre vale } 5. \end{cases}$

Es un punto.



j) $\begin{cases} x = \lambda & \rightarrow & x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = \mu & \rightarrow & y \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ z = \rho & \rightarrow & z \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases}$

Representa todo el espacio.

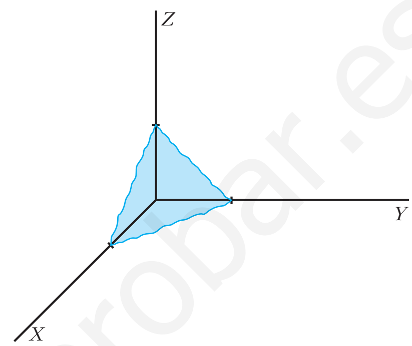
k) $x + y + z = 1$. Es un plano.

Calculamos las intersecciones con los ejes:

Eje X: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0, 0)$

Eje Y: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1, 0)$

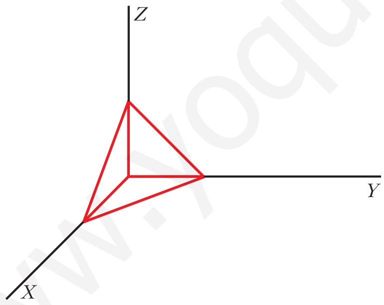
Eje Z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow z = 1 \rightarrow (0, 0, 1)$



l) $\begin{cases} x + y + z \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

$x + y + z \le 1 \rightarrow$ Describe la región limitada por el plano anterior, cuyas coordenadas están por debajo de él.

$x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$: Las tres variables tienen que ser positivas.



Representa la región comprendida entre la parte positiva de los planos XY, YZ, XZ y el plano $x + y + z = 1$.

Página 176

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

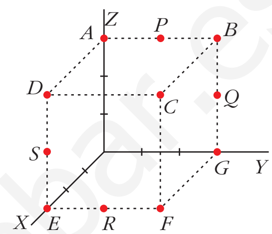
PARA PRACTICAR

Puntos

1 **Las coordenadas de los puntos representados en esta figura son:**

(0, 0, 3); (0, 3, 3); (3, 3, 3); (3, 0, 3); (3, 0, 0); (3, 3, 0); (0, 3, 0); (0, 3/2, 3); (0, 3, 3/2); (3, 3/2, 0); (3, 0, 3/2)

Asocia a cada punto sus coordenadas.



$A(0, 0, 3)$; $B(0, 3, 3)$; $C(3, 3, 3)$; $D(3, 0, 3)$; $E(3, 0, 0)$; $F(3, 3, 0)$; $G(0, 3, 0)$; $P(0, 3/2, 3)$; $Q(0, 3, 3/2)$; $R(3, 3/2, 0)$; $S(3, 0, 3/2)$

2 **Comprueba si los puntos $A(1, -2, 1)$, $B(2, 3, 0)$ y $C(-1, 0, -4)$ están alineados.**

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\,(1, 5, -1) \\ \overrightarrow{AC}\,(-2, 2, -5) \end{array}\right\}$ Sus coordenadas no son proporcionales. Luego los puntos no están alineados.

3 **Calcula a y b para que los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, -2)$ y $C(4, a, b)$ estén alineados.**

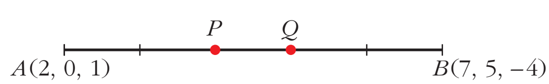
$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\,(2, -2, -1) \\ \overrightarrow{AC}\,(3, a-2, b+1) \end{array}\right\}$ Para que estén alineados ha de ser: $\dfrac{3}{2} = \dfrac{a-2}{-2} = \dfrac{b+1}{-1}$

Por tanto:

$$\frac{a-2}{-2} = \frac{3}{2} \;\rightarrow\; a - 2 = -3 \;\rightarrow\; a = -1$$

$$\frac{b+1}{-1} = \frac{3}{2} \;\rightarrow\; b = \frac{-3}{2} - 1 \;\rightarrow\; b = \frac{-5}{2}$$

4 **Halla los puntos P y Q tales que $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$, siendo $A(2, 0, 1)$ y $B(7, 5, -4)$.**

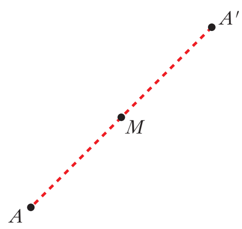


$\overrightarrow{AB}\,(5, 5, -5)$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1) + (3, 3, -3) = (5, 3, -2)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} = (2, 0, 1) + (2, 2, -2) = (4, 2, -1)$$

5 **Halla el simétrico del punto $A(-2, 3, 0)$ respecto del punto $M(1, -1, 2)$.**



Sea $A'(x, y, z)$ el simétrico de A respecto del punto M.

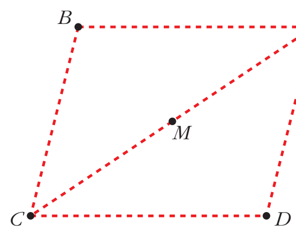
Como M es el punto medio del segmento AA', entonces:

$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z}{2}\right) = (1, -1, 2)$$

$$\frac{x-2}{2} = 1 \;\to\; x = 4; \quad \frac{y+3}{2} = -1 \;\to\; y = -5; \quad \frac{z}{2} = 2 \;\to\; z = 4$$

Por tanto: $A'(4, -5, 4)$

6 **Los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(4, -1, -3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el cuarto vértice, D, y el centro del paralelogramo.**



Sea $D(x, y, z)$ el otro vértice:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \;\to\; \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} =$$
$$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} =$$
$$= (4, -1, -3) + (-1, 3, -3) = (3, 2, -6)$$

Si M es el centro del paralelogramo, es el punto medio de $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = (4, -1, -3) + \frac{1}{2}(-3, 4, 2) =$$
$$= (4, -1, -3) + \left(-\frac{3}{2}, 2, 1\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, -2\right)$$

Rectas

7 **Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 2, 1)$ y $B\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.**

Un vector dirección de la recta r es $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$.

Tomamos el vector $\vec{d}(1, -1, -2) // \overrightarrow{AB}$.

- *Ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (-3, 2, 1) + \lambda(1, -1, -2)$$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

• *Forma continua:*

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$$

• *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-1} \;\rightarrow\; -x-3 = y-2 \;\rightarrow\; x+y+1=0 \\ \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{z-1}{-2} \;\rightarrow\; -2x-6 = z-1 \;\rightarrow\; 2x+z+5=0 \end{array}\right\}$$

8 **Comprueba si existe alguna recta que pase por los puntos $P(3, 1, 0)$, $Q(0, -5, 1)$ y $R(6, -5, 1)$.**

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}\,(-3, -6, 1) \\ \overrightarrow{PR}\,(3, -6, 1) \end{array}\right\}$ Sus coordenadas no son proporcionales. Luego los puntos no están alineados.

9 **Escribe las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas de los ejes de coordenadas.**

Paramétricas:

Eje $OX \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Implícitas:

Eje $OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

s10 **Halla las ecuaciones (paramétricas, implícitas, forma continua...) de la recta que pasa por el punto $A(-4, 2, 5)$ y es paralela al eje OZ.**

Si es paralela al eje OZ, tiene como vector dirección $(0, 0, 1)$.

• *Ecuación vectorial:*

$(x, y, z) = (-4, 2, 5) + \lambda(0, 0, 1)$

• *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = \;\;2 \\ z = \;\;5 + \lambda \end{cases}$$

• *Forma continua:*

$$\frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$$

• *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 \;\rightarrow\; x+4=0 \\ y = \;\;2 \;\rightarrow\; y-2=0 \end{array}\right\}$$

s11 **Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es paralela al vector $\vec{u} \times \vec{v}$, siendo $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(2, 0, 0)$.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 4, 2) \mathbin{/\!/} (0, 2, 1)$

- *Ecuación vectorial:*

  $(x, y, z) = (1, -3, 0) + \lambda(0, 2, 1)$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- *Forma continua:*

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{1}$$

- *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & & \to \quad x - 1 = 0 \\ \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1} & \to \quad y + 3 = 2z & \to \quad y - 2z + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

s12 **Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:**

a) $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ $\qquad s: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

b) $r: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ $\qquad s: \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{2}$

c) $r: \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{z+1}{3}$ $\qquad s: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$

d) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 4 + 8\lambda \end{cases}$

a) $\vec{d}_r(3, 2, 4)$; $P(1, -2, 1)$

$\vec{d}_s(-1, 2, 3)$; $P'(-2, 3, 2)$

$\overrightarrow{PP'}(-3, 5, 1)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \to |M'| = -51 \neq 0 \to \text{Las rectas se cruzan.}$$

(the first two columns form M)

b) $\vec{d}_r(-1, 2, 1)$; $P(1, 1, 2)$

$\vec{d}_s(4, 1, 2)$; $P'(4, 4, 5)$

$\overrightarrow{PP'}(3, 3, 3)$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{M}\!\!\begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow |M'| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran\,(M) = ran\,(M') = 2 \rightarrow$$

$\rightarrow$ Las rectas se cortan.

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 4 + \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \lambda = 4 + 4\mu \\ 1 + 2\lambda = 4 + \mu \\ 2 + \lambda = 5 + 2\mu \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando la 1.ª y la 3.ª: } 3 = 9 + 6\mu \rightarrow \mu = -1 \\ \text{Sustituyendo en la 1.ª: } 1 - \lambda = 4 - 4 \rightarrow \lambda = 1 \end{array}$$

Haciendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r (o bien $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: (0, 3, 3).

c) $\vec{d}_r(2, 1, 3)$; $P(0, 1, -1)$

$\vec{d}_s(1, -2, 0) \times (0, 3, -1) = (2, 1, 3)$

Tienen la misma dirección, y el punto $P \in r$, pero $P \notin s$, luego las rectas son paralelas.

d) $\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(2, 3, 4) \\ \vec{d}_s(4, 6, 8) \end{array}\right\}$ Tienen la misma dirección.

Veamos si el punto $P(1, 0, 0) \in r$, pertenece también a s:

$$\left.\begin{array}{l} 3 + 4\lambda = 1 \rightarrow \lambda = -1/2 \\ 3 + 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1/2 \\ 4 + 8\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1/2 \end{array}\right\} P \in s$$

Por tanto, las rectas r y s coinciden, son la misma recta.

s13 **Obtén el valor de a para el cual las rectas r y s se cortan:**

$$r: x = y = z - a \qquad\qquad s: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

Calcula el punto de corte de r y s para el valor de a que has calculado.

☛ ***En s, divide por 2 el numerador y el denominador de la primera fracción.***

$r: x = y = z - a \quad \to \quad \vec{d}_r(1, 1, 1);\; P(0, 0, a)$

$s: \dfrac{x - 1/2}{3/2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{0} \quad \to \quad \vec{d}_s\left(\dfrac{3}{2}, -2, 0\right);\; P'\left(\dfrac{1}{2}, -3, 2\right)$

$\overrightarrow{PP'}\left(\dfrac{1}{2}, -3, 2-a\right)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2-a \end{array}\right) \quad \to \quad ran\ (M) = 2$$

M

Para que las rectas se corten, ha de ser $ran\ (M') = 2$; es decir, $|M'| = 0$:

$$|M'| = \frac{7a-21}{2};\; |M'| = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ y = -3 - 2\mu \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ \lambda = -3 - 2\mu \\ 3 + \lambda = 2 \end{array}\right\} \text{ El sistema tiene solución: } \lambda = -1;\; \mu = -1$$

Sustituyendo $\lambda = -1$ en las ecuaciones de r (o $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $(-1, -1, 2)$.

s14 **Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:**

$$r: \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad\qquad s: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(4, 1, -1) \\ \vec{d}_s(m, 3, n) \end{array}\right\} \text{ Las coordenadas han de ser proporcionales:}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{1} = \frac{n}{-1} \quad \Rightarrow \quad m = 12,\;\; n = -3$$

Para $m = 12$ y $n = -3$, las dos rectas tienen la misma dirección.

Como el punto $P(0, 1, -3) \in s$ pero $P \notin r$, las rectas son paralelas.

Página 177

15 **a) Halla el vector director de la recta determinada por los planos:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - y \qquad = 0} \\ \boldsymbol{\quad y + z = 2} \end{cases}$$

b) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta anterior.

a) $\vec{d} = (1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$

b) Obtenemos un punto de la recta haciendo $y = 0$:

$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ z = 2 \end{matrix}\right\}$ El punto $(0, 0, 2)$ pertenece a la recta.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

16 **Expresa la siguiente recta como intersección de dos planos:**

$$\boldsymbol{r: \frac{x}{2} = \frac{y + 1}{-1} = z}$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{x}{2} = z & \rightarrow & x = 2z & \rightarrow & x - 2z = 0 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} & \rightarrow & -x = 2y + 2 & \rightarrow & x + 2y + 2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

s17 **¿Se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{s}$?**

$$\boldsymbol{r: \frac{x - 1}{2} = y = z + 1} \qquad \boldsymbol{s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas:

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(1, 0, -1)$

$\vec{d}_s(2, 1, 1)$

Las dos rectas tienen la misma dirección. Además, $P(1, 0, -1) \in r$, pero $P \notin s$

puesto que: $\begin{cases} 2\lambda = 1 & \rightarrow & \lambda = 1/2 \\ -1 + \lambda = 0 & \rightarrow & \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Por tanto, las rectas son paralelas. Luego no se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas r y s.

Planos

s18 Halla la ecuación implícita de cada uno de los siguientes planos:

a) Determinado por el punto $A(1, -3, 2)$ y por los vectores $\vec{u}(2, 1, 0)$ y $\vec{v}(-1, 0, 3)$.

b) Pasa por el punto $P(2, -3, 1)$ y su vector normal es $\vec{n}(5, -3, -4)$.

c) Perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ y que pasa por el punto (1, 0, 1).

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (2, 1, 0) \times (-1, 0, 3) = (3, -6, 1)$

$3(x-1) - 6(y+3) + (z-2) = 0$

$3x - 6y + z - 23 = 0$

b) $5(x-2) - 3(y+3) - 4(z-1) = 0$

$5x - 3y - 4z - 15 = 0$

c) $\vec{n}(2, -1, 3)$

$2(x-1) - (y-0) + 3(z-1) = 0$

$2x - y + 3z - 5 = 0$

19 Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de los planos *OXY*, *OYZ*, *OXZ*.

Plano *OXY*:

Paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$ Implícita: $z = 0$

Plano *OYZ*:

Paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ Implícita: $x = 0$

Plano *OXZ*:

Paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$ Implícita: $y = 0$

20 Escribe las ecuaciones paramétricas de los planos:

a) $z = 3$ **b) $x = -1$** **c) $y = 2$**

a) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \mu \end{cases}$

21 **¿Cuál es el vector normal del plano $x = -1$? Escribe las ecuaciones de una recta perpendicular a ese plano que pase por $A(2, 3, 0)$.**

El vector normal al plano $x = -1$ es $\vec{n}(1, 0, 0)$.

Recta: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

s22 **Calcula m y n para que los planos siguientes sean paralelos:**

$$\alpha: mx + y - 3z - 1 = 0 \qquad \beta: 2x + ny - z - 3 = 0$$

¿Pueden ser α y β coincidentes?

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha(m, 1, -3) \\ \vec{n}_\beta(2, n, -1) \end{array}\right\}$ Las coordenadas han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{n} = \frac{-3}{-1} \;\rightarrow\; m = 6, \;\; n = \frac{1}{3}$$

Así, quedaría:

$$\begin{cases} \alpha: 6x + y - 3z - 1 = 0 \;\rightarrow\; 6x + y - 3z - 1 = 0 \\ \beta: 2x + \dfrac{1}{3}y - z - 3 = 0 \;\rightarrow\; 6x + y - 3z - 9 = 0 \end{cases}$$

Los planos son paralelos, no coincidentes. No pueden ser coincidentes pues los términos independientes no son proporcionales a los anteriores.

s23 **Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos siguientes:**

$$O(0, 0, 0), \;\; A(2, 2, 0), \;\; B(1, 1, 2)$$

$(2, 2, 0) \times (1, 1, 2) = (4, -4, 0) \;\rightarrow\; \vec{n}(1, -1, 0)$

$P(0, 0, 0)$

El plano es: $x - y = 0$

s24 **Estudia la posición relativa de la recta y el plano siguientes:**

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \qquad \pi: x - y + z - 3 = 0$$

$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

$\pi: x - y + z - 3 = 0$

$$(3 + 2\lambda) - (-1 + \lambda) + (-\lambda) - 3 = 0$$

$$3 + 2\lambda + 1 - \lambda - \lambda - 3 = 0 \;\rightarrow\; 1 = 0$$

La recta es paralela al plano (pues no tienen ningún punto en común).

s25 **Determina las ecuaciones paramétricas del plano que contiene al punto $P(2, 1, 2)$ y a la recta siguiente:**

$$r: x-2=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{-3}$$

Si contiene a la recta, contendrá al punto $Q(2, 3, 4)$ y será paralelo a $\vec{d}(1, -1, -3)$.

También será paralelo a $\overrightarrow{PQ}(0, 2, 2) \,//\, (0, 1, 1)$.

Un vector normal al plano es: $(1, -1, -3) \times (0, 1, 1) = (2, -1, 1)$

La ecuación del plano es: $2(x-2)-(y-1)+(z-2)=0$

$$2x-y+z-5=0$$

s26 **Considera las rectas siguientes:**

$$r: \frac{x-1}{2}=y=z-2 \qquad s: \begin{cases} x -2z = 5 \\ x-2y = 11 \end{cases}$$

a) Comprueba que r y s son paralelas.

b) Halla la ecuación implícita del plano que contiene a r y a s.

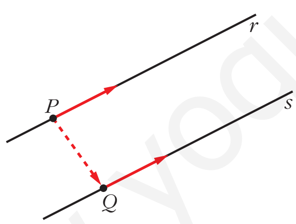
a) $\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(1, 0, 2)$

$\vec{d}_s = (1, 0, -2) \times (1, -2, 0) = (-4, -2, -2) \,//\, (2, 1, 1)$

Las rectas r y s tienen la misma dirección. Además, $P(1, 0, 2) \in r$, pero $P \notin s$.

Luego las rectas son paralelas.

b)



Obtenemos un punto, Q, de s haciendo $y=0$:

$$\left.\begin{array}{l} x-2z=5 \\ x=11 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=11 \\ z=3 \end{array}\right\} Q(11, 0, 3)$$

El plano que buscamos será paralelo a $\vec{d}_r(2, 1, 1)$ y a $\overrightarrow{PQ}(10, 0, 1)$.

Un vector normal es: $(2, 1, 1) \times (10, 0, 1) = (1, 8, -10)$

La ecuación del plano será:

$$1 \cdot (x-1) + 8 \cdot (y-0) - 10 \cdot (z-2) = 0 \;\rightarrow\; x+8y-10z+19=0$$

s27 **¿Son coplanarios los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 1, 0)$ y $D(-1, 2, 1)$?**

En caso afirmativo, escribe la ecuación del plano que los contiene.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-2, 2, 1) \end{array}\right\} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Los puntos no son coplanarios.

Otra forma de resolverlo

- Obtenemos la ecuación del plano π que contiene a A, B y C:

  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0) \times (1, 1, 0) = (0, 0, -2) \,//\, (0, 0, 1)$ es normal al plano.

  Ecuación de π: $0(x-1) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0 \;\to\; z = 0$

  (Podríamos haber advertido que $z = 0$ es el plano que pasa por A, B y C observando que en los tres puntos la tercera coordenada es cero).

- Comprobamos si el punto D pertenece a este plano:

  ¿$(-1, 2, 1)$ pertenece a $z = 0$? Evidentemente, no.

  Por tanto, los cuatro puntos no son coplanarios.

s28 **Estudia la posición relativa de los tres planos en cada uno de los siguientes casos:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + 2y - z - 3 = 0} \\ \boldsymbol{3y + 2z - 1 = 0} \\ \boldsymbol{x + y + z - 2 = 0} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{2x - y + z - 3 = 0} \\ \boldsymbol{x - y + z - 2 = 0} \\ \boldsymbol{3x - y + z - 4 = 0} \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y + z - 1 = 0} \\ \boldsymbol{3x + y - 2z = 0} \\ \boldsymbol{2x + 2y - 3z + 4 = 0} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 3 \\ 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\} \quad M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M}\!\!\left|\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right)$

$|M| = 8 \;\to\; ran\,(M) = ran\,(M') = 3 \;\to\;$ Los tres planos se cortan en un punto.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + z = 4 \end{array}\right\} \quad M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{M}\!\!\left|\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right)$

La 3.ª columna es $-1 \cdot 2$.ª; y la 4.ª columna se obtiene sumando la 1.ª y la 3.ª.

Luego $ran\,(M) = ran\,(M') = 2 \;\to\;$ Los tres planos se cortan en una recta.

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = -4 \end{array}\right\} \quad M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}}_{M}\!\!\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{matrix}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ y $|M| = 0 \;\to\; ran\,(M) = 2$

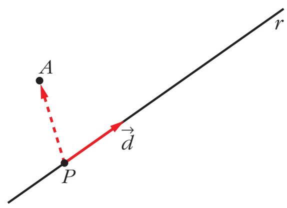
$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \;\to\; ran\,(M') = 3$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

s29 **Calcula la ecuación del plano que determinan el punto $A(1, 0, 1)$ y la recta:**

$$r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de la r es: $\vec{d} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 2) = (1, -4, -3)$



Obtenemos un punto de r haciendo $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y - z + 1 = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } z + 1 = 0 \;\to\; z = -1 \\ y = 2z = -2 \end{array}$$

$P(0, -2, -1)$

El plano es paralelo a $\vec{d}(1, -4, -3)$ y a $\overrightarrow{PA}(1, 2, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(1, -4, -3) \times (1, 2, 2) = (-2, -5, 6) \,//\, (2, 5, -6)$

La ecuación del plano es: $2(x - 1) + 5(y - 0) - 6(z - 1) = 0$

$2x + 5y - 6z + 4 = 0$

Página 178

PARA RESOLVER

s30 **Calcula b para que las rectas r y s se corten. ¿Cuál es el punto de corte?**

$$r: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 5}{-3} = \frac{z + 1}{2}$$

$$s: \frac{x}{4} = \frac{y - b}{-1} = \frac{z - 1}{2}$$

$\vec{d}_r(2, -3, 2)$; $P(1, -5, -1)$

$\vec{d}_s(4, -1, 2)$; $P'(0, b, 1)$

$\overrightarrow{PP'}(-1, b + 5, 2)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & b + 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to$$ Para que las rectas se corten, ha de ser $|M'| = 0$ (para que $ran\,(M) = ran\,(M') = 2$).

M

$|M'| = 4b + 44 = 0 \;\to\; b = -11$

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4\mu \\ y = -11 - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 + 2\lambda &= 4\mu \\ -5 - 3\lambda &= -11 - \mu \\ -1 + 2\lambda &= 1 + 2\mu \end{aligned}\right\}$$ Restando la 3.ª ecuación a la 1.ª: $2 = -1 + 2\mu$

$$\mu = \frac{3}{2} \qquad \lambda = \frac{4\mu - 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Sustituyendo $\lambda = \frac{5}{2}$ en las ecuaciones de r (o $\mu = \frac{3}{2}$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $\left(6, \frac{-25}{2}, 4\right)$.

s31 **Determina, en cada caso, el valor de k para que las rectas r y s sean coplanarias. Halla, después, el plano que las contiene:**

a) $r: \frac{x}{1} = \frac{y-k}{1} = \frac{z}{0}$

$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

b) $r: \frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}$

$s: \begin{cases} x = 6 + 6\lambda \\ y = 4 + k\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

a) $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(0, k, 0)$

$\vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PP'}(1, 1 - k, -1)$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 - k \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ Para que las rectas sean coplanarias, ha de ser $|M'| = 0$.

$|M'| = k + 2 = 0 \rightarrow k = -2$

Un vector normal al plano es: $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = (1, -1, -2)$

El plano que las contiene es: $1(x - 1) - 1(y - 1) - 2(z + 1) = 0$

$$x - y - 2z - 2 = 0$$

b) $\vec{d}_r(3, 2, 1)$; $P(6, 3, 3)$

$\vec{d}_s(6, k, 2)$; $P'(6, 4, 3)$

$\overrightarrow{PP'}(0, 1, 0)$

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ Para que las rectas sean coplanarias, ha de ser $|M'| = 0$.

$|M'| = 6 - 6 = 0 \rightarrow$ Para todos los valores de k las rectas r y s son coplanarias.

Un vector normal al plano es: $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (3, 2, 1) \times (6, k, 2) = (4 - k, 0, 3k - 12)$.

Tiene sentido siempre que $k \neq 4$.

El plano que las contiene es: $(4 - k)(x - 6) + 0(y - 4) + (3k - 12)(z - 3) = 0$

$$(4 - k)x + (3k - 12)z + (12 - 3k) = 0$$

32 **Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2, 2, 1)$, $B(6, 1, -1)$ y $C(0, -2, -1)$ de dos formas distintas:**

a) Mediante vectores.

b) Llamando $ax + by + cz + d = 0$ al plano y obligando a que los tres puntos cumplan la ecuación. Se obtiene, así, un sistema de ecuaciones.

a) $\overrightarrow{AB} = (4, -1, -2)$; $\overrightarrow{AC} = (-2, -4, -2)$

Un vector normal al plano es: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, -1, -2) \times (-2, -4, -2) = (-6, 12, -18)$

Tomamos como vector normal del plano: $(-1, 2, -3)$

El plano pedido es: $-(x - 2) + 2(y - 2) - 3(z - 1) = 0$

$$-x + 2y - 3z + 1 = 0$$

b) Obligando a que los tres puntos cumplan la ecuación $ax + by + cz + d = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 2b + c + d = 0 \\ 6a + b - c + d = 0 \\ -2b - c + d = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2a + 2b + c = -d \\ 6a + b - c = -d \\ -2b - c = -d \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} a = -d \\ b = 2d \\ c = -3d \end{array}$$

Así:

$ax + by + cz + d = 0 \rightarrow -dx + 2dy - 3dz + d = 0 \rightarrow d(-x + 2y - 3z + 1) = 0$

Basta tomar $d = 1$ para ver que obtenemos la misma ecuación que en el apartado a).

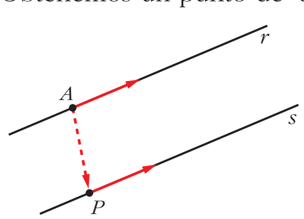
s33 **Dadas la recta r, determinada por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(3, 1, 2)$, y la recta:**

$$s: \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

estudia su posición relativa y halla, si existe, la ecuación del plano que las contiene.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r = \overrightarrow{AB} = (2, 0, 1);\ A(1, 1, 1) \\ \vec{d}_s = (1, 0, -2) \times (0, 1, 0) = (2, 0, 1);\ A \notin s \end{array}\right\} \text{Las rectas son paralelas.}$$

Obtenemos un punto de s haciendo $z = 0$:



$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} P(1, 2, 0)$$

El plano que buscamos es paralelo a $\vec{d}_r$ y a $\overrightarrow{AP}(0, 1, -1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = \vec{d}_r \times \overrightarrow{AP} = (2, 0, 1) \times (0, 1, -1) = (-1, 2, 2)$

El plano es: $-1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z - 1) = 0$

$-x + 2y + 2z - 3 = 0$

s34 **Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 3, 2)$ y $B(-2, 5, 0)$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$.**

El plano será paralelo a $\overrightarrow{AB}(-3, 2, -2)$ y a $\vec{d}(-1, 1, -3)$.

Un vector normal al plano es: $(-3, 2, -2) \times (-1, 1, -3) = (-4, -7, -1) \rightarrow \vec{n}(4, 7, 1)$

El plano es: $4(x - 1) + 7(y - 3) + 1(z - 2) = 0$

$4x + 7y + z - 27 = 0$

s35 **Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y es paralelo a:**

$$s: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

El plano será paralelo a $\vec{d}_r(3, -1, 1)$ y a $\vec{d}_s(5, 2, -3)$.

Un vector normal al plano será: $\vec{n} = (3, -1, 1) \times (5, 2, -3) = (1, 14, 11)$

Un punto del plano es $(2, -1, 0)$.

Por tanto, el plano es: $1(x - 2) + 14(y + 1) + 11(z - 0) = 0$

$x + 14y + 11z + 12 = 0$

s36 **Calcula el valor de m para que los puntos $A(m, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 2, 3)$ y $D(7, 2, 1)$ estén en un mismo plano. ¿Cuál es la ecuación de ese plano?**

Hallamos la ecuación del plano que contiene a B, C y D.

El plano será paralelo a $\overrightarrow{BC}(1, 1, 1)$ y a $\overrightarrow{CD}(6, 0, -2)$, es decir, a $(1, 1, 1)$ y a $(3, 0, -1)$. Un vector normal al plano es:

$(1, 1, 1) \times (3, 0, -1) = (-1, 4, -3) \rightarrow \vec{n}(1, -4, 3)$

La ecuación del plano es: $1(x - 0) - 4(y - 1) + 3(z - 2) = 0$

$x - 4y + 3z - 2 = 0$

Para que A pertenezca al mismo plano, ha de ser:

$m - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 0 \rightarrow m + 1 = 0 \rightarrow m = -1$

s37 **Dado el plano $\pi: 2x - 3y + z = 0$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$, halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.**

El plano será paralelo a $(2, -3, 1)$ y a $(1, -1, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1) \rightarrow \vec{n}(5, 3, -1)$

El punto $(1, 2, -1)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $5(x - 1) + 3(y - 2) - 1(z + 1) = 0$

$$5x + 3y - z - 12 = 0$$

38 **Halla las ecuaciones de la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2:**

$$\pi_1: \begin{cases} x = 2 \quad\quad - \mu \\ y = \quad\quad 3\lambda + \mu \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases} \qquad \pi_2: x + y - z = 3$$

Los puntos de la recta tienen que cumplir las ecuaciones de los dos planos. Sustituimos los valores de π_1 en π_2:

$$2 - \mu + 3\lambda + \mu - 3 + 3\lambda = 3 \rightarrow 6\lambda = 4 \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son, por tanto:

$$\begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 \end{cases}$$

39 **Estudia la posición relativa de la recta y el plano siguientes:**

$$r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \pi: z = 1$$

Son perpendiculares y se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

s40 **Sean la recta $r: \begin{cases} 3x - y + z \quad = 0 \\ 2x \quad - z + 3 = 0 \end{cases}$ y el plano $ax - y + 4z - 2 = 0$.**

a) Calcula el valor de a para que r sea paralela al plano.

b) ¿Existe algún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano?

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (3, -1, 1) \times (2, 0, -1) = (1, 5, 2)$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (a, -1, 4)$.

a) Para que r sea paralela al plano, $\vec{d}$ y $\vec{n}$ han de ser perpendiculares:

$(1, 5, 2) \cdot (a, -1, 4) = a - 5 + 8 = a + 3 = 0 \rightarrow a = -3$

b) Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ deberían tener sus coordenadas proporcionales. Como $\frac{5}{-1} \neq \frac{2}{4}$, no es posible; es decir, no existe ningún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano.

s41 **Dados la recta** $r: \begin{cases} x \quad\; - 2z + 3 = 0 \\ y - \;\; z - 4 = 0 \end{cases}$ **y el plano** $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$, **halla la ecuación de una recta s contenida en el plano π que pase por el punto $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r.**

☛ ***El vector dirección de s ha de ser perpendicular al vector dirección de r y al vector normal del plano.***

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (1, 2, 3)$.

Un vector dirección de la recta que buscamos es: $(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$

La recta es: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

Página 179

s42 **Halla la ecuación de una recta que cumpla las condiciones siguientes:**

I) Es paralela a la recta de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} x \quad + 2z = 5 \\ \quad y + 3z = 5 \end{cases}$$

II) Pasa por el punto de intersección de la recta s con el plano π:

$$s: \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3} \qquad \pi: x - y + z = 7.$$

Un vector dirección de la recta es: $(1, 0, 2) \times (0, 1, 3) = (-2, -3, 1) \,//\, (2, 3, -1)$

Escribimos la recta s en forma paramétrica para hallar el punto de corte de s y π:

$$s: \begin{cases} x = \;\; 1 + 4\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\pi: \; x - y + z = 7 \\ &1 + 4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda = 7 \\ &5\lambda = 5 \;\rightarrow\; \lambda = 1 \end{aligned}$$

El punto de corte de s y π es $(5, -1, 1)$.

Por tanto, la recta que buscamos es:

$$\begin{cases} x = \;\; 5 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \;\; 1 - \;\lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

s43 **Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -3, 2)$ y $B(0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta:**

$$r: \begin{cases} 3x - 2y \quad + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de r es: $(3, -2, 0) \times (0, 2, 3) = (-6, -9, 6) // (2, 3, -2)$

$\overrightarrow{AB}(-1, 4, -1)$

El plano que buscamos es paralelo a $(2, 3, -2)$ y a $(-1, 4, -1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (2, 3, -2) \times (-1, 4, -1) = (5, 4, 11)$

La ecuación del plano es: $5(x - 0) + 4(y - 1) + 11(z - 1) = 0$

$$5x + 4y + 11z - 15 = 0$$

44 **Dados los planos $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$, halla m para que sean:**

a) Paralelos.

b) Perpendiculares.

a) Las coordenadas de $(m, 2, -3)$ y de $(2, -4, 6)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \quad \to \quad m = -1$$

b) $(m, 2, -3) \cdot (2, -4, 6) = 2m - 8 - 18 = 2m - 26 = 0 \quad \to \quad m = 13$

s45 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano que pasa por el origen y por los puntos $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 2, 1)$.**

Un vector normal al plano es: $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = (1, 1, 1) \times (1, 2, 1) = (-1, 0, 1)$

Este vector es un vector dirección de la recta que buscamos.

Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

s46 **Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y \quad - 1 = 0 \\ 2x - y + z \quad = 0 \end{cases}$ y es paralelo a $s: \dfrac{1 - x}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z + 2}{-4}$.**

Un vector dirección de r es: $(1, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -1, -3)$

El plano que buscamos es paralelo a $(1, -1, -3)$ y a $(-2, 3, -4)$. Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (1, -1, -3) \times (-2, 3, -4) = (13, 10, 1)$

Obtenemos un punto de r haciendo $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y - 1 = 0 \quad \to \quad y = 1 \\ -y + z = 0 \quad \to \quad z = y = 1 \end{array}\right\} P(0,\ 1,\ 1)$$

La ecuación del plano es: $13(x - 0) + 10(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$$13x + 10y + z - 11 = 0$$

47 **Dados los vectores $\vec{u}(2, 3, 5)$, $\vec{v}(6, -3, 2)$, $\vec{w}(4, -6, 3)$, $\vec{p}(8, 0, a)$, y los planos:**

$\pi: (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ $\qquad$ $\pi': (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{w} + \mu\vec{p}$

estudia la posición relativa de π y π' según los valores de a.

Obtenemos las ecuaciones implícitas de los dos planos:

$\vec{u} \times \vec{v} = (21, 26, -24)$

$\pi: 21(x - 1) + 26(y - 2) - 24(z - 3) = 0$

$\rho: 21x + 26y - 24z - 1 = 0$

$\vec{w} \times \vec{p} = (-6a, 24 - 4a, 48)$

$\pi': -6a(x - 1) + (24 - 4a)(y - 2) + 48(z - 3) = 0$

$\pi': -6ax + (24 - 4a)y + 48z + (14a - 192) = 0$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 21 & 26 & -24 \\ -6a & 24 - 4a & 48 \end{array}}_{M} \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 \\ 192 - 14a \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 21 & -24 \\ -6a & 48 \end{vmatrix} = 1\,008 - 144a = 0 \quad \to \quad a = 7$$

- Si $a = 7$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 21 & 26 & -24 & 1 \\ -42 & -4 & 48 & 94 \end{array}\right) \quad \to \quad \text{Los planos se cortan en una recta.}$$

- Si $a \neq 7 \quad \to \quad ran\ (M) = ran\ (M')$. Los planos se cortan en una recta.

Los planos se cortan en una recta cualquiera sea cual sea el valor de a (aunque no sea siempre la misma recta).

s48 **Estudia la posición relativa de los siguientes planos según los valores de m:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y = 1} \\ \boldsymbol{my + z = 0} \\ \boldsymbol{x + (1 + m)y + mz = m + 1} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1 + m)y + mz = m + 1 \end{array}\right\} M' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1 + m & m \end{array}}_{M} \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ m + 1 \end{array}\right)$$

$$|M| = m^2 - m = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Si $m = 0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ El 1.° y el 3.° son el mismo plano; el 2.° los corta. Por tanto, se cortan en una recta.

- Si $m = 1$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ y } |M| = 0 \rightarrow ran\,(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\,(M') = 3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \rightarrow ran\,(M) = ran\,(M') = 3$. Los planos se cortan en un punto.

s49 Halla las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ y corta a las rectas:

$$s_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

$$s_2: \begin{cases} x + y \qquad + 4 = 0 \\ \quad y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$s_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \begin{matrix} S_1(2, 2, -1) \\ \vec{d}_1(2, -1, 1) \end{matrix} \qquad s_2: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{matrix} S_2(-1, -3, 0) \\ \vec{d}_2(-3, 3, 1) \end{matrix}$$

La recta r está determinada por los siguientes planos:

Plano α

Este plano contiene a la recta s_1 y al punto P, luego:

$$\vec{d}_1(2, -1, 1)//\alpha, \quad \overrightarrow{PS_1}(0, 2, 0)//\alpha, \quad P(2, 0, -1) \in \alpha$$

La ecuación de α es, por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2z - 4 = 0$$

Plano β

Este plano contiene a la recta s_2 y al punto P, luego:

$$\vec{d}_2(-3, 3, 1)//\beta, \ \overrightarrow{PS_2}(-3, -3, 1)//\beta, \ P(2, 0, -1) \in \beta$$

La ecuación de β es, por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x + 3z + 1 = 0$$

Así, $r: \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

s50 **Estudia las posiciones relativas del plano π: $x + ay - z = 1$ y de la recta $r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ según los valores de a.**

$$\left.\begin{array}{l} \pi: \quad x + ay - z = 1 \\ r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases} \end{array}\right\} M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{M}$$

$$|M| = -a^2 + a + 2 = 0 \quad \to \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = -1$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$ Planos paralelos. La recta es paralela al plano.

- Si $a = 2$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ La 1.ª ecuación se obtiene restándole a la 2.ª la 3.ª.

  Por tanto, la recta está contenida en el plano.

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ $\to$ La recta y el plano se cortan en un punto.

s51 **Dados los planos π: $ax + y + z = a$ y π': $x - ay + az = -1$ comprueba que se cortan en una recta para cualquier valor de a. Obtén el vector dirección de esa recta en función de a.**

$$\left.\begin{array}{l} \pi: \ ax + y + z = a \\ \pi': \ x - ay + az = -1 \end{array}\right\} M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = -(a^2 + 1) \neq 0 \text{ para todo valor de } a.$$

Por tanto, $ran\ (M) = 2$ para cualquier valor de a; es decir, los planos se cortan en una recta (cualquiera que sea el valor de a).

- Vector dirección de la recta: $(a, 1, 1) \times (1, -a, a) = (2a, 1 - a^2, -a^2 - 1)$

s52 **a) Halla la ecuación de un plano π_1 que pasa por el punto $A(-1, -1, 1)$ y cuyo vector normal es $\vec{v}(1, -2, -1)$.**

b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta r que se obtiene al cortarse π_1 con π_2: $z - 1 = 0$.

a) π_1: $1(x + 1) - 2(y + 1) - 1(z - 1) = 0$

π_2: $x - 2y - z = 0$

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones π_1 y π_2:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\} \to r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

s53 **Considera las rectas siguientes:**

$$r: \begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ ax - 3z + 3 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2ay + 4a - 1 = 0 \\ 2y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

a) Averigua si existe algún valor de a para el cual las rectas están contenidas en un plano. En caso afirmativo, calcula la ecuación de dicho plano.

b) Determina, cuando sea posible, los valores de a para los cuales las rectas son paralelas y los valores de a para los que las rectas se cruzan.

a) Obtenemos un vector dirección de cada una de las rectas:

$(1, -3, 0) \times (a, 0, -3) = (9, 3, 3a) \,//\, (3, 1, a) = \vec{d}_r$

$(1, -2a, 0) \times (0, 2, -1) = (2a, 1, 2) = \vec{d}_s$

Las coordenadas de los dos vectores no son proporcionales para ningún valor de a; por tanto, las rectas no son paralelas ni coincidentes. Para que estén en un mismo plano, se han de cortar en un punto.

Obtenemos un punto de cada una de las rectas:

r: $x = 0 \to y = 2,\ z = 1 \to P(0, 2, 1)$

s: $y = 0 \to z = -4,\ x = 1 - 4a \to P'(1 - 4a, 0, -4)$

$\overrightarrow{PP'}(1 - 4a, -2, -5)$

Para que las rectas se corten, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$ han de ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 2a & 1 & 2 \\ 1 - 4a & -2 & -5 \end{vmatrix} = a - 1 = 0 \to a = 1$$

Si $a = 1$, las rectas son secantes, y, por tanto, están contenidas en un plano. El plano será paralelo a (3, 1, 1) y a (2, 1, 2). Un vector normal al plano será:

$\vec{n} = (3, 1, 1) \times (2, 1, 2) = (1, -4, 1)$.

Un punto del plano es, por ejemplo, $P(0, 2, 1)$. Así, la ecuación del plano es:

$1(x - 0) - 4(y - 2) + 1(z - 1) = 0$

$x - 4y + z + 7 = 0$

b) Por lo obtenido en el apartado anterior, sabemos que:

- No hay ningún valor de a para el que las rectas sean paralelas.
- Si $a \neq 1$, las rectas se cruzan.

54 **Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 1, 1)$, es paralela al plano $\pi: x - y + z - 3 = 0$ y corta la recta $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.**

- Como corta a s, pasará por el punto $P(1, 3, k)$ para cierto valor de k.
- Como pasa por $A(1, 1, 1)$ y por $P(1, 3, k)$, un vector dirección es: $\overrightarrow{AP}(0, 2, k - 1)$.
- Como ha de ser paralelo al plano π, será perpendicular al vector normal de π, $\vec{n}(1, -1, 1)$. Por tanto:

  $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = -2 + k - 1 = 0 \rightarrow k = 3$, es decir: $\overrightarrow{AP}(0, 2, 2) \parallel (0, 1, 1)$
- Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

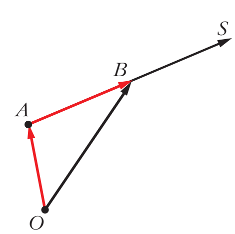
Página 180

CUESTIONES TEÓRICAS

55 **Llamamos S al punto simétrico de A respecto de B.**

Expresa $\overrightarrow{OS}$ (coordenadas del punto S) mediante suma de vectores de dos formas distintas.

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}$



56 **Un plano queda determinado por un punto A y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Qué condición tienen que cumplir estos dos vectores?**

Tener distinta dirección.

57 **a) Explica cómo se obtienen las ecuaciones paramétricas de un plano del que se conoce la ecuación implícita. Aplícalo al plano $x + 2y - z - 1 = 0$.**

b) ¿Cómo se hace si en la ecuación no aparece una de las incógnitas? Aplícalo al plano $2x - z + 8 = 0$.

a) Hacemos, por ejemplo, $y = \lambda$, $z = \mu$ y despejamos x.

En el caso del plano $x + 2y - z - 1 = 0$, quedaría: $x = 1 - 2y + z$; es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right\} \text{ son sus ecuaciones paramétricas.}$$

b) Se procede de la misma manera. Hacemos, por ejemplo, $x = \lambda$, $y = \mu$ y despejamos z. En el caso del plano $2x - z + 8 = 0$, quedaría: $z = 2x + 8$; es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 8 + 2\lambda \end{array}\right\} \text{ son sus ecuaciones paramétricas.}$$

58 **¿Cuáles son las ecuaciones implícitas de la recta $\dfrac{x-4}{0} = \dfrac{y+3}{0} = \dfrac{z-1}{2}$?**

No es admisible que el denominador de una fracción sea cero. Por tanto, esta expresión solo tiene valor simbólico. Se trata de una recta que pasa por el punto $P(4, -3, 1)$ y es paralela al vector $(0, 0, 2)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

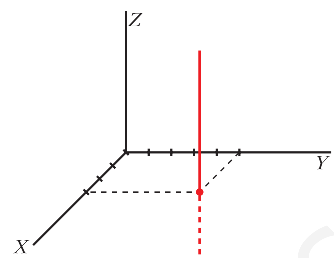
Las ecuaciones implícitas son: $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$

59 **Las ecuaciones $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 2 + \lambda + \mu \end{cases}$ tienen dos parámetros y sin embargo no representan un plano. Explica por qué. ¿Qué figura es?**

Realmente, los dos parámetros se comportan como uno solo. Estas ecuaciones paramétricas son equivalentes a estas otras:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si interpretamos las primeras ecuaciones en forma vectorial, se trata de una figura que pasa por (3, 5, 2) y se genera con los vectores (0, 0, 1) y (0, 0, 1). Obviamente, es un único vector paralelo al eje Z. Por tanto, es una recta paralela al eje Z que pasa por (3, 5, 2).



60 **¿Qué posición relativa deben tener dos rectas para que determinen un plano?**

Deben ser paralelas o secantes.

61 **Sean π_1 y π_2 dos planos paralelos y r_1 y r_2 dos rectas contenidas en π_1 y π_2, respectivamente. ¿Podemos asegurar que r_1 y r_2 son paralelas?**

No. Pueden ser paralelas o cruzarse.

62 **Las rectas r y s se cruzan. Si hallamos el plano que contiene a r y es paralelo a s, y el plano que contiene a s y es paralelo a r, ¿cómo son entre sí esos planos?**

Paralelos.

63 **Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos del plano $ax + by + cz + d = 0$. Prueba analíticamente que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al vector $\vec{n}(a, b, c)$.**

☛ ***Sustituye las coordenadas de A y de B en la ecuación del plano y resta las igualdades que obtienes.***

$$\left.\begin{array}{l} A \in \pi \quad \to \quad ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ B \in \pi \quad \to \quad ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{array}\right\}$$

Restando, obtenemos:

$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$; es decir:

$(a, b, c) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \to \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Por tanto, $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\vec{n}$.

64 **Considera la recta y el plano siguientes:**

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad \pi: a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

a) ¿Qué significa geométricamente que el sistema que se obtiene juntando las ecuaciones de la recta y el plano sea incompatible?

b) ¿Y si el sistema resulta compatible indeterminado?

a) Si el sistema es incompatible, significa que la recta y el plano son paralelos.

b) Si es compatible indeterminado, significa que la recta está contenida en el plano.

65 **Indica qué condición deben cumplir a, b, c y d para que el plano π: $ax + by + cz + d = 0$ sea:**

a) Paralelo al plano *OXY*.

b) Perpendicular al plano *OXY*.

c) Paralelo al eje *Z*.

d) Perpendicular al eje *X*.

e) No sea paralelo a ninguno de los ejes.

a) $a = b = 0, \ c \neq 0, \ d \neq 0$

b) $c = 0$

c) $c = 0, \ d \neq 0$

d) $b = c = 0$

e) $a \neq 0, \ b \neq 0, \ c \neq 0$

66 **a) Demuestra que la ecuación del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$, siendo a, b y c no nulos, puede escribirse así:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

b) Calcula los puntos de corte del plano $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{7} = 1$ con los ejes de coordenadas.

a) Si sustituimos las coordenadas de los puntos A, B y C en la ecuación dada, vemos que la cumplen.

Por otra parte, para ver los puntos de corte con los ejes de coordenadas del plano dado, hacemos lo siguiente:

- corte con el eje $X \ \to \ y = z = 0 \ \to \ x = a \ \to \ A(a, 0, 0)$
- corte con el eje $Y \ \to \ x = z = 0 \ \to \ y = b \ \to \ B(0, b, 0)$
- corte con el eje $Z \ \to \ x = y = 0 \ \to \ z = c \ \to \ C(0, 0, c)$

b) Evidentemente, los puntos de corte son:

$(5, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 7)$

PARA PROFUNDIZAR

67 **Considera el plano π: $ax + y + z + 1 = 0$ y las rectas:**

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

Calcula el valor de a para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.

☛ ***Halla, en función de a, los puntos de corte P, Q y R. Expresa después la dependencia lineal entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$.***

Hallamos los puntos de corte del plano con cada una de las tres rectas:

π con r_1: $\quad a + 2z + 1 = 0 \;\rightarrow\; z = \dfrac{-1-a}{2}$

$$P\left(1, \frac{-1-a}{2}, \frac{-1-a}{2}\right)$$

π con r_2: $\quad 2a + 3z + 1 = 0 \;\rightarrow\; z = \dfrac{-1-2a}{3}$

$$Q\left(2, \frac{-2-4a}{3}, \frac{-1-2a}{3}\right)$$

π con r_3: $\quad 3a + 4z + 1 = 0 \;\rightarrow\; z = \dfrac{-1-3a}{4}$

$$R\left(3, \frac{-3-9a}{4}, \frac{-1-3a}{4}\right)$$

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ han de tener sus coordenadas proporcionales:

$$\overrightarrow{PQ}\left(1, \frac{-1-5a}{6}, \frac{1-a}{6}\right); \quad \overrightarrow{QR}\left(1, \frac{-1-11a}{12}, \frac{1-a}{12}\right)$$

$$\frac{-1-5a}{6} = \frac{-1-11a}{12} \;\rightarrow\; -2-10a = -1-11a \;\rightarrow\; a = 1$$

$$\frac{1-a}{6} = \frac{1-a}{12} \;\rightarrow\; a = 1$$

Por tanto, $a = 1$.

Página 181

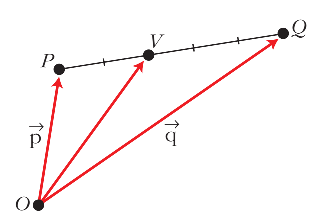
68 **PUNTOS INTERIORES EN UN SEGMENTO**

Dividimos el segmento *PQ* en cinco partes iguales y situamos el punto *V* a dos unidades de *P* y a tres de *Q*.

¿Cuáles son las coordenadas de *V*? Para hallarlas, procedemos así.

Llamamos: $\vec{p} = \overrightarrow{OP}, \; \vec{q} = \overrightarrow{OQ}$

$$\overrightarrow{OV} = \vec{p} + \frac{2}{5}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{2}{5}(\vec{q} - \vec{p}) = \frac{3}{5}\vec{p} + \frac{2}{5}\vec{q}$$



a) Si $P(4, -1, 8)$ y $Q(-1, 9, 8)$, halla las coordenadas de V.

b) Obtén las coordenadas de un punto W situado en el segmento PQ del siguiente modo: se divide el segmento en 7 partes iguales y situamos W a 2 de P. Aplícalo a los puntos $P(2, 11, -15)$, $Q(9, -3, 6)$.

c) Demuestra que si dividimos el segmento PQ en $m + n$ partes y situamos X a m unidades de P, las coordenadas de X son:

$$\frac{n}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q}$$

d) Demuestra que si $0 \le \alpha \le 1$, entonces $(1-\alpha)\vec{p} + \alpha\vec{q}$ es un punto de PQ.

a) $V = \frac{3}{5}(4, -1, 8) + \frac{2}{5}(-1, 9, 8) = (2, 3, 8)$

b) Razonando como en el caso anterior, llegamos a:

$$\overrightarrow{OW} = \vec{p} + \frac{2}{7}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{2}{7}(\vec{q} - \vec{p}) = \frac{5}{7}\vec{p} + \frac{2}{7}\vec{q}$$

Si consideramos el caso $P(2, 11, -15)$ y $Q(9, -3, 6)$, entonces:

$$W = \frac{5}{7}(2, 11, -15) + \frac{2}{7}(9, -3, 6) = (4, 7, -9)$$

c) Razonando como en los casos anteriores, tenemos que:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{p} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{m}{m+n}(\vec{q} - \vec{p}) =$$

$$= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q} = \frac{n}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q}$$

d) Llamamos $d = |\overrightarrow{PQ}|$. Sea X un punto del segmento PQ que esté a una distancia αd de P y $(1-\alpha)d$ de Q. (Como $0 \le \alpha \le 1$, entonces $0 \le \alpha d \le d$; luego X pertenece al segmento PQ).

Razonando como en los apartados anteriores, tenemos que las coordenadas de X son:

$$\frac{(1-\alpha)d}{d}\vec{p} + \frac{\alpha d}{d}\vec{q}, \text{ es decir, } (1-\alpha)\vec{p} + \alpha\vec{q}$$

Por tanto, este punto (que es X) es un punto del segmento PQ.

Página 181

AUTOEVALUACIÓN

1. Conociendo $A(-4, 3, 3)$ y $B(6, 3, -2)$, calcula:

a) El punto medio de AB.

b) El punto simétrico de B respecto de A.

c) El punto Q:

a) $M_{AB} = \left(\dfrac{-4+6}{2}, \dfrac{3+3}{2}, \dfrac{3-2}{2}\right) = \left(1, 3, \dfrac{1}{2}\right)$

b) Llamamos $S(\alpha, \beta, \gamma)$ al punto simétrico de B respecto de A. Así:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{6+\alpha}{2} = -4 & \to \alpha = -14 \\[2ex] \dfrac{3+\beta}{2} = 3 & \to \beta = 3 \\[2ex] \dfrac{-2+\gamma}{2} = 3 & \to \gamma = 8 \end{array}\right\} \ S(-14, 3, 8)$$

c) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB} = (-4, 3, 3) + \dfrac{2}{5}(10, 0, -5) =$

$= (-4, 3, 3) + (4, 0, -2) = (0, 3, 1)$

Por lo tanto, $Q(0, 3, 1)$.

2. Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(-5, 4, 1)$ y $C(7, 2, 4)$:

a) Determina la recta r que pasa por A y B.

b) Halla m y n para que $P(3, m, n)$ pertenezca a r.

c) Determina la ecuación del plano π que pasa por A, B y C.

d) Halla k para que $Q(k, 7, -1)$ pertenezca a π.

e) ¿Cuál es la posición relativa de r y π?

a) $\overrightarrow{AB}(-6, 1, 3)$, $\ r: \begin{cases} x = 1 - 6\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$

b) Sustituyendo $P(3, m, n)$ en las ecuaciones de r:

$$\begin{cases} 3 = 1 - 6\lambda \;\rightarrow\; \lambda = \dfrac{-1}{3} \\ m = 3 + \lambda \longrightarrow m = 3 + \left(\dfrac{-1}{3}\right) = \dfrac{8}{3} \\ n = -2 + 3\lambda \longrightarrow n = -2 + 3 \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\right) = -3 \end{cases}$$

Así, $m = \dfrac{8}{3}$ y $n = -3$, luego $P\left(3, \dfrac{8}{3}, -3\right)$.

c) $\overrightarrow{AB}(-6, 1, 3)$; $\overrightarrow{AC}(6, -1, 6)$

Hallamos un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, 1, 3) \times (6, -1, 6) = (9, 54, 0) \,//\, (1, 6, 0)$$

Por tanto, la ecuación de π será:

$$(x - 1) + 6(y - 3) + 0(z + 2) = 0$$

$$x + 6y - 19 = 0$$

- Otra forma de hacerlo sería:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z - 2 \\ -6 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; x + 6y - 19 = 0$$

Por supuesto, llegaríamos a la misma solución.

- Otra forma:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A \in \pi \;\rightarrow\; a + 3b - 2c + d = 0 \\ B \in \pi \;\rightarrow\; -5a + 4b + c + d = 0 \\ C \in \pi \;\rightarrow\; 7a + 2b + 4c + d = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene una solución indeterminada:

$$a = \lambda \qquad b = 6\lambda \qquad c = 0 \qquad d = -19\lambda$$

Haciendo $\lambda = 1$ se llega a la ecuación anterior:

$$x + 6y - 19 = 0$$

d) Si $Q(k, 7, -1) \in \pi$, tiene que cumplir su ecuación:

$$k + 6 \cdot 7 - 19 = 0 \;\Rightarrow\; k = -23 \;\rightarrow\; Q(-23, 7, -1) \in \pi$$

e) Como r pasa por A y B, y π pasa por A, B y C, obviamente r está contenida en π.

3. $r: \dfrac{x-17}{7} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-8}{2}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 15 + 4\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 19 + k\lambda \end{cases}$

Halla la posición relativa de las rectas r y s (si se cortan, di en qué punto):

a) Para $k = 2$.

b) Para $k = 5$.

a) $k = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(7, 0, 2);\ R(17, 1, 8) \in r \\ \vec{d}_s(4, -1, 2);\ S(15, -2, 19) \in s \end{array}\right\} \overrightarrow{SR}\,(2, 3, -11)$$

Veamos el rango de estos tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 77 + 24 + 4 - 42 = 63 \neq 0$$

Los tres vectores son linealmente independientes. Las rectas, por tanto, se cruzan.

b) $k = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(7, 0, 2);\ R(17, 1, 8) \in r \\ \vec{d}_s(4, -1, 5);\ S(15, -2, 19) \in s \end{array}\right\} \overrightarrow{SR}\,(2, 3, -11)$$

Veamos el rango de estos tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

El vector $\overrightarrow{SR}$ depende linealmente de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Las rectas, por tanto, se cortan.

Expresamos r en paramétricas e igualamos coordenada a coordenada:

$$r: \begin{cases} x = 17 + 7\mu \\ y = 1 \\ z = 8 + 2\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 17 + 7\mu = 15 + 4\lambda \\ 1 = -2 - \lambda \\ 8 + 2\mu = 19 + 5\lambda \end{cases}$$

El sistema tiene solución: $\lambda = -3$; $\mu = -2$

Sustituimos $\lambda = -3$ en s:

$$\left.\begin{array}{l} x = 15 + 4(-3) = 3 \\ y = -2 - (-3) = 1 \\ z = 19 + 5(-3) = 4 \end{array}\right\} \text{Se cortan en el punto } (3, 1, 4)$$

Se obtiene el mismo punto sustituyendo $\mu = -2$ en las ecuaciones de r.

4. **Determina las ecuaciones de la recta que corta a r y a s y es paralela a t:**

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -9 - \lambda \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = 8 - \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -6 + 2\lambda \end{cases}$$

Tomamos un punto genérico de r, $R(2 + \lambda, -3 - \lambda, 6 + \lambda)$, y otro de s, $S(3, \mu, -9 - \mu)$.

Forzamos al vector $\overrightarrow{RS}$ a que sea paralelo al vector director de t, $(-1, 1, 2)$, haciendo que sus coordenadas sean proporcionales.

$$\overrightarrow{RS} = (1 - \lambda, 3 + \lambda + \mu, -15 - \lambda - \mu) \,//\, (-1, 1, 2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1-\lambda}{-1} &= \frac{3+\lambda+\mu}{1} \\ \frac{1-\lambda}{-1} &= \frac{-15-\lambda-\mu}{2} \end{aligned} \right\}$$ La solución de este sistema es: $\lambda = -3$, $\mu = -4$

Para $\lambda = -3$ obtenemos el punto $(-1, 0, 3)$, que pertenece a r y a la recta buscada. Por tanto, la ecuación de esta es:

$$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

5. **Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y las rectas:**

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 7 - \lambda \\ y = -15 + 3\lambda \\ z = 7 \end{cases}$$

Halla una recta s que pasa por P y corta a r_1 y a r_2.

La recta pedida, s, será la intersección de dos planos:

- π_1, que contiene a P y a r_1.
- π_2, que contiene a P y a r_2.

El vector director de la recta r_1, $\vec{d}_1(0, 1, 2)$, es paralelo al plano y el vector que va desde el punto P al punto $R_1(1, 5, 2)$ de la recta r_1, $\overrightarrow{PR}_1(-1, 5, 1)$, también lo es. Por lo tanto, el plano π_1 será:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ 9(x-2) + 2y - (z-1) = 0 \qquad \pi_1: 9x + 2y - z - 17 = 0$$

De la misma forma, π_2 vendrá dado así:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 5 & -15 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ -18(x-2) - 6y = 0 \qquad \pi_2: 3x + y - 6 = 0$$

s es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\left.\begin{array}{l} 9x + 2y - z - 17 = 0 \\ 3x + y \quad\;\; - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{array}\right\}$$

6. Describe y representa cada una de las siguientes figuras:

a) $y = 3$

b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

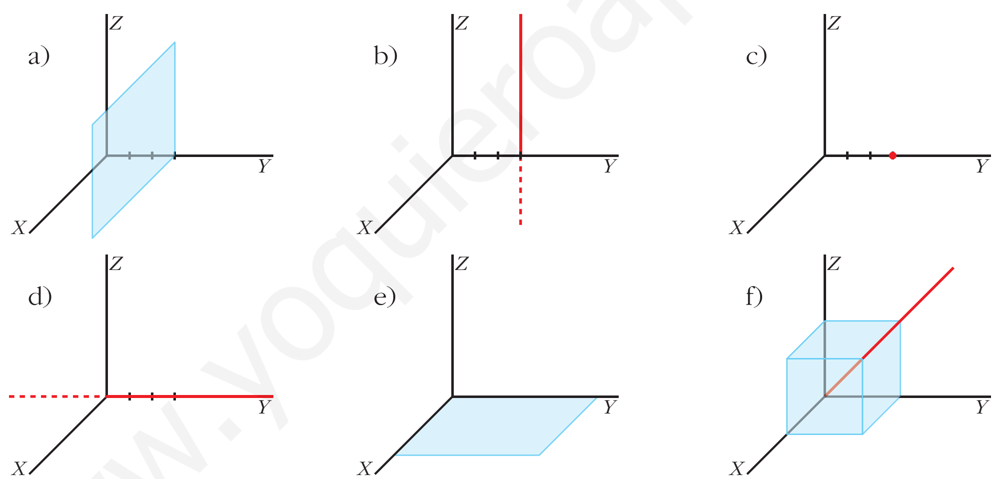
d) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$

f) $x = y = z$

a) Plano b) Recta c) Punto

d) Recta e) Plano f) Recta



7 PROBLEMAS MÉTRICOS

Página 183

REFLEXIONA Y RESUELVE

Diagonal de un ortoedro

■ **Halla la diagonal de los ortoedros cuyas dimensiones son las siguientes:**

I) $a = 2,\ b = 1,\ c = 2$ **II)** $a = 4,\ b = 12,\ c = 3$ **III)** $a = 7,\ b = 4,\ c = 5$

I) $\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

II) $\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$

III) $\sqrt{7^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{90} \simeq 9{,}49$

Distancia entre dos puntos

■ **Halla la distancia de $P(1, 3, 6)$ a $Q(5, 5, 7)$.**

$\overrightarrow{PQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21} \simeq 4{,}58$

Distancia de un punto a una recta

■ **Siguiendo el proceso anterior, halla la distancia del punto $P(8, 6, 12)$ a la recta r:**

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$

- Ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a r:

  $0 \cdot (x - 8) - 1 \cdot (y - 6) + 2 \cdot (z - 12) = 0$; es decir, $\pi: -y + 2z - 18 = 0$

- Punto, Q, de corte de r y π:

  $-(1 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 18 = 0$

  $-1 + \lambda + 14 + 4\lambda - 18 = 0$

  $5\lambda - 5 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = 1$

  El punto es $Q(2, 0, 9)$.

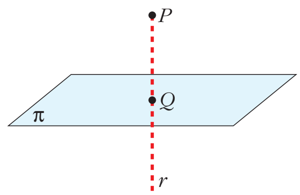
- Calculamos la distancia:

  $dist\,(P, r) = dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-6, -6, -3)| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$

Distancia de un punto a un plano

■ **Halla, paso a paso, la distancia del punto $P(4, 35, 70)$ al plano π:**

$$\pi: 5y + 12z - 1 = 0$$



— Hallamos la ecuación de la recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π.

— Obtenemos el punto, Q, de intersección de r y π.

— La distancia de P a π es igual a la distancia entre P y Q.

Para el punto y el plano dados:

- Recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π:

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 35 + 5\lambda \\ z = 70 + 12\lambda \end{cases}$$

- Punto, Q, de intersección de r y π:

$$5(35 + 5\lambda) + 12(70 + 12\lambda) - 1 = 0$$

$$175 + 25\lambda + 840 + 144\lambda - 1 = 0$$

$$169\lambda + 1\,014 = 0 \quad \to \quad \lambda = -6$$

El punto es $Q(4, 5, -2)$.

- Calculamos la distancia:

$$dist\ (P, \pi) = dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(0, -30, -72)| = \sqrt{900 + 5\,184} = \sqrt{6\,084} = 78$$

Página 184

1. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por (1, 0, 7) y es perpendicular al plano $5x - 3z + 4 = 0$.

El vector normal al plano, $\vec{n}(5, 0, -3)$, es un vector dirección de la recta r que buscamos. Por tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 0 \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$$

2. Halla la ecuación implícita del plano que pasa por (1, –3, 5) y es perpendicular a la recta $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+7}{-6} = \dfrac{z}{1}$.

Si el plano que buscamos, π, es perpendicular a la recta dada, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: $(5, -6, 1)$. Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x - 1) - 6(y + 3) + 1(z - 5) = 0 \quad \to \quad 5x - 6y + z - 28 = 0$$

3. **Halla la ecuación del plano paralelo a $5x - y + 4 = 0$ que pasa por (1, 0, –3).**

Si son paralelos, el vector normal es el mismo, (5, –1, 0). Por tanto, la ecuación del plano que buscamos es:

$$5(x - 1) - y + 0(z + 3) = 0 \;\rightarrow\; 5x - y - 5 = 0$$

4. **Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por (5, –7, –2).**

$$r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 4 - 6\lambda \end{cases}$$

Si el plano que buscamos, π, es perpendicular a r, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: (5, 2, –6)

Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x - 5) + 2(y + 7) - 6(z + 2) = 0 \;\rightarrow\; 5x + 2y - 6z - 23 = 0$$

Página 185

5. **Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s:**

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

El plano pasa por (5, –1, 8) y es paralelo a (1, 0, 2) y a (3, –1, 4). Un vector normal al plano es:

$(1, 0, 2) \times (3, -1, 4) = (2, 2, -1)$

La ecuación del plano es:

$$2(x - 5) + 2(y + 1) - 1(z - 8) = 0; \text{ es decir: } 2x + 2y - z = 0$$

6. **Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a r que pasa por $P(0, -1, -3)$:**

$$r: \begin{cases} 3x - 5y + 7z - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de la recta es: $(3, -5, 7) \times (1, -2, 1) = (9, 4, -1)$

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$

Página 187

1. Halla el ángulo entre las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x = \ \ 3 - 5\lambda \\ y = \ \ 2 + 3\lambda \\ z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2y + 3z \quad = 0 \\ 2x - \ y \qquad + 4 = 0 \end{cases}$$

El vector dirección de r es $\vec{d}_r = (-5, 3, 0) = \vec{u}$

El vector dirección de s es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\vec{d}_r = (1, -2, 3) \times (2, -1, 0) = (3, 6, 3)//(1, 2, 1) = \vec{v}$$

Por tanto:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \frac{|(-5, 3, 0) \cdot (1, 2, 1)|}{\sqrt{25 + 9 + 0}\ \sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{34}\ \sqrt{6}} = 0{,}070014 \ \rightarrow\ \alpha = 85°\ 59'\ 7''$$

2. Calcula el ángulo que forma la recta $r: \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ con el plano $\pi: x + 3y - z + 1 = 0$.

Llamamos $90° - \alpha$ al ángulo formado por las direcciones de $\vec{d}$ y $\vec{n}$ sin tener en cuenta sus sentidos.

$\vec{d}(7, -1, 3) \ //\ r \qquad \vec{n}(1, 3, -1) \perp \pi$

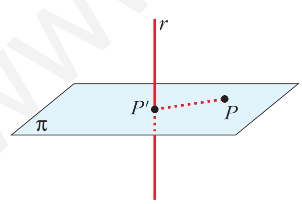
$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0{,}039$$

$90° - \alpha = 87°\ 45'\ 1'' \ \rightarrow\ \alpha = 2°\ 14'\ 59''$

Página 189

1. Halla razonadamente la distancia de $P(5, 6, 6)$ a la recta $r: (5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$. Hazlo por cada uno de los tres métodos que has aprendido.

— Solución, obteniendo previamente el punto P':



- Plano, π, que pasa por P y es perpendicular a r:

$$5(x - 5) - 1(y - 6) + 1(z - 6) = 0$$

es decir: $\pi: 5x - y + z - 25 = 0$

- Intersección, P', de π y r:

$5(5\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda - 25 = 0$

$25\lambda - 2 + \lambda + \lambda - 25 = 0$

$27\lambda - 27 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = 1$

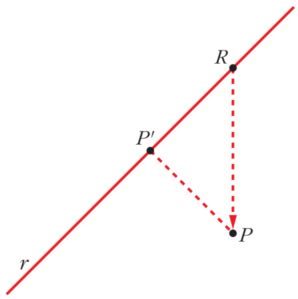
El punto es $P'(5, 1, 1)$.

- Distancia entre P y r:

$$dist\,(P, r) = dist\,(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(0, -5, -5)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

— Segundo método:

$R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$ es un punto genérico de la recta r.



El vector $\overrightarrow{RP}(5 - 5\lambda, 4 + \lambda, 6 - \lambda)$ es variable.

El vector que nos interesa es perpendicular a la recta. Por tanto, cumple:

$(5, -1, 1) \cdot \overrightarrow{RP} = 0$; es decir:

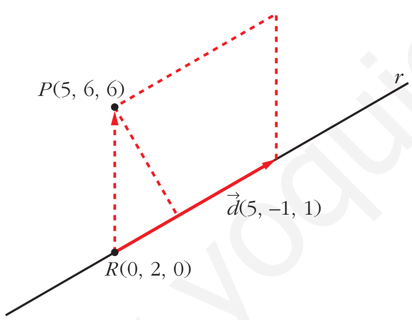
$5(5 - 5\lambda) - 1(4 + \lambda) + 1(6 - \lambda) = 0$

$25 - 25\lambda - 4 - \lambda + 6 - \lambda = 0$

$-27\lambda + 27 = 0 \;\;\rightarrow\;\; \lambda = 1$

El resto, es igual que con el método anterior.

— Solución directa a partir del producto vectorial:



$$dist\,(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

$$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 4, 6) \times (5, -1, 1) = (10, 25, -25)$$

$$|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}| = \sqrt{100 + 625 + 625} = \sqrt{1\,350}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27}$$

$$dist\,(P, r) = \frac{\sqrt{1\,350}}{\sqrt{27}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

Página 190

2. Halla la distancia del punto $P(8, 5, -6)$ al plano π: $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

$$dist\,(P, \pi) = \frac{|8 + 10 + 12 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{33}{3} = 11 \text{ u}$$

3. Halla la distancia de los puntos $Q(3, 0, 3)$ y $R(0, 0, 0)$ al plano del ejercicio anterior.

$$dist\,(Q, \pi) = \frac{|3 - 6 + 3|}{3} = 0 \;\; (Q \in \pi)$$

$$dist\,(R, \pi) = \frac{3}{3} = 1$$

Página 191

4. Calcula la distancia entre la recta y el plano:

$$\boldsymbol{r}: (1 - 3\lambda,\ 2 + \lambda,\ 1 - \lambda) \qquad \pi: x + 3y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{d}(-3, 1, -1) \,//\, r \\ \vec{n}(1, 3, 0) \perp \pi\end{array}\right\} \quad \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{d} \perp \vec{n} \;\Rightarrow\; r \,//\, \pi$$

Puesto que la recta es paralela al plano (o, acaso, contenida en él), la distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de cualquier punto de r a π:

$$dist\ (r, \pi) = dist\ [(1, 2, 1), \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2{,}21$$

5. Calcula la distancia entre estos planos:

$$\pi: y - 5z + 4 = 0 \qquad \pi': 2y - 10z = 0$$

Los planos son paralelos, pues sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro:

$P(0, 5, 1)$ es un punto de π'. Por tanto:

$$dist\ (\pi, \pi') = dist\ (P, \pi) = \frac{|5 - 5 + 4|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{26}} \approx 0{,}78$$

Página 193

6. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante cada uno de los tres métodos aprendidos:

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

- Primer método:

  Hallamos el plano, π, que contiene a r y es paralelo a s:

  $$\left.\begin{array}{l}(12, 0, 5) \,//\, r \\ (0, 1, 0) \,//\, s\end{array}\right\} \quad (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

  El punto $(13, 2, 8)$ es de r, y, por tanto, de π.

  Ecuación de π: $-5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0$, es decir:

  $$-5x + 12z - 31 = 0$$

  $$dist\ (r, s) = dist\ (s, \pi) = dist\ [(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13$$

- Segundo método:

  Punto genérico de r: $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$

  Punto genérico de s: $S(6, 6 + \mu, -9)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS} = (-7 - 12\lambda,\ 4 + \mu,\ -17 - 5\lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 \to & -169\lambda - 169 = 0 & \to \quad \lambda = -1 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 \to & 4 + \mu = 0 & \to \quad \mu = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s, obtenemos los puntos R y S: $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$

$$dist\ (r, s) = dist\ (R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

- Tercer método:

$$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$$

$R(13, 2, 8)$ $\quad \vec{d}(12, 0, 5)$

$S(6, 6, -9)$ $\quad \vec{d'}(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{RS}(-7, 4, -17)$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \ \to \ \text{Volumen} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d'}| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Por tanto: $dist\ (r, s) = \dfrac{169}{13} = 13$

7. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante tres métodos distintos:

$$r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 7\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 1 - 5\mu \end{cases}$$

- Primer método:

Hallamos el plano, π, que contiene a r y es paralelo a s:

$$\left.\begin{array}{l} (5, -1, 1) \,//\, r \\ (7, -5, -5) \,//\, s \end{array}\right\} (5, -1, 1) \times (7, -5, -5) = (10, 32, -18) \,//\, (5, 16, -9) \perp \pi$$

El punto $(0, 2, 0)$ es de r, y, por tanto, de π.

Ecuación de π: $5(x - 0) + 16(y - 2) - 9(z - 0) = 0$, es decir:

$$5x + 16y - 9z - 32 = 0$$

$$dist\ (r, s) = dist\ (s, \pi) = dist\ [(5, 1, 1), \pi] = \frac{|25 + 16 - 9 - 32|}{\sqrt{25 + 256 + 81}} = 0$$

(Las rectas r y s se cortan).

- Segundo método:

  Punto genérico de r: $R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$

  Punto genérico de s: $S(5 + 7\mu, 1 - 5\mu, 1 - 5\mu)$

  Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

  $$\overrightarrow{RS} = (5 + 7\mu - 5\lambda, -1 - 5\mu + \lambda, 1 - 5\mu - \lambda)$$

  De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

  $$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (5, -1, 1) = 0 & \to \quad 27 + 35\mu - 27\lambda = 0 \quad \to \quad \mu = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (7, -5, -5) = 0 & \to \quad 35 + 99\mu - 35\lambda = 0 \quad \to \quad \lambda = 1 \end{cases}$$

  Sustituyendo en r y en s, obtenemos los puntos R y S: $R(5, 1, 1)$, $S(5, 1, 1)$.

  $$dist\ (r, s) = dist\ (R, S) = 0$$

- Tercer método:

  $$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$$

  $R(0, 2, 0)$ $\quad$ $\vec{d}(5, -1, 1)$

  $S(5, 1, 1)$ $\quad$ $\vec{d'}(7, -5, -5)$

  $\overrightarrow{RS}(5, -1, 1)$

  $$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}] = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(las dos primeras filas son iguales).}$$

  Por tanto: $dist\ (r, s) = 0$

Página 195

1. Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en estos puntos:

$A(1, 3, 5)$, $B(2, 5, 8)$ y $C(5, 1, -11)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(1, 2, 3) \\ \overrightarrow{AC}(4, -2, -16) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-26, 28, -10)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{26^2 + 28^2 + 10^2} = \sqrt{1\,560}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1\,560}}{2} \approx 19{,}75 \text{ u}^2$$

2. **Calcula el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $A(2, 1, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(4, 3, 2)$ y $D(1, 5, 6)$.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2)\\ \overrightarrow{AC}(2, 2, -2)\\ \overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)\end{array}\right\} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volumen} = \frac{30}{6} = 5 \text{ u}^3$$

Página 196

1. **Halla el L.G. de los puntos que equidistan de:**

a) $A(4, -1, 7)$ **y** $B(-2, 5, 1)$

b) $\pi: x + y + z - 2 = 0$ **y** $\pi': x - y + z - 2 = 0$

c) $\pi: x - 3y + 2z - 8 = 0$ **y** $\pi': x - 3y + 2z = 0$

a) $dist\ (X, A) = dist\ (X, B)$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 14z + 49 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 2z + 1$$

$$-12x + 12y - 12z + 36 = 0 \quad \to \quad x - y + z - 3 = 0$$

Es un plano: el plano mediador del segmento AB.

b) $dist\ (X, \pi) = dist\ (X, \pi')$

$$\frac{|x + y + z - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{|x - y + z - 2|}{\sqrt{3}} \qquad \text{Dos posibilidades:}$$

- $x + y + z - 2 = x - y + z - 2 \quad \to \quad 2y = 0 \quad \to \quad y = 0$
- $x + y + z - 2 = -x + y - z + 2 \quad \to \quad 2x + 2z - 4 = 0 \quad \to \quad x + z - 2 = 0$

Son dos planos: los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y π'. Los dos planos obtenidos se cortan en la recta r determinada por los puntos $(1, 0, 1)$ y $(0, 0, 2)$, al igual que π y π'.

Además, son perpendiculares, pues $(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0$.

c) $dist\ (X, \pi) = dist\ (X, \pi')$

$$\frac{|x - 3y + 2z - 8|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{|x - 3y + 2z|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} \qquad \text{Dos posibilidades:}$$

- $x - 3y + 2z - 8 = x - 3y + 2z \quad \to \quad -8 = 0 \quad \to$ Imposible.
- $x - 3y + 2z - 8 = -x + 3y - 2z \quad \to \quad 2x - 6y + 4z - 8 = 0 \quad \to \quad x - 3y + 2z - 4 = 0$

Los planos π y π' son paralelos. El plano obtenido es también paralelo a ellos.

Página 197

2. **Averigua si $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 25 = 0$ corresponde a la ecuación de una esfera, y halla su centro y su radio.**

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D} = \sqrt{1 + 25 + 0 - 25} = 1$$

Es una esfera de radio 1. Su centro es $(-1, 5, 0)$.

3. **Halla el radio de la circunferencia en la que el plano $4x - 3z - 33 = 0$ corta a la esfera $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 169$.**

La esfera tiene el centro en $Q(2, -5, 0)$ y su radio es $R = 13$.

La distancia de Q al plano es: $d = \dfrac{|8 - 0 - 33|}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{25}{5} = 5$

Por tanto: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

El radio de la circunferencia es 12.

4. **Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a $O(0, 0, 0)$ y $Q(10, 0, 0)$ es 68. Tras efectuar los cálculos, comprueba que la superficie resulta ser una esfera de centro (5, 0, 0) y radio 3.**

$$(x^2 + y^2 + z^2) + [(x - 10)^2 + y^2 + z^2] = 68$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 20x + 100 + y^2 + z^2 = 68$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20x + 32 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

$$(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Es una esfera de centro $(5, 0, 0)$ y radio 3.

Página 198

5. **Halla el L.G. de los puntos cuya suma de distancias a $F(0, 0, 5)$ y $F'(0, 0, -5)$ es 26.**

$$dist\,(X, F) + dist\,(X, F') = 26$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 26$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} = 26 - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$$

$$x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 676 + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{(z + 5)^2} - 52\sqrt{\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{(z + 5)^2}}$$

$$52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 676 + x^2 + y^2 + z^2 + 25 + 10z - x^2 - y^2 - z^2 - 25 + 10z$$

$$52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 20z + 676$$

$13\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 5z + 169$

$169\,[x^2 + y^2 + (z + 5)^2] = 25z^2 + 1\,690z + 28\,561$

$169\,[x^2 + y^2 + z^2 + 10z + 25] = 25z^2 + 1\,690z + 28\,561$

$169x^2 + 169y^2 + 169z^2 + \cancel{1\,690z} + 4\,225 = 25z^2 + \cancel{1\,690z} + 28\,561$

$169x^2 + 169y^2 + 144z^2 = 24\,336$

$\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{144} + \dfrac{z^2}{169} = 1$

Es un elipsoide.

6. **Halla el L.G. de los puntos cuya diferencia de distancias a $F(5, 0, 0)$ y $F'(-5, 0, 0)$ es 6.**

$|\,dist\,(X, F) - dist\,(X, F')\,| = 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 = 36 + (x+5)^2 + y^2 + z^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$

$\cancel{x^2} - 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} = 36 + \cancel{x^2} + 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$

$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = 5x + 9$

$9[x^2 + 10x + 25 + y^2 + z^2] = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + \cancel{90x} + 225 + 9y^2 + 9z^2 = 25x^2 + \cancel{90x} + 81$

$-16x^2 + 9y^2 + 9z^2 = -144$

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{16} = 1$

Es un hiperboloide.

7. **Halla el L.G. de los puntos que equidistan del plano $x + \dfrac{1}{4} = 0$ y del punto $\left(\dfrac{1}{4}, 0, 0\right)$. ¿A qué se parece la ecuación obtenida?**

$dist\,(X, F) = dist\,(X, \pi)$, donde π: $x + \dfrac{1}{4} = 0$ y $F\left(\dfrac{1}{4}, 0, 0\right)$.

$\sqrt{\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + y^2 + z^2} = \left|x + \dfrac{1}{4}\right|$

$\cancel{x^2} - \dfrac{1}{2}x + \cancel{\dfrac{1}{16}} + y^2 + z^2 = \cancel{x^2} + \dfrac{1}{2}x + \cancel{\dfrac{1}{16}}$

$x = y^2 + z^2$

Es un paraboloide. Su ecuación es muy similar a la de una parábola.

Página 204

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Ángulos

1 **Halla el ángulo que forman las rectas r y s en cada caso. Comprueba, previamente, que las rectas se cortan:**

a) $r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 15 + 5\lambda \end{cases}$

a) $\vec{d}_r(-2, 3, -2)$; $P(5, 4, 0)$

$\vec{d}_s(-1, 5, 1)$; $P'(5, 4, 0)$

Como $P = P'$ y $\vec{d}_s$ no es proporcional a $\vec{d}_r$, entonces sabemos que se cortan en el punto P.

Para ver el ángulo que forman, hacemos el producto escalar de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$:

$|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s| = |(-2, 3, -2) \cdot (-1, 5, 1)| = |2 + 15 - 2| = |15|$

$|\vec{d}_r| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$; $|\vec{d}_s| = \sqrt{1 + 25 + 1} = \sqrt{27}$

$$\cos\alpha = \frac{|15|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{27}} = 0{,}7 \rightarrow \alpha = 45°\ 33'\ 42''$$

b) Las ecuaciones paramétricas de r son:

$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - \lambda \end{cases}$

Por lo tanto:

$\vec{d}_r(1, 1, -1)$; $P(3, 0, 15)$

$\vec{d}_s(3, 2, 5)$; $P'(3, 0, 15)$

Como $P = P'$ y $\vec{d}_s$ no es proporcional a $\vec{d}_r$, entonces sabemos que r y s se cortan en el punto P.

$|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s| = |(1, 1, -1) \cdot (3, 2, 5)| = 3 + 2 - 5 = 0$

Como su producto escalar es 0, sabemos que son perpendiculares, por lo que $\alpha = 90°$.

2 **Halla el valor de m para que r y s formen un ángulo de 90°:**

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = m\lambda \end{cases}$$

$\vec{d}_r(-5, 1, -1)$; $\vec{d}_s(1, 2, m)$

Para que r y s formen 90°, el producto escalar de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ tiene que ser 0:

$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = (-5, 1, -1) \cdot (1, 2, m) = -5 + 2 - m = 0 \rightarrow m = -3$

s3 **Halla, en cada caso, el ángulo que forman la recta y el plano:**

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$ $\qquad \pi: x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r: x = \lambda,\ y = 1 + 2\lambda,\ z = -2$ $\qquad \pi: 2x - y + z = 0$

c) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$ $\qquad \pi: x + z = 17$

a) $\vec{d}(-2, 4, 2)$; $\vec{n}(1, -2, -1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|-2 - 8 - 2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \rightarrow 90° - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90°$$

Observación: Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ tienen la misma dirección; luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90°$.

b) $\vec{d}(1, 2, 0)$; $\vec{n}(2, -1, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \rightarrow 90° - \alpha = 90° \rightarrow \alpha = 0°$$

c) $\vec{d}(2, 1, 1)$; $\vec{n}(1, 0, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 90° - \alpha = 30° \rightarrow \alpha = 60°$$

s4 **Calcula el ángulo que forman los dos planos siguientes:**

$$\alpha: z = 3 \qquad \beta: x - y + 2z + 4 = 0$$

$\vec{n}_\alpha(0, 0, 1)$; $\vec{n}_\beta(1, -1, 2)$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\,|\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0{,}816 \rightarrow \varphi = 35°\ 15'\ 52''$$

5 **Halla los tres ángulos de los triángulos cuyos vértices son:**

a) $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, 1, 1)$

b) $A(2, 7, 3)$, $B(1, 2, 5)$, $C(-1, -2, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (3, 1, 1)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} = 0{,}73855 \;\rightarrow\; \hat{A} = 42°\ 23'\ 31''$$

$\overrightarrow{BA} = (-1, -2, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (2, -1, 0)$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = 0 \;\rightarrow\; \hat{B} = 90°$$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 47°\ 36'\ 29''$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -5, 2)$

$\overrightarrow{AC} = (-3, -9, 2)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{52}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{94}} = 0{,}97922 \;\rightarrow\; \hat{A} = 11°\ 42'\ 6''$$

$\overrightarrow{BA} = (1, 5, -2)$

$\overrightarrow{BC} = (-2, -4, 0)$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-22}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{20}} = -0{,}898 \;\rightarrow\; \hat{B} = 153°\ 54'\ 56''$$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 14°\ 22'\ 58''$

6 **Calcula el ángulo que forma el plano siguiente con cada uno de los ejes coordenados:**

$$\pi: x - 2y + z = 0$$

El ángulo entre una recta y un plano es complementario del que forma dicha recta con la dirección normal al plano.

El vector normal a π es $\vec{n}(1, -2, 1)$

- El ángulo que forma π con el eje X, de vector director $(1, 0, 0)$, es:

$$\cos (90° - \alpha) = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(1, 0, 0)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{6}} = 0{,}408 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 90° - \alpha = 65°\ 54'\ 19'' \;\rightarrow\; \alpha = 24°\ 5'\ 41''$$

- El ángulo que forma π con el eje Y, de vector director (0, 1, 0), es:

$$cos\,(90° - \beta) = \frac{|(0,\ 1,\ 0) \cdot (1,\ -2,\ 1)|}{|(0,\ 1,\ 0)|\ |(1,\ -2,\ 1)|} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = 0{,}8165 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 90° - \beta = 35°\ 15'\ 52'' \ \rightarrow\ \beta = 54°\ 44'\ 8''$$

- El ángulo que forma π con el eje Z, de vector director (0, 0, 1), es:

$$cos\,(90° - \gamma) = \frac{|(0,\ 0,\ 1) \cdot (1,\ -2,\ 1)|}{|(0,\ 0,\ 1)|\ |(1,\ -2,\ 1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}408 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 90° - \gamma = 65°\ 54'\ 19'' \ \rightarrow\ \gamma = 24°\ 5'\ 41''$$

Distancias

7 **Calcula la distancia que hay entre los siguientes pares de puntos:**

a) $\boldsymbol{A(2,\ 5,\ -2),\ \ B(-1,\ 1,\ -2)}$ **b)** $\boldsymbol{A(-1,\ 7,\ 4),\ \ B(-1,\ 2,\ 16)}$

a) $dist\ (A,\ B) = |\overrightarrow{AB}| = |(-3,\ -4,\ 0)| = 5$ u

b) $dist\ (A,\ B) = |\overrightarrow{AB}| = |(0,\ -5,\ 12)| = 13$ u

8 **Considera la recta** $\boldsymbol{r}$ **y el plano** π **siguientes:**

$$r: \begin{cases} x - y = -3 \\ x + z = \ \ 1 \end{cases} \qquad \pi:\ x + y - 2z = 1$$

a) Halla las coordenadas del punto $\boldsymbol{S}$ **donde se cortan** $\boldsymbol{r}$ **y** π.

b) Calcula la distancia del punto $\boldsymbol{P(4,\ 0,\ 1)}$ **al punto** $\boldsymbol{S}$ **del apartado anterior.**

a) Para hallar el punto S donde se intersecan r y π, resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = -3 \\ x + z = \ \ 1 \\ x + y - 2z = \ \ 1 \end{array}\right\} \ \rightarrow\ S(0,\ 3,\ 1)$$

b) $dist\ (P,\ S) = |\overrightarrow{PS}| = |(-4,\ 3,\ 0)| = 5$ u

9 **Tenemos la recta** $\boldsymbol{r}$ **y los planos** π **y** σ **siguientes:**

$$r: \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \pi:\ x + 2y - z = 1 \\ \sigma:\ x - y + z = 3 \end{array}$$

a) Halla el punto $\boldsymbol{P}$ **donde se cortan la recta** $\boldsymbol{r}$ **y el plano** π.

b) Calcula las coordenadas del punto $\boldsymbol{Q}$ **donde se cortan** $\boldsymbol{r}$ **y** σ.

c) Obtén la distancia que separa a los puntos $\boldsymbol{P}$ **y** $\boldsymbol{Q}$ **de los apartados anteriores.**

a) La intersección de r con π la podemos hallar sustituyendo las coordenadas de r en π:

$$8\lambda + 2(2) - (3 - 6\lambda) = 1 \rightarrow \lambda = 0$$

Por lo que el punto es $P = (0, 2, 3)$

b) De la misma forma hallamos Q:

$$8\lambda - 2 + 3 - 6\lambda = 3 \rightarrow \lambda = 1$$

Así, $Q = (8, 2, -3)$.

c) $dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(8, 0, -6)| = 10$ u

10 **Calcula, en cada caso, la distancia entre el punto P y el plano π:**

a) $\boldsymbol{P(2, -3, 1), \ \pi: 3x - 4z = 3}$

b) $\boldsymbol{P(0, 1, 3), \ \pi: x - y - 2z + 3 = 0}$

c) $\boldsymbol{P(2, 0, 1), \ \pi: x + y - 2z = 0}$

a) $P(2, -3, 1); \ \pi: 3x - 4z - 3 = 0$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ u}$$

b) $P(0, 1, 3); \ \pi: x - y - 2z + 3 = 0$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|0 - 1 - 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \simeq 1{,}633 \text{ u}$$

c) $P(2, 0, 1); \ \pi: x + y - 2z = 0$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = 0 \text{ u}$$

11 **Calcula la distancia entre el punto (3, –4, 1) y el plano $y = 3$.**

$P(3, -4, 1); \ \pi: y - 3 = 0$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|-4 - 3|}{\sqrt{1}} = 7 \text{ u}$$

12 **Calcula la distancia entre el punto $Q(2, -1, 0)$ y el plano que contiene a**

$$\boldsymbol{P(2, 0, 4) \text{ y a } s: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}}$$

El plano π, que contiene a P y a s, tiene como vectores dirección $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$, siendo P' un punto de s como $P'(3, 2, 4)$.

Hallamos el vector normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{d}_s \times \overrightarrow{PP'} = (-2, 3, 0) \times (1, 2, 0) = (0, 0, -7)$$

Tomamos un vector proporcional a $\vec{n}$: $(0, 0, 1)$

Por tanto, el plano es π: $z = 4$

$$dist\,(Q, \pi) = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{1}} = 4 \text{ u}$$

13 **Halla la distancia entre los siguientes pares de planos:**

a) π_1: $x - 2y + 3 = 0$; π_2: $2x - 4y + 1 = 0$

b) π_1: $3x - 2y + z - 2 = 0$; π_2: $2x - y + z = -5$

a) Vemos claramente que los dos planos son paralelos. Por tanto, tomamos un punto P de π_1 y hallamos la distancia del punto P al plano π_2.

$$P(-3, 0, 0) \in \pi_1$$

$$dist\,(P, \pi_2) = \frac{|2 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = 1{,}12 \text{ u}$$

b) Los vectores normales a los dos planos no son proporcionales, por lo que los planos se cortan. La distancia es, por tanto, cero.

Página 205

14 **Halla la distancia de la recta r al plano π en cada caso:**

a) $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + 7\lambda \end{cases}$ $\qquad \pi$: $3x - 4y - 3 = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ $\qquad \pi$: $7x - 2y - z + 1 = 0$

Lo primero que tenemos que ver es si el plano y la recta se cortan: si el vector normal al plano es perpendicular al vector dirección de la recta, entonces, o son paralelos, o la recta está contenida en el plano.

a) $\vec{d}_r(4, 3, 7)$; $\quad \vec{n}(3, -4, 0)$

$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 12 - 12 = 0 \;\rightarrow\;$ son perpendiculares

Como el punto $P(2, 0, -1) \in r$ no está contenido en el plano, r y π son paralelos, por lo que la distancia de r a π es igual a la distancia de cualquier punto de r a π. Tomamos P como punto de r.

$$dist\,(r, \pi) = dist\,(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \text{ u}$$

b) $\vec{d}_r(2, 0, 1)$; $\vec{n}(7, -2, -1)$

$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 14 - 1 = 13 \neq 0 \rightarrow$ no son perpendiculares $\rightarrow$ r y π se cortan $\rightarrow$

$\rightarrow$ $dist\ (r, \pi) = 0$

15 **Calcula la distancia que hay entre el punto $P(3, 1, 6)$ y la recta**

$$r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$$ **mediante los siguientes pasos:**

a) Halla un plano, π, perpendicular a r que contenga a P.

b) Obtén la intersección de π con r. Llama a ese punto Q.

c) Calcula la distancia de P a Q.

a) El vector normal al plano π es el vector dirección de la recta r.

La ecuación de π es: $4(x - 3) + (y - 1) - 3(z - 6) = 0$

π: $4x + y - 3z + 5 = 0$

b) Para hallar la intersección de π con r, sustituimos las coordenadas genéricas de r en la ecuación de π:

$4(4 + 4\lambda) + (2 + \lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

Sustituimos λ en las ecuaciones paramétricas de $r \rightarrow Q(0, 1, 2)$

c) $dist\ (P, r) = dist\ (P, Q) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (1 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

16 **Halla la distancia entre el punto $P(2, 2, -11)$ y la recta** $r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$

siguiendo los pasos del ejercicio anterior.

- $\vec{d}_r(12, -3, 5)$; $P(2, 2, -11)$

  $12(x - 2) - 3(y - 2) + 5(z + 11) = 0$

  π: $12x - 3y + 5z + 37 = 0$

- Sustituimos las coordenadas de r en π para hallar la intersección de r y π:

  $12 \cdot (9 + 12\lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5(6 + 5\lambda) + 37 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

  El punto de intersección es $Q(-3, 2, 1)$.

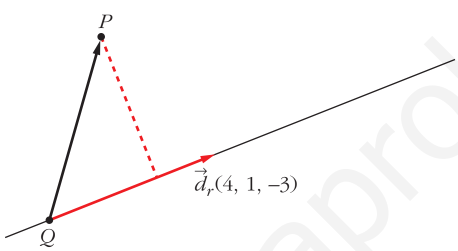
- $dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-5, 0, 12)| = 13$ u

17 **Calcula la distancia que hay entre el punto $P(3, 1, 6)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ mediante los siguientes pasos:**

a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo Q un punto de la recta r.

b) Halla el área del paralelogramo descrito por el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector dirección de r.

c) Divide dicha área entre el módulo del vector dirección de r.



a) $P(3, 1, 6)$, $Q(4, 2, -1) \in r$

$\overrightarrow{PQ}(1, 1, -7)$

b) $\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r = (4, -25, -3)$

Área del paralelogramo $= |\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r| = \sqrt{4^2 + 25^2 + 3^2} = \sqrt{650}$

c) $dist\,(P, r) = \dfrac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Longitud de la base}} = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \dfrac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = 5$

18 **Halla la distancia entre el punto $P(2, 2, -11)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$ siguiendo los pasos del ejercicio anterior.**

- $Q(9, -1, 6)$

  $\overrightarrow{PQ} = (7, -3, 17)$

- $\vec{d}_r(12, -3, 5)$

  Área paralelogramo $= |\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r| = |(36, 169, 15)| = \sqrt{30\,082}$

- $|\vec{d}_r| = \sqrt{178}$

  $dist\,(P, Q) = \sqrt{\dfrac{30\,082}{178}} = 13$ u

19 **Calcula la distancia que hay entre estas rectas:**

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = 9 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + 9\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, sigue estos pasos:

a) Halla el plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a la recta s.

b) Halla la distancia de un punto (el que quieras) de s al plano π.

r: $R(0, -10, 9)$, $\vec{d}_r(4, -3, 5)$

s: $S(2, 1, 4)$, $\vec{d}_s(-12, 9, 1)$

a) $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (4, -3, 5) \times (-12, 9, 1) = (-48, -64, 0) \,//\, (3, 4, 0) \perp \pi$

π está definido por un punto, $R(0, -10, 9)$, y un vector normal, $(3, 4, 0)$.

π: $3(x - 0) + 4(y + 10) + 0(z - 9) = 0 \ \rightarrow\ \pi$: $3x + 4y + 40 = 0$

b) $dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,(S, \pi) = \dfrac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 40}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \dfrac{50}{5} = 10$

20 **Halla la distancia que hay entre estas rectas siguiendo los pasos del ejercicio anterior:**

$$r: \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 19 + 12\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 10 - 10\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 26 - 24\lambda \end{cases}$$

- El vector normal a π será $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (5, 1, 12) \times (-10, 5, -24) = (-84, 0, 35)$

  $-84(x + 7) + 35(z - 19) = 0$

  π: $-84x + 35z - 1\,253 = 0$

- $Q(10, -2, 26) \in s$

  $dist\,(r, s) = dist\,(Q, \pi) = \dfrac{|-84 \cdot 10 + 35 \cdot 26 - 1\,253|}{\sqrt{84^2 + 35^2}} = \dfrac{1\,183}{91} = 13$ u

21 **Calcula la distancia que hay entre estas rectas:**

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = 9 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + 9\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, haz lo siguiente:

a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo P y Q puntos de las rectas r y s, respectivamente.

b) Halla el volumen, *V*, del paralelepípedo descrito por $\overrightarrow{PQ}$ y los vectores dirección de *r* y *s*.

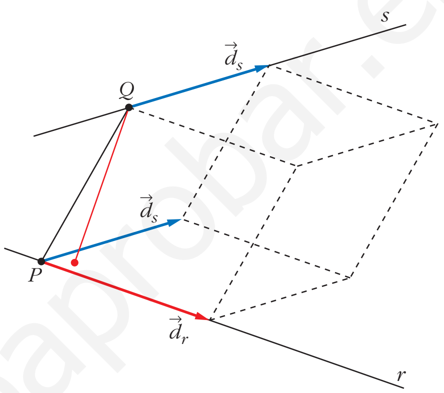
c) Halla el área, *A*, del paralelogramo descrito por los vectores dirección de *r* y *s*.

d) La distancia de *r* a *s* coincide con el resultado de dividir *V* entre *A*.

$P(0, -10, 9) \in r, \ \vec{d}_r(4, -3, 5)$

$Q(2, 1, 4) \in s, \ \vec{d}_s(-12, 9, 1)$

a) $\overrightarrow{PQ}(2, 11, -5)$



b)

$$[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -12 & 9 & 1 \\ 2 & 11 & -5 \end{vmatrix} = -800$$

$V = |-800| = 800 \text{ u}^3$

c) $A = |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |(4, -3, 5) \times (-12, 9, 1)| = |(-48, -64, 0)| = 80 \text{ u}^2$

d) $dist\,(r, s) = \dfrac{V}{A} = \dfrac{800}{80} = 10 \text{ u}$

22 **Halla la distancia que hay entre estas rectas siguiendo los pasos del ejercicio anterior:**

$$r: \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 19 + 12\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 10 - 10\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 26 - 24\lambda \end{cases}$$

- $P(-7, 4, 19)$; $Q(10, -2, 26)$

  $\overrightarrow{PQ}(17, -6, 7)$

- $\vec{d}_r(5, 1, 12)$

  $\vec{d}_s(-10, 5, -24)$

  $$V = |[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}]| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 12 \\ -10 & 5 & -24 \\ 17 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 1\,183 \text{ u}^3$$

- $A = |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |(-84, 0, 35)| = 91 \text{ u}^2$

- $dist\,(r, s) = \dfrac{V}{A} = \dfrac{1\,183}{91} = 13 \text{ u}$

Áreas y volúmenes

23 **Halla el área de cada uno de los triángulos:**

a) $\boldsymbol{A(2, 7, 3),\ B(1, -5, 4),\ C(7, 0, 11)}$

b) $\boldsymbol{A(3, -7, 4),\ B(-1, 2, 5),\ C(-5, 11, 6)}$

Justifica la solución del segundo.

a) $\overrightarrow{AB}(-1, -12, 1);\ \ \overrightarrow{AC}(5, -7, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(-89, 13, 67)|}{2} = \frac{\sqrt{12\,579}}{2} \simeq 56{,}08 \text{ u}^2$$

b) $\overrightarrow{AB}(-4, 9, 1);\ \ \overrightarrow{AC}(-8, 18, 2)$

Las coordenadas son proporcionales, luego los puntos están alineados:

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$

Página 206

24 **Calcula, en cada caso, el volumen del tetraedro con vértices:**

a) **(2, 1, 4); (1, 0, 2); (4, 3, 2); (1, 5, 6)**

b) **(4, 1, 2); (2, 0, 1); (2, 3, 4); (6, 5, 1)**

a) $A(2, 1, 4);\ B(1, 0, 2);\ C(4, 3, 2);\ D(1, 5, 6)$

$\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2);\ \ \overrightarrow{AC}(2, 2, -2);\ \ \overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \ \to\ \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

b) $A(4, 1, 2);\ B(2, 0, 1);\ C(2, 3, 4);\ D(6, 5, 1)$

$\overrightarrow{AB}(-2, -1, -1);\ \ \overrightarrow{AC}(-2, 2, 2);\ \ \overrightarrow{AD}(2, 4, -1)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30 \ \to\ \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

25 **Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:**

$\boldsymbol{A(2, 3, 1),\ B(4, 1, -2),\ C(6, 3, 7),\ D(-5, -4, 8)}$

- Área del triángulo ABC:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ABD:

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2\,058}}{2} \simeq 22{,}68 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ACD:

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7\,448}}{2} \simeq 43{,}15 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo BCD:

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{BC} \times \vec{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14\,490}}{2} \simeq 60{,}19 \text{ u}^2$$

- Área total $= 14 + 22{,}68 + 43{,}15 + 60{,}19 = 140{,}02 \text{ u}^2$

- Volumen: $\vec{AB}(2, -2, -3)$; $\vec{AC}(4, 0, 6)$; $\vec{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \ \rightarrow \ \text{Volumen} = \frac{306}{6} \simeq 51{,}33 \text{ u}^3$$

s26 Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano:

$$\mathbf{6x - 5y + 3z - 30 = 0}$$

☛ ***Recuerda que $V = (1/3) \cdot$ área base $\times$ altura. En este caso es muy sencillo obtener ambas por ser un tetraedro con tres aristas perpendiculares entre sí. Hazlo, también, utilizando el producto mixto, y comprueba que obtienes el mismo resultado.***

- Hallamos los vértices:

$x = 0,\ y = 0 \ \rightarrow \ z = 10 \ \rightarrow \ A(0, 0, 10)$

$y = 0,\ z = 0 \ \rightarrow \ x = 5 \ \rightarrow \ B(5, 0, 0)$

$x = 0,\ z = 0 \ \rightarrow \ y = -6 \ \rightarrow \ C(0, -6, 0)$

$O(0, 0, 0)$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(10 \cdot 5 \cdot 6) = 50 \text{ u}^2$$

- Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\,|[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix}\right| = 50 \text{ u}^3$$

s27 **Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$ y que pasa por el punto (–1, 1, 0), y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.**

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x + 1) + 3(y - 1) + 4(z - 0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; A\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; C\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144} \text{ u}^3$$

Esfera

28 **Justifica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a esferas y di su centro y su radio:**

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

b) $2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 3 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 30 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 3/2 = 0$

a) No tiene término en z^2. No es una esfera.

b) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

c) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 0 - (-8) = 9 \;\rightarrow\; \textit{radio} = \sqrt{9} = 3$$

$$\textit{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 0)$$

d) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

e) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 1 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-1) = 6 \quad \to \quad radio = \sqrt{6}$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

f) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 10 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-10) = 15 \quad \to \quad radio = \sqrt{15}$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

g) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + \frac{9}{4} + 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \quad \to \quad radio = 2$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

29 **Halla la ecuación de las siguientes esferas:**

a) Centro (1, 0, –5) y radio 1.

b) Diámetro $A(3, -4, 2)$, $B(5, 2, 0)$.

c) Centro (4, –2, 3) y tangente al plano $x - z = 0$.

d) Centro (3, –1, 2) y tangente al plano YZ.

a) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 5)^2 = 1$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10z + 25 = 0$

b) El centro es el punto medio de AB: $C = \left(\frac{3+5}{2}, -\frac{4+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, -1, 1)$

El radio es la distancia de C a uno de los puntos:

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

La ecuación es: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 11$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 7 = 0$$

c) El radio es la distancia del centro $C(4, -2, 3)$ al plano π: $x - z = 0$:

$$r = dist\,(C, \pi) = \frac{|4 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \rightarrow \ r^2 = \frac{1}{2}$$

La ecuación será: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{1}{2}$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z + \frac{57}{2} = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 8y - 12z + 57 = 0$$

d) El plano YZ es el plano π: $x = 0$.

El radio es la distancia del centro $C(3, -1, 2)$ al plano π: $r = dist\,(C, \pi) = 3$

La ecuación será: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

30 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (2, –1, 4) es igual a 7.**

Es una esfera de centro $(2, -1, 4)$ y radio 7:

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 49$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z - 28 = 0$

PARA RESOLVER

s31 **Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta r: $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$**

y es ortogonal al plano σ: $2x - y + 3z + 1 = 0$.

Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ.

Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r:

$P(1, -1, 1) \in r \ \rightarrow \ P(1, -1, 1) \in \pi$

$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} \,//\, r \ \rightarrow \ \vec{d}(3, -2, 1) \,//\, \pi$

Si π es ortogonal a σ, el vector normal de σ es paralelo a π:

$\vec{n}_\sigma(2, -1, 3) \perp \sigma \ \rightarrow \ (2, -1, 3) \,//\, \pi$

Obtenemos un vector normal a π: $(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \ \rightarrow \ (5, 7, -1)$

La ecuación del plano π es: $5(x - 1) + 7(y + 1) - 1(z - 1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

• Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ:

$$\left.\begin{array}{l} \pi\text{: } 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma\text{: } 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Vector dirección de la recta: $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$

Punto de la recta:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Ecuaciones de la recta: $\begin{cases} x = 20\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\dfrac{1}{2} - 19\lambda \end{cases}$

s32 **Dados la recta** $r: \begin{cases} x \quad - 2z + 3 = 0 \\ \quad y - z - 4 = 0 \end{cases}$ **y el plano** π**:** $x + 2y + 3z - 1 = 0$, **halla la ecuación de una recta situada en el plano** π, **que pase por el punto** $P(2, 1, -1)$ **y sea perpendicular a** r**.**

Un vector dirección de r es: $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a $(2, 1, 1)$ y perpendicular a $(1, 2, 3)$ (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

s33 **Dados la recta** $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-y}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ **y el plano** π**:** $x + 3y - 3z + 3 = 0$, **halla el plano que contiene a** r **y es perpendicular a** π**.**

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \quad \rightarrow \quad P(0, 1, -1);\ \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a $\vec{d}$ y a $\vec{n}$, y contendrá a P.

Un vector normal será: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \quad \rightarrow \quad (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es: $6(x - 0) - 9(y - 1) - 7(z + 1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

s34 **Determina la recta perpendicular común a las rectas siguientes:**

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \left.\begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Restando la 1.ª ecuación a la 2.ª: } y = 3 - z \\ x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z \end{array}$$

Haciendo $z = \lambda$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \to \quad \text{Un punto genérico de } r \text{ es } R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \quad \to \quad s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \quad \to \quad \text{Un punto genérico de } s \text{ es } S(2, -3, \mu)$$

Un vector variable de origen en r y extremo en s es $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$.

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \quad \to \quad 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \quad \to \quad -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \quad \to \quad \mu - \lambda = 0 \quad \to \quad \mu = \lambda \quad \to \quad \mu = \lambda \end{array}\right\}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{8}{5}; \; \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{array}\right\} \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \to \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

s35 **a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:**

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \qquad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene para el valor de p que has hallado.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p - 1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \quad \to \quad p = 6$

b) $r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $\qquad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$

- Punto de intersección:

$$\left.\begin{aligned} 4\lambda &= 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda &= 6 + 5\mu \\ 2\lambda &= 3 + 3\mu \end{aligned}\right\} \text{ Sumando las dos últimas ecuaciones:}$$

$$1 = 9 + 8\mu \ \rightarrow \ -8 = 8\mu \ \rightarrow \ \mu = -1$$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

1.ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: (0, 1, 0)

- Ecuación del plano que las contiene:

$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \ \rightarrow \ (8, 5, -11)$ es un vector normal al plano.

Ecuación: $8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0$

$8x + 5y - 11z - 5 = 0$

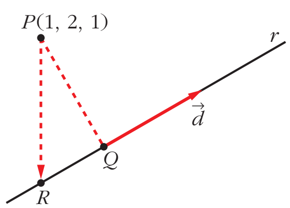
s36 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta siguiente:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \ \rightarrow \ y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + z = 2 \ \rightarrow \ x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \ \rightarrow \ \text{Un punto genérico de } r \text{ es: } R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r, es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\overrightarrow{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} = 0 \ \rightarrow \ (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$

$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \ \rightarrow \ 6\lambda = 0 \ \rightarrow \ \lambda = 0$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\overrightarrow{PQ}(1, -1, -1)$

La recta es: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

s37 **Los vértices del triángulo ABC son los puntos de corte del plano $2x + y - 3z = 6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice B que está en el eje OY.**

Los vértices del triángulo son:

$y = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ 2x = 6 \ \rightarrow\ x = 3 \ \rightarrow\ A(3, 0, 0)$

$x = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ y = 6 \ \rightarrow\ B(0, 6, 0)$

$x = 0,\ y = 0 \ \rightarrow\ -3z = 6 \ \rightarrow\ z = -2 \ \rightarrow\ C(0, 0, -2)$

Debemos hallar la ecuación de la altura que parte de B.

Su vector dirección $\vec{d}(a, b, c)$ debe ser:

- Ortogonal a $\overrightarrow{AC} \ \rightarrow\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0$
- Ortogonal al vector normal del plano ABC, es decir, del plano $2x + y - 3z = 6$, puesto que la altura debe estar contenida en dicho plano $\rightarrow\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$

Luego tenemos que:

$$\left.\begin{array}{lll} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0 & \rightarrow\ (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 & \rightarrow\ 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0 & \rightarrow\ (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 & \rightarrow\ 2a + b - 3c = 0 \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(-2t, 13t, 3t) \ \rightarrow$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

Ecuación de la altura que pasa por B: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$

Página 207

s38 **Halla el punto P de la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$ que equidiste de los planos:**

α: $x + y + z = -3$ **y** β: $\begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$

- Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$
- Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow\ \beta: x + y - z - 3 = 0$$

- La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $dist\,(R, \alpha) = dist\,(R, \beta)$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}}, \text{ es decir:}$$

$$|6\lambda + 3| = 3 \begin{cases} 6\lambda + 3 = 3 \;\rightarrow\; 6\lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 0 \\ 6\lambda + 3 = -3 \;\rightarrow\; 6\lambda = -6 \;\rightarrow\; \lambda = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

s39 **Sea r la recta de intersección de los planos $ax + 9y - 3z = 8$ y $x + ay - z = 0$.**

Determina el valor de a para que:

a) Los dos planos sean paralelos.

b) Los dos planos sean perpendiculares.

c) La recta r corte al plano OXY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a $\sqrt{2}$.

a) Las coordenadas de $(a, 9, -3)$ y $(1, a, -1)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \begin{cases} \dfrac{a}{1} = \dfrac{-3}{-1} \;\rightarrow\; a = 3 \\ \dfrac{9}{a} = \dfrac{-3}{-1} \;\rightarrow\; a = 3 \end{cases} \Bigg\} \; a = 3$$

b) Los vectores normales han de ser perpendiculares:

$$(a, 9, -3) \cdot (1, a, -1) = a + 9a + 3 = 10a + 3 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{-3}{10}$$

c) El plano OXY es el plano $z = 0$. Hallamos el punto de corte de r con el plano OXY:

$$\left.\begin{aligned} ax + 9y - 3z &= 8 \\ x + ay - z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} ax + 9y &= 8 \\ x + ay &= 0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$$

(El problema solo tiene solución si $a^2 - 9 \neq 0$, es decir, si $a \neq 3$ y $a \neq -3$. Si $a = 3$ o $a = -3$, el sistema es incompatible).

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 8a$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{8a}{a^2 - 9}; \quad y = \frac{-8}{a^2 - 9}; \quad z = 0$$

El punto de corte es $P\left(\frac{8a}{a^2-9}, \frac{-8}{a^2-9}, 0\right)$. Su distancia al origen ha de ser $\sqrt{2}$:

$$dist\ (P, O) = \sqrt{\left(\frac{8a}{a^2-9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2-9}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{8a}{a^2-9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2-9}\right)^2 = 2 \ \to\ \frac{64a^2+64}{(a^2-9)^2} = 2$$

$$64a^2 + 64 = 2(a^4 + 81 - 18a^2) \ \to\ 64a^2 + 64 = 2a^4 + 162 - 36a^2$$

$$0 = 2a^4 - 100a^2 + 98 \ \to\ a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$a^2 = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} \begin{cases} a^2 = 49 \ \to\ a = \pm 7 \\ a^2 = 1 \ \to\ a = \pm 1 \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$

s40 Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas $(-1 + 3\lambda,\ 1 + 2\lambda,\ 2 + \lambda)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

Determina también el ángulo formado por la recta y el plano dados.

Un vector normal al plano es: $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \ \to\ (7, -11, 1)$

Un punto del plano es $(-1, 1, 2)$ (pues contiene a la recta).

- La ecuación del plano será:

  $7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(z - 2) = 0$

  $7x - 11y + z + 16 = 0$

- Ángulo formado por la recta y el plano dados:

  $\vec{d}(3, 2, 1)$; $\vec{n}(2, 1, -3)$

  $$\cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\ |\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0{,}357$$

  $90° - \alpha = 69°\ 4'\ 31'' \ \to\ \alpha = 20°\ 55'\ 29''$

41 Dado un cubo (hexaedro regular) de lado 6 cm, halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una de sus caras, sabiendo que las rectas de ambas diagonales se cruzan.

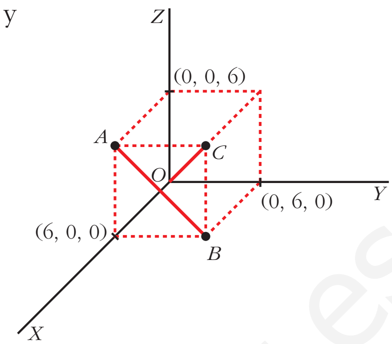
☛ ***Dibuja el cubo con un vértice en el origen y los contiguos sobre los ejes coordenados.***

- La diagonal del cubo pasa por $O(0, 0, 0)$ y por $C(6, 6, 6)$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- La diagonal de la cara pasa por $A(6, 0, 6)$ y por $B(6, 6, 0)$:

$$s: \begin{cases} x = 6 \\ y = \mu \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$



- $dist\,(r, s) = \dfrac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \dfrac{|[\vec{d}, \vec{d}\,', \overrightarrow{OA}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}\,'|}$

$$[\vec{d}, \vec{d}\,', \overrightarrow{OA}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\vec{d} \times \vec{d}\,' = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1) \quad \to \quad |\vec{d} \times \vec{d}\,'| = \sqrt{6}$$

Por tanto: $dist\,(r, s) = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

s42 Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (1, 3, 2).

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\overrightarrow{OP}(1, 3, 2)$ es normal al plano.

Por tanto, la ecuación del plano es:

$$1(x - 1) + 3(y - 3) + 2(z - 2) = 0$$

$$x + 3y + 2z - 14 = 0$$

43 Determina las condiciones que deben cumplir a y b para que estos tres planos:

$$\boldsymbol{ax + z - 1 = 0, \quad x + bz + 2 = 0, \quad \sqrt{5}x + 3y + 2z - 3 = 0}$$

se corten en un punto.

Haciendo $a = 2$ y $b = 1$, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los dos primeros, así como el ángulo que esta forma con el tercero.

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + z &=& 1 \\ x + bz &=& -2 \\ \sqrt{5}x + 3y + 2z &=& 3 \end{array}\right\}$$ Para que los tres planos se corten en un punto, el sistema ha de tener solución única, es decir:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ \sqrt{5} & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3(ab - 1) \neq 0 \quad \to \quad ab \neq 1$$

- **Si $a = 2$ y $b = 1$**, la recta determinada por los dos primeros planos es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Restando: } x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = 3 \\ z = -2 - x = -2 - 3 = -5 \end{array}$$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$

- **Ángulo que forma la recta con el 3.^{er} plano:**

$\vec{d}(0, 1, 0)$ $\vec{n}(\sqrt{5}, 3, 2)$

$$\cos\,(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{3}{1\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 45° \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

s44 **Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano α: $x - 3y - 2z + 4 = 0$ y respecto de la recta r: $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$**

— Simétrico respecto del plano:

- Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

- Punto de corte de α con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico de P respecto del plano α. Luego, si $P'(x, y, z)$, entonces: $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \;\rightarrow\; P'(2, -1, 1)$

— Simétrico respecto de la recta:

- Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left.\begin{cases} x - y + 3 = 0 \;\rightarrow\; y = x + 3 \\ 4x - z = 0 \;\rightarrow\; z = 4x \end{cases}\right\} \;\rightarrow\; r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P:

$$1(x - 1) + 1(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

$$x + y + 4z - 15 = 0$$

- Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \;\to\; \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'', siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r. Así, si $P''(a, b, c)$, entonces: $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \;\to\; P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

45 a) Encuentra los puntos de r: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del plano: π: $2x - y + 2z + 1 = 0$.

b) Obtén los puntos de π que distan $\frac{1}{3}$ de los puntos hallados en el apartado anterior.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ z = x \end{array}\right\} \;\to\; r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \;\to\; \text{Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$dist\,(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{cases} 5\lambda + 1 = 1 \;\to\; \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \;\to\; \lambda = -2/5 \end{cases}$$

Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π.

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π.

- Para $(0, 0, 0)$:

Obtenemos la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de esta recta con π:

$$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \;\to\; 9\lambda = -1 \;\to\; \lambda = -\frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

- Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π:

$$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = 2/5 - \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

Obtenemos el punto de corte de esta recta con π:

$$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

$$9\lambda - 1 = 0 \;\to\; \lambda = \frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

s46 Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C.

a) Escribe la ecuación de π.

b) Calcula el área del triángulo ABC.

a) El plano es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}(-4, 6, -2)$; un vector normal al plano es $(2, -3, 1)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ: $M(1, 4, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x - 1) - 3(y - 4) + 1(z - 4) = 0$

$$\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del triángulo:

$y = 0,\ z = 0 \;\to\; 2x + 6 = 0 \;\to\; x = -3 \;\to\; A(-3, 0, 0)$

$x = 0,\ z = 0 \;\to\; -3y + 6 = 0 \;\to\; y = 2 \;\to\; B(0, 2, 0)$

$x = 0,\ y = 0 \;\to\; z + 6 = 0 \;\to\; z = -6 \;\to\; C(0, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB}(3, 2, 0)$ $\overrightarrow{AC}(3, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, 18, -6) \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{504}$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} \approx 11{,}22 \text{ u}^2$$

s47 Dados los puntos $A(1, 5, -2)$, $B(4, 0, 1)$ y $C(-3, 2, 0)$:

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.

a) Hay que probar que los puntos no están alineados.

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(3, -5, 3) \\ \overrightarrow{AC}(-4, -3, 2) \end{array}\right\}$ Sus coordenadas no son proporcionales, luego los puntos no están alineados. Son los vértices de un triángulo.

b) • Obtenemos la ecuación del lado AC:

$$r: \begin{cases} x = -3 - 4\lambda \\ y = \ \ 2 - 3\lambda \\ z = \qquad 2\lambda \end{cases}$$

• Hallamos el plano que pasa por B y es perpendicular a r:

$-4(x - 4) - 3(y - 0) + 2(z - 1) = 0$

$\pi: -4x - 3y + 2z + 14 = 0$

• Obtenemos el punto de intersección de r con π:

$-4(-3 - 4\lambda) - 3(2 - 3\lambda) + 4\lambda + 14 = 0$

$12 + 16\lambda - 6 + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0$

$29\lambda + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \dfrac{-20}{29}$

El punto (proyección de B sobre AC) es: $B'\left(\dfrac{-7}{29}, \dfrac{118}{29}, \dfrac{-40}{29}\right)$

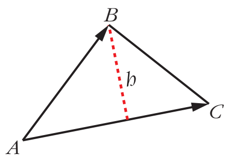
• La longitud del segmento es la distancia entre B y B':

$$|\overrightarrow{B'B}| = \left|\left(\frac{123}{29}, \frac{-118}{29}, \frac{69}{29}\right)\right| = \sqrt{\frac{33\,814}{841}} = \sqrt{\frac{1\,166}{29}} \approx 6{,}34$$

De otra forma:

$$h = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|(1, 18, 29)|}{\sqrt{16 + 9 + 4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1\,166}{29}} \simeq 6{,}34$$



s48 **Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.**

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$dist\,[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

s49 **Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ y otro lado sobre $s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{-2}$.**

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Si uno de los vértices del cuadrado es el (0, 0, 0), ¿cuál es el otro vértice situado sobre la recta r?

Para que el enunciado sea correcto, las dos rectas deben ser paralelas. Veamos si es así:

Escribimos la recta r en forma paramétrica:

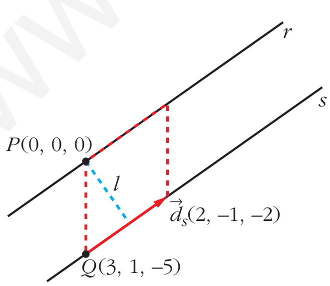
$$(3, 2, 2) \times (1, -2, 2) = (8, -4, -8) \;//\; (2, -1, -2) = \vec{d}_r; \quad O(0, 0, 0) \in r$$

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \;\rightarrow\; \vec{d}_r(2, -1, -2); \quad P(0, 0, 0)$$

Puesto que $\vec{d}_s = \vec{d}_r$, las dos rectas tienen la misma dirección.

Además $P(0, 0, 0) \in r$, pero $P(0, 0, 0) \notin s$. Por tanto, las rectas son paralelas.

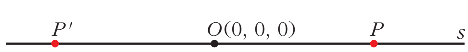
a) El lado del cuadrado es la distancia entre las dos rectas.



$$dist\,(r, s) = dist\,(P, s) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Base}} =$$

$$= \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(-7, -4, -5)|}{|(2, -1, -2)|} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{9}} = \sqrt{10} = l$$

Por tanto, $\text{Área} = (\sqrt{10})^2 = 10 \text{ u}^2$

b) 

Si P (o P') es el otro vértice del cuadrado situado sobre la recta r, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP'}$ son vectores con la misma dirección que $\vec{d}_r$ y con módulo $\sqrt{10}$:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\sqrt{10}}{|\vec{d}_r|}\,\vec{d}_r = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4+1+4}}(2, -1, -2) = \frac{\sqrt{10}}{3}(2, -1, -2) \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(\frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{-1}{3}\sqrt{10}, \frac{-2}{3}\sqrt{10}\right) \text{ y } P'\left(-\frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{1}{3}\sqrt{10}, \frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$$

P y P' son las posibles posiciones del segundo vértice del cuadrado situado en r. Los otros vértices están en la recta s.

s50 **Sea r_1 la recta que pasa por $A(2, 4, 0)$ y $B(6, 2, 0)$ y sea r_2 la recta que pasa por $C(0, 0, 7)$ y $D(3, 2, 0)$.**

Obtén, de manera razonada, la distancia entre r_1 y r_2.

- Escribimos las rectas en forma paramétrica:

r_1: $\overrightarrow{AB}(4, -2, 0) \,//\, (2, -1, 0)$ $\qquad$ $r_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

r_2: $\overrightarrow{CD}(3, 2, -7)$ $\qquad$ $r_2: \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 - 7\mu \end{cases}$

- Estudiamos la posición relativa de r_1 y r_2:

$\overrightarrow{AC}(-2, -4, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \rightarrow \text{ Las rectas se cruzan.}$$

- Hallamos la distancia entre r_1 y r_2:

$$dist\,(r_1, r_2) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{21}{|(2, -1, 0) \times (3, 2, -7)|} =$$

$$= \frac{21}{|(7, 14, 7)|} = \frac{21}{\sqrt{294}} \simeq 1{,}22$$

Página 208

s51 **Halla la ecuación general del plano determinado por los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 0, -1)$, $C(1, -2, 0)$, y calcula el volumen del tetraedro que limita con los planos cartesianos.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-3, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC}(0, -3, -1) \end{array}\right\} \text{ Son paralelos al plano.}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y-1 & 1 & 3 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 5x + 3y - 9z + 1 = 0$$

- Vértices del tetraedro: $O(0, 0, 0)$

$$y = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ 5x = -1 \ \rightarrow\ x = -\frac{1}{5} \ \rightarrow\ A\left(-\frac{1}{5}, 0, 0\right)$$

$$x = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ 3y = -1 \ \rightarrow\ y = -\frac{1}{3} \ \rightarrow\ B\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$x = 0,\ y = 0 \ \rightarrow\ -9z = -1 \ \rightarrow\ z = \frac{1}{9} \ \rightarrow\ C\left(0, 0, \frac{1}{9}\right)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{810} \text{ u}^3$$

s52 Sean los puntos $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento.

Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C:

a) Escribe la ecuación del plano π.

b) Calcula el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C (O es el origen de $\mathbb{R}^3$).

a) El plano es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}(-2, 6, -4) \,//\, (1, -3, 2)$. Pasa por el punto medio del segmento PQ: $M = (4, 4, 1)$.

La ecuación del plano es: $1(x-4) - 3(y-4) + 2(z-1) = 0$

$$\pi: x - 3y + 2z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del tetraedro:

$$y = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ x + 6 = 0 \ \rightarrow\ x = -6 \ \rightarrow\ A(-6, 0, 0)$$

$$x = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ -3y + 6 = 0 \ \rightarrow\ y = 2 \ \rightarrow\ B(0, 2, 0)$$

$$x = 0,\ y = 0 \ \rightarrow\ -2z + 6 = 0 \ \rightarrow\ z = -3 \ \rightarrow\ C(0, 0, -3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}(6 \cdot 2 \cdot 3) = 6 \text{ u}^3$$

s53 Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

- Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

- El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

  $(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$

  $3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \quad \rightarrow \quad 2\lambda = 4 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2$

  El punto es $P'(5, 1, 2)$

- La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P':

  $$dist\,(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \simeq 2{,}83$$

s54 **Se consideran los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 4, 1)$ y $R(1, 3, 1)$:**

a) Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

b) Si desde el punto $V(1, 1, -1)$ se trazan rectas a cada uno de los puntos P, Q y R, se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

a) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}(-1, 3, 2)\\ \overrightarrow{PR}(-1, 2, 2)\end{array}\right\}$ No tienen las coordenadas proporcionales; luego los puntos no están alineados.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1) \quad \rightarrow \quad A_{\text{PARALELOGRAMO}} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12\ \text{u}^2$$

b) La altura es la distancia de V al plano determinado por P, Q y R.

Un vector normal al plano es $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1)$. La ecuación del plano es:

$2(x - 2) + 1(z + 1) = 0$

π: $2x + z - 3 = 0$

$$\text{Altura} = dist\,(V, \pi) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\,[\text{Área base} \cdot \text{altura}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3}\ \text{u}^3$$

s55 **Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(4, 0, 5)$ y $E(7, 6, 3)$.**

Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:

- Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

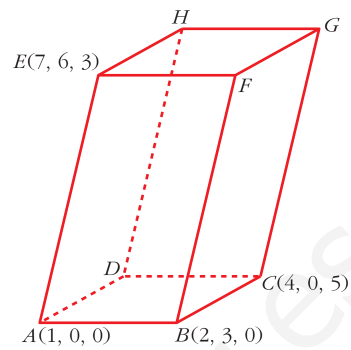
  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \quad \rightarrow \quad (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$

  $D(3, -3, 5)$

- Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \rightarrow (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$

  $F(8, 9, 3)$



- Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} \rightarrow (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5)$

  $G(10, 6, 8)$

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} \rightarrow (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5)$

  $H(9, 3, 8)$

$\overrightarrow{AB}(1, 3, 0), \ \overrightarrow{AD}(2, -3, 5), \ \overrightarrow{AE}(6, 6, 3)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \rightarrow \text{Volumen} = 33 \text{ u}^3$$

s56 **Dadas las rectas:**

$$\boldsymbol{r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}}$$

$$\boldsymbol{s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}}$$

determina la posición relativa de ambas rectas y el área de uno de los cuadrados, dos de cuyos lados están sobre *r* y *s*.

- Escribimos la recta s en forma paramétrica:

  $$\left.\begin{array}{l} -y + z = 2 - x \\ -y - z = -4 - 3x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } -2y = -2 - 4x \rightarrow y = 1 + 2x \\ z = 2 - x + y = 3 + x \end{array}$$

  $$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

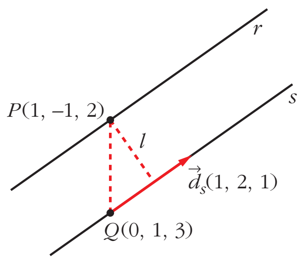
- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

  $\vec{d}_r(1, 2, 1); \ P(1, -1, 2)$

  $\vec{d}_s(1, 2, 1); \ Q(0, 1, 3)$

  Las rectas tienen la misma dirección; $P \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas r y s son paralelas.

- El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s.



$\overrightarrow{QP}(1, -2, -1)$

$\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s = (1, -2, -1) \times (1, 2, 1) = (0, -2, 4)$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(0, -2, 4)|}{|(1, 2, 1)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 16}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

- El área del cuadrado es:

$$\text{Área} = \left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{10}{3}\ \text{u}^2$$

s57 **Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta:**

$r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ sobre el plano $\alpha: x - 3y + 2z + 12 = 0$.

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano π, perpendicular a α y que contiene a r.

$P(1, 1, 2)$; $\vec{d}_r(2, 1, 2)$; $\vec{n}(1, -3, 2)$

$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$

La ecuación de π es: $8(x - 1) - 2(y - 1) - 7(z - 2) = 0$

$\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

s58 **Considera las rectas r y s:**

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s.

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$\overrightarrow{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \;\rightarrow\; -6\lambda - 7 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -\dfrac{7}{6} \\ \overrightarrow{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \;\rightarrow\; -2 + 3\mu = 0 \;\rightarrow\; \mu = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S:

$$\overrightarrow{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \;\rightarrow\; \vec{d}(0, 1, -1)$$

La recta es: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{7}{6} + \lambda \\ z = -\dfrac{1}{6} - \lambda \end{cases}$

s59 **Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta r: $\begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$.**

La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.

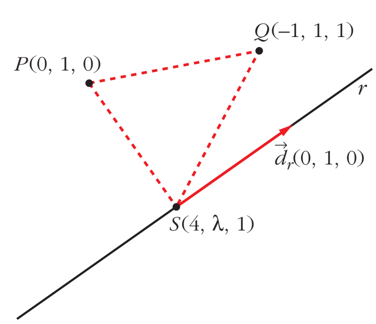
a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.

a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \;\rightarrow\; \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1$

$S(4, 1, 1)$



b) $\overrightarrow{PS}(4, 0, 1)$; $\overrightarrow{PQ}(-1, 0, 1)$

$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ u}^2$$

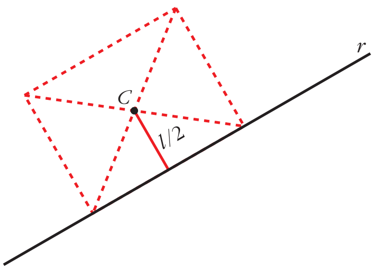
60 **Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

a) Es el plano, π, que contiene a C y a r: $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(2, 1, 1) \in r$.



$C(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PC}(-1, 0, -2) \,//\, \pi$

Un vector normal al plano es:

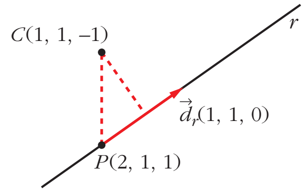
$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$

La ecuación del plano es:

$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0$

$2x - 2y - z - 1 = 0$

b) La distancia de C a r es la mitad del lado del cuadrado.



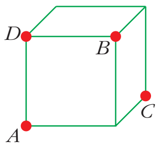
$\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$

$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$dist\,(C, r) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

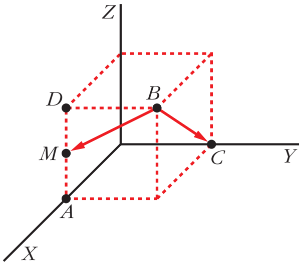
$$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \to \quad \text{lado del cuadrado} = l = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24$$

s61 **En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta BC con la recta que une B con el punto medio del lado AD.**



Vamos a considerar el cubo de lado 1 con un vértice en el origen:

Así: $A(1, 0, 0)$; $B(1, 1, 1)$; $C(0, 1, 0)$; $D(1, 0, 1)$; $M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$



$\overrightarrow{BC}(-1, 0, -1)$; $\overrightarrow{BM}\left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{BM}|} = \frac{1/2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0{,}316 \quad \to \quad \alpha = 71° \, 33' \, 54''$$

s62 **Sea la recta** $r: \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y \quad - 1 = 0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por (0, 2, 2), y las coordenadas del punto P intersección de r y s.

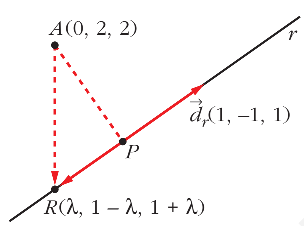
b) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y a s, y la de la recta t perpendicular a π por el punto P.

c) Si Q es cualquier punto de t, explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de Q a r, a s y a π.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 & \rightarrow \quad z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y \quad - 1 = 0 & \rightarrow \quad y = 1 - x \end{cases}\right\} \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.



$\overrightarrow{AR}$ ha de ser perpendicular a r; es decir:

$\overrightarrow{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$

$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$

$R(0, 1, 1)$

La recta s pasa por $A(0, 2, 2)$ y por $R(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{RA}(0, 1, 1) \quad \rightarrow \quad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

b) Ecuación del plano π que contiene a r y a s:

$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1); \quad P(0, 1, 1) \in \pi$

$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$\pi: -2x - y + z = 0$

Ecuación de la recta t perpendicular a π por el punto P:

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c) Si $Q \in t \quad \rightarrow \quad dist\,(Q, r) = dist\,(Q, s) = dist\,(Q, \pi) = dist\,(Q, P)$

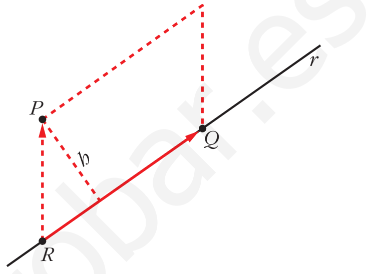
Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P, luego las tres son iguales entre sí.

Página 209

s63 **a) Halla la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.**

b) Encuentra todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R, de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

a) Si r es la recta que pasa por R y por Q; entonces:

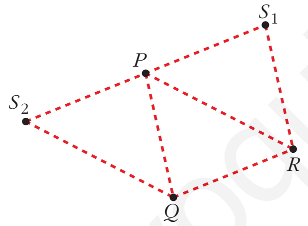


$$dist\ (P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{RQ}|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RP}(0, -1, 4)\\ \overrightarrow{RQ}(0, 2, 2)\end{array}\right\} \quad \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = (-10, 0, 0)$$

$$dist\ (P, r) = \frac{|(-10, 0, 0)|}{|(0, 2, 2)|} = \frac{10}{\sqrt{4+4}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \simeq 3{,}54 \text{ u}$$

b) Hay dos posibilidades: que P y Q sean vértices consecutivos, o que lo sean P y R.



• Si P y Q son consecutivos, obtenemos $S_1(x, y, z)$:

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS_1} \rightarrow (0, -3, 2) = (x-1, y, z+1)$

$S_1(1, -3, 1)$

• Si P y R son consecutivos, obtenemos $S_2(a, b, c)$:

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_2} \rightarrow (0, -1, 4) = (a-1, b-2, c-1) \rightarrow S_2(1, 1, 5)$

s64 **Halla el plano de la familia $mx + y + z - (m+1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.**

Hallamos la distancia del origen, (0, 0, 0), al plano y la igualamos a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m+1)|}{\sqrt{m^2+1+1}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+2}} = 1$$

$$|m+1| = \sqrt{m^2+2} \rightarrow (m+1)^2 = m^2+2 \rightarrow m^2+1+2m = m^2+2$$

$$2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

El plano es: $\frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0$; es decir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$

s65 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que equidistan de los puntos $A(1, -1, 0)$ y $B(2, 3, -4)$. Comprueba que obtienes un plano perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto medio de AB.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico: $dist\ (P, A) = dist\ (P, B) \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2}$

$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + 2y + 1 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} + 8z + 16$

π: $2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow$ Ecuación de un plano.

- Veamos que π es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$:

  $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$

  Vector normal al plano $\rightarrow \vec{n}(2, 8, -8) \mathbin{//} \overrightarrow{AB}$

  Luego $\overrightarrow{AB} \perp \pi$.

- Comprobamos que π pasa por el punto medio de AB:

  $$M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{0-4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1, -2\right)$$

  $$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

El plano π es el *plano mediador del segmento* AB.

s66 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos siguientes:**

α: $3x + y - 2z + 1 = 0$ $\qquad$ β: $x - 3y + 2z - 3 = 0$

☛ ***Hay dos soluciones. Son los planos bisectores del diedro que determinan α y β.***

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$dist\ (P, \alpha) = dist\ (P, \beta) \rightarrow \frac{|3x + y - 2z + 1|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{|x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{1+9+4}}$$

$$|3x + y - 2z + 1| = |x - 3y + 2z - 3|$$

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 1 = x - 3y + 2z - 3 \rightarrow 2x + 4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow x + 2y - 2z + 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 1 = -x + 3y - 2z + 3 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Son los *planos bisectores del diedro que determinan* α *y* β.

67 **Halla las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.**

Si P es un punto del plano $x = y$, entonces es de la forma $P(x, x, z)$. La distancia de P al plano dado ha de ser igual a 1, es decir:

$$\frac{|2x - x + 2z - 2|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|x + 2z - 2|}{3} = 1$$

$$|x + 2z - 2| = 3 \begin{cases} x + 2z - 2 = 3 \;\rightarrow\; x + 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = -3 \;\rightarrow\; x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas: $r: \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$

s68 **a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones $3x - 4y + 5 = 0$ y $2x - 2y + z + 9 = 0$.**

b) ¿Qué puntos del eje OY equidistan de ambos planos?

a) Si $P(x, y, z)$ es uno de los puntos del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{4+4+1}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$$

$$\begin{cases} 9x - 12y + 15 = 10x - 10y + 5z + 45 \;\rightarrow\; x + 2y + 5z + 30 = 0 \\ 9x - 12y + 15 = -10x + 10y - 5z - 45 \;\rightarrow\; 19x - 22y + 5z + 60 = 0 \end{cases}$$

Son los planos bisectores del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Un punto del eje OY es de la forma $Q(0, y, 0)$. La distancia de Q a cada uno de los planos ha de ser la misma, es decir:

$$\frac{|-4y + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-2y + 9|}{\sqrt{4+4+1}} \;\rightarrow\; \frac{|-4y + 5|}{5} = \frac{|-2y + 9|}{3}$$

$$3|-4y + 5| = 5|-2y + 9|$$

$$\begin{cases} -12y + 15 = -10y + 45 \;\rightarrow\; -2y = 30 \;\rightarrow\; y = -15 \\ -12y + 15 = 10y - 45 \;\rightarrow\; -22y = -60 \;\rightarrow\; y = \dfrac{30}{11} \end{cases}$$

Hay dos puntos: $Q_1(0, -15, 0)$ y $Q_2\left(0, \dfrac{30}{11}, 0\right)$

s69 **Calcula el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a igual distancia de $P(-1, 2, 5)$ y $Q(-3, 4, 1)$.**

¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicho conjunto?

Si $A(x, y, z)$ es un punto del conjunto, su distancia a P y a Q ha de ser la misma, es decir:

$dist\ (A, P) = dist\ (A, Q) \ \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} - 10z + 25 =$$

$$= \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 8y + 16 + \cancel{z^2} - 2z + 1 \ \rightarrow \ -4x + 4y - 8z + 4 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \pi: x - y + 2z - 1 = 0$$

Es el *plano mediador* del segmento que une P y Q.

La distancia de P a dicho plano será igual a la mitad de la distancia entre P y Q:

$$dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, -4)| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ dist\ (P, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \simeq 2{,}45$$

70 **Halla la ecuación de la esfera que pasa por:**

$$\boldsymbol{A(1, 1, 1),\ B(1, 2, 1),\ C(1, 1, 2),\ D(2, 1, 1)}$$

La ecuación es de la forma $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

Sustituimos cada uno de los cuatro puntos en la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + a + b + c + d = 0 \ \rightarrow \ a + b + c + d = -3 \\ 1 + 4 + 1 + a + 2b + c + d = 0 \ \rightarrow \ a + 2b + c + d = -6 \\ 1 + 1 + 4 + a + b + 2c + d = 0 \ \rightarrow \ a + b + 2c + d = -6 \\ 4 + 1 + 1 + 2a + b + c + d = 0 \ \rightarrow \ 2a + b + c + d = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ b = -3 \\ c = -3 \\ d = 6 \end{array}$$

La ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

71 **a) Halla la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en el punto $P(1, 2, 1)$.**

b) ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto a P en la esfera dada?

a) El punto P es un punto de la esfera.

El centro de la esfera es $C(1, 2, 0)$.

El plano que buscamos pasa por P y es perpendicular al vector $\overrightarrow{CP}(0, 0, 1)$.

Su ecuación es: $0 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 1) = 0$, es decir: $z - 1 = 0$

b) Es el simétrico de P respecto del centro de la esfera.

Si llamamos $P'(x, y, z)$ al punto que buscamos, C es el punto medio del segmento PP', es decir:

$$\left(\frac{1 + x}{2}, \frac{2 + y}{2}, \frac{1 + z}{2}\right) = (1, 2, 0) \ \rightarrow \ P'(1, 2, -1)$$

72 **Halla la ecuación de la esfera tangente a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y que tiene su centro en la recta:**

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

El centro de la esfera es de la forma $C(-2, 0, z)$ (pues pertenece a la recta r).

La distancia del centro a cada uno de los planos es la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\frac{|-2 - 2z - 8|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-4 - z + 5|}{\sqrt{4 + 1}} \rightarrow \frac{|-2z - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|-z + 1|}{\sqrt{5}} \rightarrow |-2z - 10| =$$

$$= |-z+1| \begin{cases} -2z - 10 = -z + 1 \rightarrow z = -11 \rightarrow C_1(-2, 0, -11) \\ -2z - 10 = z - 1 \rightarrow -3z = 9 \rightarrow z = -3 \rightarrow C_2(-2, 0, -3) \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $C_1(-2, 0, -11) \rightarrow$ *Radio* $= \dfrac{12}{\sqrt{5}}$

  Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = \dfrac{144}{5}$

- $C_2(-2, 0, -3) \rightarrow$ *Radio* $= \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

  Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \dfrac{16}{5}$

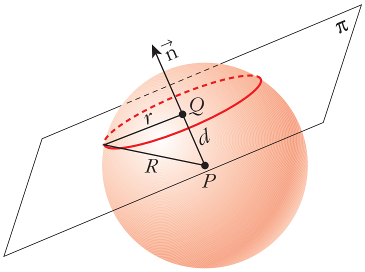
73 **La esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ corta al plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ en una circunferencia. Halla su centro y su radio.**

- Obtengamos el centro de la circunferencia:

  — El centro de la esfera es $P(3, -2, 1)$.

  — La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$



  — El punto de corte de esta recta con el plano dado es el centro de la circunferencia:

  $2(3 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0$

  $6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

  $Q(1, 0, 0)$

- Calculamos el radio de la circunferencia:

  La distancia entre los centros P y Q es:

  $$d = |\overrightarrow{QP}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

  El radio de la esfera es $R = 5$.

  Luego el radio de la circunferencia es: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

74 **a) Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y que tiene su centro en la recta:**

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-1}$$

b) ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en B a dicha esfera?

a) Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Como el centro pertenece a esta recta, es de la forma $C(8 + 2\lambda, 3 + \lambda, -4 - \lambda)$

La distancia de C a los puntos A y B ha de ser la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$|(2\lambda + 4, \lambda + 2, -\lambda - 1)| = |(2\lambda + 5, \lambda + 1, -\lambda - 5)|$$

$$\sqrt{(2\lambda + 4)^2 + (\lambda + 2)^2 + (-\lambda - 1)^2} = \sqrt{(2\lambda + 5)^2 + (\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 5)^2}$$

$$\cancel{4\lambda^2} + 16 + 16\lambda + \cancel{\lambda^2} + 4 + 4\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda =$$

$$= \cancel{4\lambda^2} + 25 + 20\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda + \cancel{\lambda^2} + 25 + 10\lambda$$

$$-10\lambda = 30 \rightarrow \lambda = -3 \rightarrow C(2, 0, -1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 3 = \text{radio de la esfera.}$$

La ecuación es: $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$$

b) Un vector normal al plano es $\overrightarrow{CB} = (1, 2, 2)$.

El plano pasa por $B(3, 2, 1)$. Su ecuación es:

$$1 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 1) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

75 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2, 3, 4)$ sea el doble de la distancia a $B(3, -1, -2)$.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, debe cumplir:

$dist\ (P, A) = 2dist\ (P, B)$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2}$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 2[x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 4z + 4]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 29 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 4y + 8z + 28$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 10y + 16z - 1 = 0$$

Es una *esfera* de *centro* $(8, -5, -8)$ y *radio* $\sqrt{154} \simeq 12{,}4$.

76 **Dados $A(4, 2, 0)$ y $B(2, 6, -4)$, halla el lugar geométrico de los puntos P tales que PA sea perpendicular a PB.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP}(x-4, y-2, z) \\ \overrightarrow{BP}(x-2, y-6, z+4) \end{array}\right\} \text{ han de ser perpendiculares, es decir:}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \quad \to \quad (x-4)(x-2) + (y-2)(y-6) + z(z+4) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 + y^2 - 8y + 12 + z^2 + 4z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$$

Es una *esfera* de *centro* $(3, 4, -2)$ y *radio* 3.

77 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (2, 0, 0) y (–2, 0, 0) sea igual a 6.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = 36 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 8x + 36$$

$$3\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 2x + 9$$

$$9[x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2] = 4x^2 + 36x + 81$$

$$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 + 9z^2 = 4x^2 + 36x + 81$$

$$5x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1$$

Es un *elipsoide*.

78 **Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de (0, 0, 3) y del plano $z = -3$.**

Sea $P(x, y, z)$ un punto del lugar geométrico pedido. Entonces:

$dist = \big(P, (0, 0, 3)\big) = dist\ (P, \{z = -3\})$

$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2} = \dfrac{|z + 3|}{\sqrt{1}} = |z + 3|$

Por tanto:

$x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = (z + 3)^2$

$x^2 + y^2 + \cancel{z^2} - 6z + \cancel{9} = \cancel{z^2} + 6z + \cancel{9}$

$x^2 + y^2 - 12z = 0$

Se trata de un *paraboloide*.

79 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a (0, 5, 0) y (0, –5, 0) sea igual a 4.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$\left|\sqrt{x^2 + (y - 5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y + 5)^2 + z^2}\right| = 4$

$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = \pm 4$

$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$

$x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = 16 + x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$

$\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 20y + 16$

$\pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 5y + 4$

$4(x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2) = 25y^2 + 40y + 16$

$4x^2 + 4y^2 + 40y + 100 + 4z^2 = 25y^2 + 40y + 16$

$4x^2 - 21y^2 + 4z^2 = -84$

$-\dfrac{x^2}{21} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{21} = 1$

Es un *hiperboloide*.

80 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos (2, 3, 4) y (2, 3, –4) es igual a 8? ¿Cómo se llama la superficie que obtienes?**

$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2} = 8$

$\cancel{(x - 2)^2} + (y - 3)^2 + \cancel{(z - 4)^2} = 64 + \cancel{(x - 2)^2} + (y + 3)^2 + \cancel{(z - 4)^2} -$

$- 16\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2}$

$16\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2} = 64 + 12y$

$$4\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2} = 16+3y$$

$$16(x^2-4x+4+y^2+6y+9+z^2-8z+16) = 256+96y+9y^2$$

$$16x^2+7y^2+16z^2-64x-128z+208=0$$

Se trata de un *elipsoide.*

81 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos (–4, 3, 1) y (4, 3, 1) es igual a 6?**

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} = 6$$

$$4x-9 = 3\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}$$

$$7x^2-9y^2-9z^2+54y+18z-153=0$$

Se trata de un *hiperboloide.*

82 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano $x = y$ y del punto (0, –2, 1).**

$$dist(P, \pi) = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \qquad dist(P, Q) = \sqrt{(x^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$$

$$\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2+y^2+4y+4+z^2-2z+1$$

$$x^2+y^2-2xy = 2x^2+2y^2+8y+8+2z^2-4z+2$$

$$x^2+y^2+2z^2+2xy+8y-4z+10=0$$

Se trata de un *paraboloide.*

Página 210

CUESTIONES TEÓRICAS

83 **La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano del espacio. Explica qué característica tiene dicho plano en cada uno de los casos siguientes:**

I) $a = 0$, $b = 0$

II) $b = 0$, $c = 0$

III) $a = 0$, $c = 0$

IV) $d = 0$

I) Es perpendicular al eje *OZ*. (Paralelo al plano *OXY*).

II) Es perpendicular al eje *OX*. (Paralelo al plano *OYZ*).

III) Es perpendicular al eje *OY*. (Paralelo al plano *OXZ*).

IV) Pasa por el origen, (0, 0, 0).

84 **Define la proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π y explica el procedimiento que emplearías para obtenerla.**

La proyección ortogonal de un punto, P, sobre un plano, π, es un punto, P', tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular a π. Un procedimiento para obtener P' sería el siguiente:

Se halla la recta, r, perpendicular a π que pasa por P. El punto de corte entre r y π es el punto buscado, P'.

85 **Dada una recta r y un punto P de ella, ¿cuántas rectas perpendiculares a r que pasen por el punto P se pueden trazar?**

Infinitas. Todas las que, pasando por P, están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por P.

86 **Dado el plano π: $x - 3y + 2z - 1 = 0$, escribe las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un vector $\vec{v}(a, b, c)$ para que tenga la dirección de alguna recta contenida en el plano.**

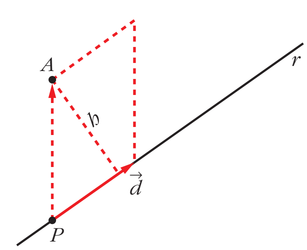
$\vec{v}(a, b, c)$ debe ser perpendicular al vector normal del plano π, $\vec{n}(1, -3, 2)$; es decir: $(a, b, c) \cdot (1, -3, 2) = a - 3b + 2c = 0$

87 **Justifica que la distancia del punto $A(x_2, y_2, z_2)$ a la recta:**

$\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ **se puede calcular mediante la fórmula:**

$$d(A, r) = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Llamamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{d}(a, b, c)$. P es un punto de la recta y $\vec{d}$ un vector dirección de esta.



La distancia de A a la recta r es igual a la altura del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{d}$, es decir:

$$dist\,(A, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} =$$

$$= \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

88 **Sean r la recta determinada por el punto A y el vector $\vec{d}_r$ y s la recta determinada por el punto B y el vector $\vec{d}_s$. Sabemos que r y s se cruzan.**

a) Justifica que la distancia entre r y s se puede calcular así:

$$dist(r, s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) Justifica que la perpendicular común a r y a s se puede obtener así:

$$\begin{cases} det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

a) $dist\,(r, s)$ = altura del paralelepípedo determinado por:

$$\vec{AB},\ \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p, perpendicular a r y a s, tiene por vector dirección $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Esta recta, p, es la intersección de los planos α y β, siendo:

α: Plano que contiene a s y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

α: $det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$, donde $X = (x, y, z)$

β: Plano que contiene a r y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

β: $det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$

Por tanto: $p: \begin{cases} det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$

89 **Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ un punto del plano π: $ax + by + cz + d = 0$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ un punto tal que $\vec{AB} \cdot (a, b, c) = 0$. Demuestra que, entonces, $B \in \pi$.**

$$\vec{AB} \cdot (a, b, c) = 0 \ \to\ a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \ \to$$

$$\to\ (ax_2 + by_2 + cz_2) - \underbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1)}_{-d \text{ (pues } A \in \pi)} = 0 \ \to$$

$$\to\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \ \to\ B \in \pi$$

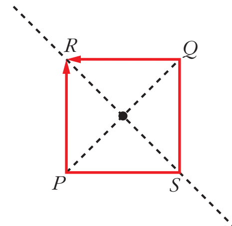
PARA PROFUNDIZAR

s90 **Los puntos $P(1, -1, 1)$ y $Q(3, -3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado. Sabemos que dicho cuadrado está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.**

a) Halla los vértices restantes.

b) Calcula el perímetro del cuadrado.

a) Los otros dos vértices, R y S, pertenecen a la mediatriz del segmento PQ.



La mediatriz del segmento PQ tiene como vector dirección el vector normal al plano $x + y = 0$; es decir, (1, 1, 0).

Pasa por el punto medio del segmento PQ; es decir, por $M(2, -2, 2)$. Luego la ecuación de la mediatriz es:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Un punto de r es de la forma $R(2 + \lambda, -2 + \lambda, 2)$.

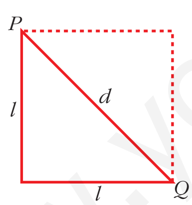
Buscamos R tal que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$ (es decir $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR}$):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PR}(1 + \lambda, -1 + \lambda, 1) \\ \overrightarrow{QR}(-1 + \lambda, 1 + \lambda, -1) \end{array}\right\} \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \lambda^2 - 1 + \lambda^2 - 1 - 1 = 2\lambda^2 - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \lambda = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ \lambda = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

Los vértices son: $R\left(\dfrac{4 + \sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4 + \sqrt{6}}{2}, 2\right)$ y $S\left(\dfrac{4 - \sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4 - \sqrt{6}}{2}, 2\right)$

b)



La longitud de la diagonal es:

$d = |\overrightarrow{PQ}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{12}$

$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow 12 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{6}$

El perímetro será: $P = 4\sqrt{6}$

91 **Considera los puntos siguientes:**

$$\boldsymbol{A(a, 0, 0),\ B(0, b, 0),\ C(0, 0, c)}$$

Prueba que la distancia, *d*, del origen de coordenadas al plano *ABC* verifica:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

El plano que pasa por A, B y C es:

$\pi: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ (véase ejercicio 66 a) de la unidad 6),

es decir: $\pi: \dfrac{1}{a}x + \dfrac{1}{b}y + \dfrac{1}{c}z - 1 = 0$

Así, si $O(0, 0, 0)$, entonces:

$$dist\,(O, \pi) = \frac{\left|\frac{1}{a}\cdot 0 + \frac{1}{b}\cdot 0 + \frac{1}{c}\cdot 0 - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = d \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{d} \ \rightarrow \ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

92 **Considera las rectas r, s y t:**

$$r: \begin{cases} x \qquad = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x \qquad + z = -2 \\ x + y \qquad = 0 \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x \qquad - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Halla las coordenadas de un punto P que está en la recta t y que determina con la recta s un plano que contiene a r.

El enunciado es enrevesado, pero el problema, una vez estudiado, es sencillo:

Las rectas r y s deben ser coplanarias. El plano que determinan, π, ha de tener un punto, P, situado en la recta t.

En la resolución, empezaremos viendo si r y s son coplanarias. Si lo son, hallaremos el plano π que determinan. La intersección de t y π es el punto P buscado.

Escribimos las ecuaciones de r, s y t en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = k \\ y = -1 - k \\ z = k \end{cases}$$

- ¿Son r y s coplanarias?

  Evidentemente, no son paralelas, pues $(0, 1, 1)$ no es paralelo a $(1, -1, -2)$.

  Veamos si se cortan. Para ello, igualamos, una a una, sus coordenadas:

  $$\left.\begin{array}{l} -2 = \mu \\ \lambda = -\mu \end{array}\right\} \ \mu = -2, \ \lambda = 2$$

  $\lambda = -2 - 2\mu \ \rightarrow$ ¿$2 = -2 - 2 \cdot (-2)$? Sí, es cierto. Por tanto, se cortan.

  El punto de corte de r y s se obtiene haciendo $\lambda = 2$ en las ecuaciones de r, o bien $\mu = -2$ en las ecuaciones de s. Se obtiene el punto $(-2, 2, 2)$.

- Hallamos la ecuación del plano π determinado por r y s:

  Un vector normal al plano es:

  $$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0, 1, 1) \times (1, -1, -2) = (-1, 1, -1) \ \rightarrow \ \vec{n}(1, -1, 1)$$

  Luego el plano es: $\pi: 1(x + 2) - 1(y - 2) + 1(z - 2) = 0$

  $\pi: x - y + z + 2 = 0$

- P es el punto de corte de π con la recta t:

  $k - (-1 - k) + k + 2 = 0 \ \rightarrow\ k + 1 + k + k + 2 = 0 \ \rightarrow\ 3k + 3 = 0 \ \rightarrow\ k = -1$

  El punto es $P(-1, 0, -1)$.

93 **Halla las intersecciones de la superficie $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ con los tres planos coordenados. ¿Qué figuras obtienes? ¿Cómo se llama la superficie dada?**

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Con $x = 0$: $\dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \ \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 4 y 3.

Con $y = 0$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \ \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 5 y 3.

Con $z = 0$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \ \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 5 y 4.

Es un *elipsoide*.

94 **Halla el centro y las longitudes de los ejes del elipsoide siguiente:**

$$\mathbf{2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0}$$

$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$

$2\,(x^2 - 4x + 4) + 3\,(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) = 3 + 8 + 3 + 4$

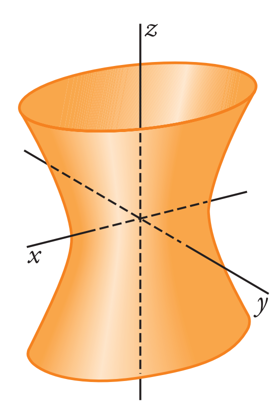
$2\,(x - 2)^2 + 3\,(y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 18$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} - \frac{(z-2)^2}{18} = 1$$

Centro: $(2, -1, 2)$

Semiejes: 3, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

95 **Halla las intersecciones de la superficie $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1$ con los planos coordenados, y describe qué tipo de curvas obtienes. ¿Cómo se llama la superfice dada?**



$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Con $x = 0$: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1 \ \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real* 2.

Con $y = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \ \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real* 3.

Con $z = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \ \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 3 y 2.

Es un *hiperboloide*.

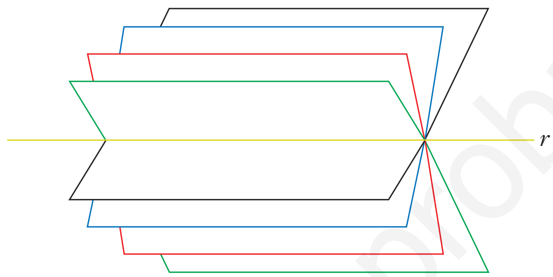
Página 211

96 Haz de planos

La recta r: $\begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: \ \ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ es la intersección de los planos π y σ.

El conjunto de todos los planos que contienen a r se llama *HAZ DE PLANOS* de arista r, y su expresión analítica es:

$$a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$



Para cada par de valores de a y b (salvo para $a = 0$ y $b = 0$), se obtiene la ecuación de un plano del haz.

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k uno de los planos del haz es perpendicular a la recta $t: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z}{k}$?

¿Cuál es ese plano del haz?

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

d) Escribe la expresión del haz de planos cuya arista es la recta s:

$$s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

e) ¿Cuál de los planos de este haz dista más del origen de coordenadas?

a) El término independiente será cero: $-4a + b = 0 \ \rightarrow \ b = 4a$. Luego:

$a(2x + 3y - z - 4) + 4a(x - 2y + z + 1) = 0$; es decir:

$2x + 3y - z - 4 + 4(x - 2y + z + 1) = 0$

$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$

$6x - 5y + 3z = 0$

b) Un plano del haz es:

$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$

Un vector normal al plano es: $\vec{n}(2a + b, 3a - 2b, -a + b)$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a+b}{3} = \frac{3a-2b}{5} = \frac{-a+b}{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10a + 5b = 9a - 6b \\ 2ka + kb = -3a + 3b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a + 11b = 0 \quad \to \quad a = -11b \\ (2k+3)a + (k-3)b = 0 \end{array}$$

$$-11(2k+3) + (k-3) = 0 \quad \to \quad -22k - 33 + k - 3 = 0$$

$$-21k - 36 = 0 \quad \to \quad k = \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7} \quad \to \quad k = \frac{-12}{7}$$

El plano del haz es:

$$-11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$$

$$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r, arista del haz.

Vector dirección de r: $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t: $\vec{d'} = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d'} = 0 \quad \to \quad (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \quad \to \quad k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b, y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r. Por ejemplo: (1, 0, –2) y (0, 3, 5).

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \quad \to \quad -2x + 10 = 3y + 3 \quad \to \quad -2x - 3y + 7 = 0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \quad \to \quad x - 5 = 3z - 9 \quad \to \quad x - 3z + 4 = 0$$

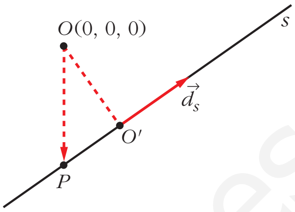
$$s: \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{array}\right.$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x + 3y - 7) + b(x - 3z + 4) = 0$$

e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a $\overrightarrow{OO'}$, siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s:



Un punto genérico de la recta s es:

$P(5 + 3\lambda, -1 - 2\lambda, 3 + \lambda)$

Un vector dirección de s es $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector $\overrightarrow{OP}$ ha de ser perpendicular a $\vec{d}_s$:

$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \quad \to \quad 3(5 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) = 0$

$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \quad \to \quad 14\lambda + 20 = 0 \quad \to \quad \lambda = \dfrac{-20}{14} = \dfrac{-10}{7}$

Luego:

$O'\left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{13}{7}, \dfrac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\overrightarrow{OO'}\left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{13}{7}, \dfrac{11}{7}\right)$; o bien (5, 13, 11).

El plano será: $5\left(x - \dfrac{5}{7}\right) + 13\left(y - \dfrac{13}{7}\right) + 11\left(z - \dfrac{11}{7}\right) = 0$

$$5x + 13y + 11z - 45 = 0$$

Página 211

AUTOEVALUACIÓN

1. $r_1: \begin{cases} x = 11 + 4\lambda \\ y = \ \ 5 + 2\lambda \\ z = \ \ 7 + 3\lambda \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 11 - 9\lambda \\ y = \ \ 5 - 5\lambda \\ z = \ \ 7 - 7\lambda \end{cases}$

a) Halla las distancias entre los puntos de corte de r_1 y r_2 con:

$$\pi: 2x - 5y + 3z - 4 = 0$$

b) Halla el ángulo de r_1 con r_2.

c) Halla el ángulo de r_1 con π.

a) Veamos primeramente que r_1 y r_2 se cortan con π, es decir, que no son perpendiculares al vector normal a π.

$(4, 2, 3) \cdot (2, -5, 3) = 7 \neq 0 \ \Rightarrow \ r_1$ corta a π

$(-9, -5, -7) \cdot (2, -5, 3) = -14 \neq 0 \ \Rightarrow \ r_2$ corta a π

Hallamos ahora los puntos de corte de r_1 y r_2 con π. Para ello, en cada caso sustituimos las coordenadas del punto genérico de la recta en la ecuación del plano:

- r_1 con π:

$$2(11 + 4\lambda) - 5(5 + 2\lambda) + 3(7 + 3\lambda) - 4 = 0$$

Operando se obtiene $\lambda = -2$. Por tanto, el punto de corte es $P(3, 1, 1)$.

- r_2 con π:

$$2(11 - 9\lambda) - 5(5 - 5\lambda) + 3(7 - 7\lambda) - 4 = 0$$

Operando se obtiene $\lambda = 1$. Por tanto, el punto de corte es $Q(2, 0, 0)$.

La distancia entre los dos puntos es:

$$dist\ (P, Q) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$$

b) Las rectas r_1 y r_2 se cortan, evidentemente, en el punto $(11, 5, 7)$. Veamos su ángulo:

$$cos\ (\widehat{r_1, r_2}) = \frac{|4 \cdot (-9) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-7)|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{9^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{67}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{155}} = 0{,}99933237$$

$$\widehat{r_1, r_2} = 2° \ 5' \ 38''$$

c) $$cos\left(90° - (\widehat{\pi, r_1})\right) = \frac{|4 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 3|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{38}} = 0{,}2108663$$

$$90° - (\widehat{\pi, r_1}) = 77° \ 49' \ 37''$$

$$(\widehat{\pi, r_1}) = 12° \ 10' \ 23''$$

2. **α: $2x + 5y - 7z + 4 = 0$**

β: $5x - y + z - 4 = 0$

γ: $2x + 5y - 7z + 49 = 0$

Calcula la distancia entre α y β y entre α y γ.

Los planos α y β se cortan, ya que sus coeficientes no son proporcionales. Por lo tanto, la distancia entre α y β es 0.

Los planos α y γ son paralelos, puesto que sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

$P(-2, 0, 0)$ es un punto de α. Por tanto:

$$dist\ (\alpha, \gamma) = dist\ (P, \gamma) = \frac{|2 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 49|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{45}{\sqrt{78}} = \frac{15\sqrt{78}}{26}$$

3. **Calcula m para que $dist\,(P, Q) = 5$, siendo $P(3, -1, 11)$ y $Q(7, -1, m)$.**

$dist\,(P, Q) = \sqrt{(7-3)^2 + (-1+1)^2 + (m-11)^2} = 5 \rightarrow 4^2 + (m-11)^2 = 25$

Hay dos soluciones: $m = 14$ y $m = 8$

4. **Halla la distancia de $P(1, -4, 3)$ a la recta: $r: \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{4-2y}{2} = \dfrac{z+1}{3}$**

(Ojo con el numerador de la segunda fracción).

La recta r se puede expresar como:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

En la segunda fracción hemos dividido numerador y denominador entre 2 para que el coeficiente de y sea 1.

El vector director de r es $\vec{d} = (5, -1, 3)$.

Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo $Q(2, 2, -1)$ un punto de la recta r. $\overrightarrow{PQ} = (1, 6, -4)$

$$dist\,(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{|1 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) - 4 \cdot 3|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{35}} = \frac{13\sqrt{35}}{35}$$

5. **Calcula la distancia entre las rectas siguientes:**

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - y + z + 4 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

Expresamos la recta s en ecuaciones paramétricas para que sea fácil tomar un punto, P, y un vector director, $\vec{d}_s$, de dicha recta. Hacemos $z = \lambda$ y despejamos:

$$s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 4 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad P(0, 4, 0) \in s \qquad \vec{d}_s(-3, -5, 1)$$

Q y $\vec{d}_r$ son, respectivamente, un punto y un vector director de la recta r:

$Q(3, 5, 4) \in r$; $\quad \vec{d}_r(2, -1, 1)$

Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (3, 1, 4)$.

$$dist\,(r, s) = \frac{|[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} \qquad [\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -45$$

$$|\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |-4, 5, 13| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 13^2} = \sqrt{210}$$

$$dist\,(r, s) = \frac{|-45|}{\sqrt{210}} = \frac{45}{\sqrt{210}} = \frac{3\sqrt{210}}{14}$$

6. Halla las ecuaciones de la recta que corta perpendicularmente a *r* y *s*.

$$r: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 3 \\ y = -6 + 4\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Las rectas *r* y *s* se cruzan.

Por ser la recta buscada, *t*, perpendicular a *r* y a *s*, su vector director es:

$$\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 5, 0) \times (0, 4, 1) = (5, -1, 4)$$

Vamos a definir la recta *t* como intersección de dos planos:

Plano α: contiene a *r* y a *t*.

El vector normal al plano será:

$$\vec{d}_t \times \vec{d}_r = (5, -1, 4) \times (1, 5, 0) = (-20, 4, 26) \, // \, (-10, 2, 13)$$

Como contiene a *r*, pasa por el punto $(-3, -2, 0)$. Por tanto:

$$\alpha: -10(x + 3) + 2(y + 2) + 13z = 0$$

$$\alpha: -10x + 2y + 13z - 26 = 0$$

Plano β: contiene a *s* y a *t*.

El vector normal al plano será:

$$\vec{d}_t \times \vec{d}_s = (5, -1, 4) \times (0, 4, 1) = (-17, -5, 20)$$

Como contiene a *s*, pasa por el punto $(3, -6, 2)$. Por tanto:

$$\beta: -17(x - 3) - 5(y + 6) + 20(z - 2) = 0$$

$$\beta: -17x - 5y + 20z - 19 = 0$$

Por tanto, la recta *t* es:

$$\begin{cases} -10x + 2y + 13z - 26 = 0 \\ -17x - 5y + 20z - 19 = 0 \end{cases}$$

En paramétricas:

$$t: \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

7. a) Halla el área del triángulo determinado por los puntos de corte del plano $3x + y + 2z - 6 = 0$ con los tres ejes coordenados.

b) Halla el volumen de la pirámide determinada por esos tres puntos y el origen de coordenadas.

a) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

- Eje X: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

  $3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2; \; P(2, 0, 0)$

- Eje Y: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

  $y - 6 = 0 \rightarrow y = 6; \; Q(0, 6, 0)$

- Eje Z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

  $2z - 6 = 0 \rightarrow z = 3; \; R(0, 0, 3)$

El área del triángulo de vértices P, Q y R es la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{|(-2, 6, 0) \times (-2, 0, 3)|}{2} =$$

$$= \frac{|(18, 6, -12)|}{2} = \frac{\sqrt{18^2 + 6^2 + 12^2}}{2} = 3\sqrt{14} \text{ u}^2$$

b) $V_{\text{TETRAEDRO}} = \dfrac{\text{Área triángulo} \cdot \text{altura}}{3}$

La altura es la distancia del origen de coordenadas al plano.

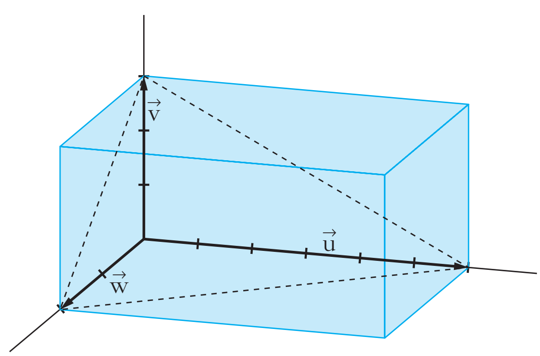
$$\text{altura} = \frac{|-6|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}} \text{ u}$$

$$V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{\cancel{3}\cancel{\sqrt{14}} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{\cancel{14}}}}{\cancel{3}} = 6\text{u}^3$$

Otra forma:

La pirámide es la sexta parte del ortoedro de aristas 2, 3 y 6.

$$V = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 6 \text{ u}^3$$



8. **a) Halla el centro y el radio de esta esfera:**

$$\boldsymbol{S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 20 = 0}$$

b) Calcula el radio de la circunferencia que determina el plano $3x - 4z + 5 = 0$ al cortar a S.

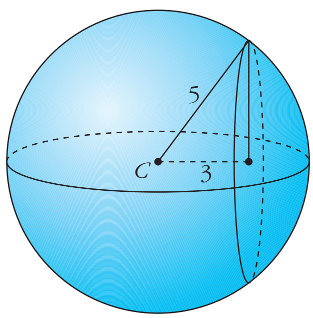
a) Completamos cuadrados en la ecuación de la esfera:

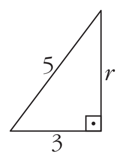
$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5^2$$

Por tanto, el *radio* es 5, y el *centro*, $C(2, 0, -1)$.

b) Hallamos la distancia del centro de la esfera al plano π: $3x - 4z + 5 = 0$:

$$dist\ (C, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ u}$$





Por Pitágoras:

$$r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ u}$$

8 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

Página 221

REFLEXIONA Y RESUELVE

Algunos límites elementales

■ **Utiliza tu sentido común para dar el valor de los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to +\infty} x^2$, $\quad \lim_{x \to +\infty} x^3$, $\quad \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim_{x \to -\infty} x^2$, $\quad \lim_{x \to -\infty} x^3$, $\quad \lim_{x \to -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim_{x \to 2} x^2$, $\quad \lim_{x \to 2} x^3$, $\quad \lim_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$, $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$, $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1}$

e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$, $\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$, $\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$, $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$, $\quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1}$

g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$, $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2+1}$

h) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$, $\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x+5}$

a) $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\quad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\quad \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\quad \lim_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$; $\quad \lim_{x \to 2} x^3 = 8$; $\quad \lim_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

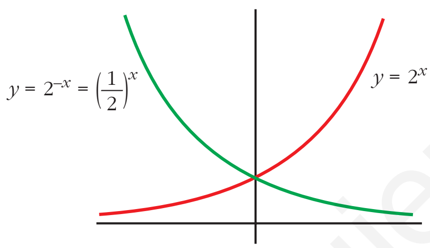
f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0$

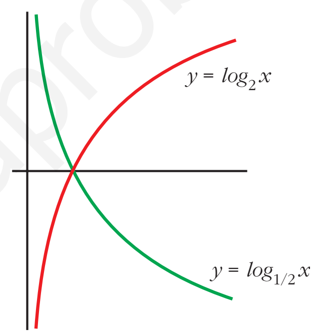
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 1} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1} = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x + 5} = -\infty$

Exponenciales y logarítmicas

Recuerda cómo son las gráficas de algunas funciones exponenciales y logarítmicas:





■ **A la vista de estas gráficas, asigna valor a los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x}$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 x$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \log_2 x$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{1/2} x$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \log_{1/2} x$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_{1/2} x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x} = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 x$ no existe, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{1/2} x$ no existe, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \log_{1/2} x = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_{1/2} x = -\infty$

Con calculadora

Tanteando con la calculadora, da el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) \cdot \ln(x-3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) \cdot \ln(x-3) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = e^6 \simeq 403{,}43$

Página 222

1. Asigna límite (finito o infinito) a las siguientes sucesiones e identifica a las que no tienen límite:

a) $a_n = n^3 - 10n^2$ **b)** $b_n = 5 - 3n^2$ **c)** $c_n = \dfrac{n+5}{2-n}$ **d)** $d_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

e) $e_n = \text{sen} \dfrac{\pi}{4} n$ **f)** $f_n = 2^n$ **g)** $g_n = -2^n$ **h)** $h_n = (-2)^n$

a) $a_n = n^3 - 10n^2$

$(-9, -32, -63, -96, -125, -144, -147, -128, -81, 0, 121, \dots)$ $a_n \to +\infty$

b) $b_n = 5 - 3n^2$ $(2, -7, -22, -43, -70, -103, -142, -187, -283, \dots)$ $b_n \to -\infty$

c) $c_n = \dfrac{n+5}{2-n}$ $\left(6, \dots, -8, -\dfrac{9}{2}, -\dfrac{10}{3}, -\dfrac{11}{4}, -\dfrac{12}{5}, -\dfrac{13}{6}, -\dfrac{14}{7}, \dots\right)$ $c_n \to -1$

d) $d_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{16}{5}, \dfrac{25}{6}, \dfrac{36}{7}, \dfrac{49}{8}, \dfrac{64}{9}, \dfrac{81}{10}, \dfrac{100}{11}, \dots\right)$ $d_n \to +\infty$

e) $e_n = \text{sen} \dfrac{\pi}{4} n$ $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dots\right)$ e_n no tiene límite

f) $f_n = 2^n$ $(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots)$ $f_n \to +\infty$

g) $g_n = -2^n$ $(-2, -4, -8, -16, -32, -64, -128, -256, \dots)$ $g_n \to -\infty$

h) $h_n = (-2)^n$ $(-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, \dots)$ h_n no tiene límite

Página 225

1. **Si $u(x) \to 2$ y $v(x) \to -3$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:**

a) $u(x) + v(x)$ **b)** $v(x)/u(x)$

c) $5^{u(x)}$ **d)** $\sqrt{v(x)}$

e) $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) + v(x)] = 2 + (-3) = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{-3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{v(x)}$ no existe

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = 2 \cdot (-3) = -6$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

2. **Si $u(x) \to -1$ y $v(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:**

a) $u(x) - v(x)$ **b)** $v(x) - u(x)$

c) $v(x)/u(x)$ **d)** $\log_2 v(x)$

e) $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) - v(x)] = -1 - 0 = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [v(x) - u(x)] = 0 - (-1) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 v(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } v(x) \to 0^+ \\ \text{no existe si } v(x) \to 0^- \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = -1 \cdot 0 = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

Página 226

3. **Halla los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x})$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x}) = -\infty$

4. **Calcula estos límites:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2}$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} (-2\log_{10} x)$

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2} = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} (-2\log_{10} x) = -\infty$

Página 227

5. **Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos $(\pm\infty)$ cuando $x \to +\infty$:**

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0,5^x$ **c)** $-1,5^x$

d) $\log_2 x$ **e)** $1/(x^3 + 1)$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

a) $\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1) = +\infty \to$ Sí

b) $\lim_{x \to +\infty} 0,5^x = 0 \to$ No

c) $\lim_{x \to +\infty} (-1,5^x) = -\infty \to$ Sí

d) $\lim_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty \to$ Sí

e) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3 + 1} = 0 \to$ No

f) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \to$ Sí

g) $\lim_{x \to +\infty} 4^x = +\infty \to$ Sí

h) $\lim_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0 \to$ No

i) $\lim_{x \to +\infty} -4^x = -\infty \to$ Sí

6. **a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:**

$$\log_2 x \qquad \sqrt{x} \qquad x^2 \qquad 3x^5 \qquad 1,5^x \qquad 4^x$$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1,5^x}$$

a) $\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1,5^x \quad 4^x$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1,5^x} = 0$

Página 228

7. **Si, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:**

a) $f(x) - h(x)$	**b)** $f(x)^{f(x)}$	**c)** $f(x) + h(x)$
d) $f(x)^x$	**e)** $f(x) \cdot h(x)$	**f)** $u(x)^{u(x)}$
g) $f(x)/h(x)$	**h)** $[-h(x)]^{h(x)}$	**i)** $g(x)^{h(x)}$
j) $u(x)/h(x)$	**k)** $f(x)/u(x)$	**l)** $h(x)/u(x)$
m) $g(x)/u(x)$	**n)** $x + f(x)$	**ñ)** $f(x)^{h(x)}$
o) $x + h(x)$	**p)** $h(x)^{h(x)}$	**q)** x^{-x}

a) $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - h(x)\big) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = (+\infty) + (-\infty) \;\to\;$ Indeterminado

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = (0)^{(0)} \;\to\;$ Indeterminado

g) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)} \;\to\;$ Indeterminado

h) $\lim_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim_{x \to +\infty} \big(x + f(x)\big) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + h(x)\big) = (+\infty) + (-\infty) \;\to\;$ Indeterminado

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \;\to\;$ No existe

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

Página 229

8. **Las funciones f, g, h y u son las del ejercicio propuesto 7 (página anterior). Di cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones. En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo, y, si no lo es, di cuál es el límite:**

a) $f(x) + h(x)$ **b)** $f(x)/h(x)$

c) $f(x)^{-h(x)}$ **d)** $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ **f)** $u(x)^{h(x)}$

g) $[g(x)/4]^{f(x)}$ **h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = (+\infty) + (-\infty)$. Indeterminado.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)}$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{(0)}$. Indeterminado.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{h(x)} = 0^{-\infty} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = (1)^{(+\infty)}$. Indeterminado.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{f(x)} = 4^{+\infty} = +\infty$

Página 231

1. **Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:**

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1}\,)$ **b)** $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}$ **d)** $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ **f)** $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}\right) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \log_5 x^4\right) = +\infty$

2. Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$ **b)** $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$ **c)** $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$ **e)** $2x - \sqrt{x^2+x}$ **f)** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^3+5)(x-2) - (4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2-4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2-4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2+2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{4x^2+2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 2x^2 + 4}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{2x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(2x - \sqrt{x^2+x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+x}\right)}{2x + \sqrt{x^2+x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1 - x - 2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0$

Página 232

3. **Halla los siguientes límites cuando $x \to +\infty$:**

a) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{x}$ **b)** $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5}$

d) $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{x}$ **e)** $\left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x}$ **f)** $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{1/5} = e^{1/5}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5} = 1^{5} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/5}\right)^{x/5}\right]^{5} = e^{5}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-5} = e^{-5}$

4. **Calcula estos límites cuando $x \to +\infty$:**

a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2}$ **b)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$

d) $\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5}$ **e)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$ **f)** $\left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2} = e^{3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-2} = e^{-2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{3/5} = e^{3/5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{5} = 1^{5} = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-3/2} = e^{-3/2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x/2}\right)^{5x/2}\right]^{2} = e^{2}$

Página 233

5. Resuelve, aplicando la regla anterior:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-4}$

a) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+5}{3x-1} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (5x-3) = +\infty$, l es del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la regla:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1} - 1\right) \cdot (5x-3)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{6}{3x-1}\right) \cdot (5x-3)} = e^{10}$$

b) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-4}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-4) = +\infty$, l es del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la regla:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-3x^2+2}{x^2+2} - 1\right) \cdot (2x-4)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^2-3x+2}{x^3+x^2}\right) \cdot (2x-4)} = e^{-2}$$

Página 235

1. Sin operar, di el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$ **b)** $x^2 + 2^x$

c) $x^2 - 2^x$ **d)** $x^2 - 2^{-x}$

e) $2^{-x} - 3^{-x}$ **f)** $\sqrt{x^5-1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$ **h)** $x^2 - \sqrt{x^4-1}$

i) $\sqrt[3]{x+2} - x^2$ **j)** $3^{-x} - 2^{-x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2^x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2^x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2^{-x}) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^{-x} - 3^{-x}) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^5 - 1} - 5^x\right)$ no existe

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^x - x^2) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^5 - \sqrt{x^4 - 1}\right) = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x + 2} - x^2\right) = -\infty$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3^{-x} - 2^{-x}) = +\infty$

2. **Calcula el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$

d) $2x + \sqrt{x^2 + x}$

e) $\sqrt{x^2 + 2x} + x$

f) $\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x + 3}$

h) $\left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \dfrac{-4x^3 - x}{-x - 2}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-x^3}{2x^2 + 1} + \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^3 + 2x^3 + x}{4x^2 + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4x^2 + 2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 2}\right)\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{-1}{1 + 1} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{x^2 + x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2x + \sqrt{x^2 - x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(-2x + \sqrt{x^2 - x}\right)\left(-2x - \sqrt{x^2 - x}\right)}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \dfrac{-2}{1 + 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{-x}\right)^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{-x/3}\right)^{-x/3}\right]^6 = e^6$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-5x + 3} = e^{-5}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2}\right)^{-3x - 1} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2} - 1\right) \cdot (-3x - 1)\right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x - 3}{-x^2 + 2} \cdot (-3x - 1)\right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{x^2 + 2}} = e^3$

Página 238

1. Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, di el valor del límite cuando x tiende a 1 de las siguientes funciones:

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $f(x) \cdot g(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

d) $f(x)^{g(x)}$ **e)** $\sqrt{g(x)}$ **f)** $4f(x) - 5g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(f(x) + g(x)\right) = 3 + 2 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 3 \cdot 2 = 6$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{g(x)} = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(4f(x) - 5g(x)\right) = 12 - 10 = 2$

2. **Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim_{x \to a} g(x) = m$, entonces $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$.**

Enuncia las restantes propiedades de los límites de las operaciones con funciones empleando la notación adecuada.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim_{x \to a} g(x) = m$, entonces:

1) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

2) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

3) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ (Si $m \neq 0$).

5) Si $f(x) > 0$, $\lim_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)} \right] = l^m$

6) Si n es impar, o si n es par y $f(x) \geq 0$ $\rightarrow$ $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

7) Si $\alpha > 0$ y $f(x) > 0$, $\lim_{x \to a} [\log_\alpha f(x)] = \log_\alpha l$

3. **Si $\lim_{x \to 2} p(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 2} q(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 2} r(x) = 3$ y $\lim_{x \to 2} s(x) = 0$, di, en los casos en que sea posible, el valor del $\lim_{x \to 2}$ de las siguientes funciones:**

[Recuerda que las expresiones $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ son indeterminaciones].

a) $2p(x) + q(x)$	**b)** $p(x) - 3q(x)$	**c)** $\dfrac{r(x)}{p(x)}$	**d)** $\dfrac{p(x)}{p(x)}$
e) $\dfrac{s(x)}{q(x)}$	**f)** $\dfrac{p(x)}{q(x)}$	**g)** $s(x) \cdot p(x)$	**h)** $s(x)^{s(x)}$
i) $p(x)^{r(x)}$	**j)** $r(x)^{s(x)}$	**k)** $\dfrac{3 - r(x)}{s(x)}$	**l)** $\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)}$
m) $r(x)^{p(x)}$	**n)** $r(x)^{-q(x)}$	**ñ)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)}$	**o)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)}$

a) $\lim_{x \to 2} [2p(x) + q(x)] = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim_{x \to 2} [p(x) - 3q(x)] = (+\infty) - (+\infty)$. Indeterminado.

c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to 2} 1 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{q(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$. Indeterminado.

g) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot p(x)] = (0) \cdot (+\infty)$. Indeterminado.

h) $\lim\limits_{x \to 2} s(x)^{s(x)} = (0)^{(0)}$. Indeterminado.

i) $\lim\limits_{x \to 2} p(x)^{r(x)} = +\infty^3 = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{s(x)} = 3^0 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - r(x)}{s(x)} = \dfrac{3-3}{(0)} = \dfrac{(0)}{(0)}$. Indeterminado.

l) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{s(x)} = 1^0 = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{-q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

ñ) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)} = (1)^{(+\infty)}$. Indeterminado.

o) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)} = (1)^{(-\infty)}$. Indeterminado.

Página 239

4. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2 - 3x + 5)}{(x+1)(x-7)} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

5. **Calcula los límites siguientes:**

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt[6]{\dfrac{(x-1)^3\,(x+3)^3}{x^4(x+3)^2}} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt[6]{\dfrac{(x-1)^3\,(x+3)}{x^4}} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+2)^2\,(x-1)^2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2\,(x-1)}} \to$

$\to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

Página 240

6. **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x(x+2)} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2+1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+1)(x^2 - 5x + 2) - (x+2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

7. **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 7} \left(\dfrac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}}$

$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}} = e^{\lim\limits_{x \to 7} \left[\left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x-3} - 1 \right) \cdot \frac{x+1}{x-7} \right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 8x + 7}{x-3} \cdot \frac{x+1}{x-7} \right)} = e^{\lim\limits_{x \to 7} \frac{(x-7)(x-1)(x+1)}{(x-3)(x-7)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 7} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)}} = e^{12}$$

Página 243

1. Encuentra cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales tenga una raíz la ecuación siguiente:

$$\mathbf{2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0}$$

Busca los intervalos entre –4 y 3. Comprueba que $f(1,5) < 0$ y tenlo en cuenta.

Consideramos la función $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$.

Tenemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-4) = 231 > 0 \\ f(-3) = -7 < 0 \end{array}\right\} \text{Hay una raíz en } (-4, -3).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{Hay una raíz en } (0, 1).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(1,5) = -1,375 < 0 \end{array}\right\} \text{Hay una raíz en } (1;\ 1,5).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,5) = -1,375 < 0 \\ f(2) = 3 > 0 \end{array}\right\} \text{Hay una raíz en } (1,5;\ 2).$$

2. Comprueba que las funciones $e^x + e^{-x} - 1$ y $e^x - e^{-x}$ se cortan en algún punto.

Consideramos la función diferencia:

$$F(x) = e^x + e^{-x} - 1 - (e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} - 1 - e^x + e^{-x} = 2e^{-x} - 1$$

$F(x)$ es una función continua. Además:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -0,26 < 0 \end{array}\right\} \textit{signo de } F(0) \neq \textit{signo de } F(1).$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1)$ tal que $F(c) = 0$; es decir, existe $c \in (0, 1)$ tal que las dos funciones se cortan en ese punto.

3. Justifica cuáles de las siguientes funciones tienen máximo y mínimo absoluto en el intervalo correspondiente:

a) $x^2 - 1$ en $[-1, 1]$

b) x^2 en $[-3, 4]$

c) $1/(x - 1)$ en $[2, 5]$

d) $1/(x - 1)$ en $[0, 2]$

e) $1/(1 + x^2)$ en $[-5, 10]$

a) $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $[-1, 1]$. Por el teorema de Weierstrass, podemos asegurar que tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

b) $f(x) = x^2$ es continua en $[-3, 4]$. Por tanto, también tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es continua en $[2, 5]$. Por tanto, tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no es continua en $[0, 2]$, pues es discontinua en $x = 1$. No podemos asegurar que tenga máximo y mínimo absolutos en ese intervalo. De hecho, no tiene ni máximo ni mínimo absolutos, puesto que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es continua en $[-5, 10]$. Por tanto, tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Límites cuando $x \to \pm\infty$

1 **Sabiendo que $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ y $\lim c_n = 3$, di en cuáles de los siguientes casos hay indeterminación.**

En los casos en que no la haya, di cuál es el límite:

a) $a_n + b_n$ **b)** $b_n + c_n$ **c)** $\dfrac{a_n}{c_n}$ **d)** $\dfrac{a_n}{b_n}$

e) $(c_n)^{b_n}$ **f)** $(3 - c_n) \cdot a_n$ **g)** $\dfrac{b_n}{3 - c_n}$ **h)** $\left(\dfrac{3}{c_n}\right)^{b_n}$

a) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = +\infty + (-\infty) = (+\infty) - (+\infty) \to$ Indeterminación.

b) $\lim(b_n + c_n) = \lim b_n + \lim c_n = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\lim \dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{+\infty}{3} = +\infty$

d) $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)} \to$ Indeterminación.

e) $\lim [c_n]^{b_n} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = 0$

f) $\lim [3 - c_n] \cdot a_n = (0) \cdot (+\infty) \to$ Indeterminación.

g) $\lim \dfrac{b_n}{3 - c_n} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$ (puede ser $+\infty$ o $-\infty$).

h) $\lim \left[\dfrac{3}{c_n}\right]^{b_n} = (1)^{(-\infty)} \to$ Indeterminación.

2 **Calcula los límites cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{2 - x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 5}{2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 5}{2 + x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x - 4}{-2x + 3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 - 2x - 3}{7 - 5x^3} = \dfrac{1}{5}$

3 **Calcula los límites de las sucesiones siguientes:**

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1}$ **b)** $\lim \sqrt{\dfrac{5n^2 - 7}{n + 1}}$

c) $\lim \dfrac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3}$ **d)** $\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}}$

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1} = \lim \dfrac{\sqrt{3}\, n}{2n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\lim \sqrt{\dfrac{5n^2 - 7}{n + 1}} = +\infty$

c) $\lim \dfrac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3} = 0$ d) $\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}} = 0$

4 **Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

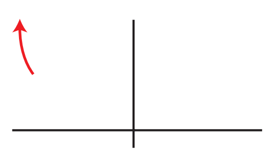
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right) = +\infty$

5 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x + 1}$

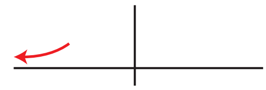
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$

Sabemos que $2^{x+1} > 0$ para cualquier x.



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Comprobamos que $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{x} > \dfrac{1}{e}$ dando a x algún valor. Por ejemplo, $x = -10$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{1+3x} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - 1\right) \cdot (1+3x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2-6x}{x}\right)} = e^{-6} = \dfrac{1}{e^6}$

Comprobamos que $\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} < e^{-6}$ dando a x algún valor. Por ejemplo, $x = -10$.

6 **Halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right) = (\infty) - (\infty)$ (Indeterminación).

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $\left(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}\right)$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}\right)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = (\infty) - (\infty)$ (Indeterminación).

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

7 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$ **d)** $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \log x}{\log x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\log x} + 1 \right) = +\infty + 1 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

8 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1} \right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5} \right)^{x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x+1)}{2(x+1)} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right)\left(x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}\right)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - (x^4 + 2x)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - x^4 - 2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1} \right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5} \right)^{x-1} = \left(\dfrac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$

9 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ **e)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x-2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5}$

a) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right) \cdot x^2} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2-1}} = e^2$$

b) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}-1\right) \cdot (2x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x-3}{x-2}} = e^6$$

c) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+3} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}-1\right) \cdot (x+2)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4(x+2)}{x+3}} = e^{-4}$$

d) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-4}{3x-2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{3} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x-2}-1\right) \cdot \frac{x+1}{3}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{3x-2} \cdot \frac{x+1}{3}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x-2}{9x-6}} = e^{-2/9}$$

e) Sea $l = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{3x-2}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 2) = -\infty$, se trata de un límite del tipo $\dfrac{1}{(1)^{(+\infty)}}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - 1\right) \cdot (3x-2)}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cdot (3x-2)}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

f) Sea $l = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-3}{x+2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} - 1\right) \cdot (x^2-5)} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-5(x^2-5)}{x+2}} = +\infty$$

10 **Halla $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en los siguientes casos:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

b) • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^2}{x} = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x^2}{x} = +\infty$

Página 250

Límites en un punto

11 **Sabiendo que:**

$$\lim_{x \to 2} p(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2} q(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2} r(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2} s(x) = 0$$

di, en los casos en que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)] = (0) \cdot (-\infty) \;\rightarrow\;$ Indeterminado.

d) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2\,(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

12 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+3}{x^3} - \dfrac{1}{x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)}\right]$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+3}{x^3} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+3-x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{3}{(0)}$.

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{x^3} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x^3} = +\infty.$ No tiene límite.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)}\right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-(x-1)}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-x+1}{x(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = \dfrac{2}{0}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty.$

Así, $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x}\right] = +\infty.$

13 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{1 - x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^3}{1 - x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2}$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} = \dfrac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

Dividimos numerador y denominador por $x - 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x-6)(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x \to 1} (6 - x) = 5$$

(*) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & -6 \\ \hline & 1 & -6 & \lfloor\, 0 \end{array}$$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^3}{1 - x^2} = \dfrac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{(x-1)^3}{1-x^2} = \frac{(x-1)(x-1)(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(x-1)(x-1)(x-1)}{-(x-1)(1+x)} = \frac{(x-1)^2}{-(1+x)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{-(1+x)} = \frac{0}{-2} = 0$$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \dfrac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

Dividimos numerador y denominador por $x + 1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2} = 0$$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x$$

14 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x - 2} \right]$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x} \right]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x - 2} \right] = \lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{(x - 2)(x - 3)} - \dfrac{4}{(x - 2)} \right] =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - 4(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - 4x + 12}{(x - 2)(x - 3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = \dfrac{7}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(1 - \sqrt{3 - x})(1 + \sqrt{3 - x})}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - (3 - x)}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - 3 + x}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1 + \sqrt{3 - x}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x + 9} - 3)(\sqrt{x + 9} + 3)}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 9 - 9}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = \dfrac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x} \right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x) - (1 - x)}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x - 1 + x}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{3(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \dfrac{2}{3 \cdot 2} = \dfrac{1}{3}$

15 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{7-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

a) Sea $l = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{2x+1} = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x^2+1}{2x+1} - 1\right) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0}\frac{x^2-2x}{2x+1} \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0}\frac{x^2-2x}{2x^2+x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0}\frac{x(x-2)}{x(2x+1)}} = e^{\lim\limits_{x \to 0}\frac{x-2}{2x+1}} = e^{-2}$$

b) Sea $l = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{7-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Como $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2-x-1}{7-x} = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{2x^2-x-1}{7-x} - 1\right) \cdot \frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x \to 2}\frac{2x^2-8}{7-x} \cdot \frac{1}{x-2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 2}\frac{2(x+2)(x-2)}{(7-x)(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x \to 2}\frac{2x+4}{7-x}} = e^{8/5}$$

Continuidad

16 **Averigua si estas funciones son continuas en $x = 2$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 2 \\ 6-x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \le 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x-2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (6-x) = 4 \\ f(2) = 6 - 2 = 4 \end{array}\right\}$$ $f(x)$ es continua en $x = 2$, puesto que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

b) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2-1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x+1) = 5 \end{array}\right\}$$ $f(x)$ no es continua en $x = 2$, puesto que no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

s17 **Estudia la continuidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) • En $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es continua; puesto que e^x y $\ln x$ son continuas para $x < 1$ y $x \geq 1$, respectivamente.

• En $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} e^x = e \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (\ln x) = 0$

No es continua en $x = 1$, pues no existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) El dominio de la función es $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \rightarrow$ La función es continua.
- En $x = 0$ es discontinua, puesto que $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

  Además, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

  Hay una asíntota vertical en $x = 0$.

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \\[2ex] f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } x = 1, \text{ pues} \\ \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1). \end{array}$$

18 **Halla los puntos de discontinuidad de la función** $y = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$ **y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.**

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2(x+3) - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x + 6 - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x - 6}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

Calculamos los valores que anulan el denominador:

$$(x-3)(x+3) = 0 \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}$$

La función es discontinua en $x = 3$ y en $x = -3$, pues no está definida para esos valores.

- En $x = -3$: $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2}{x+3} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2}{(x+3)} = +\infty$

  Hay una asíntota vertical en $x = -3$; la discontinuidad no es evitable.

- En $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{(x+3)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

  Luego en $x = 3$, la discontinuidad es evitable, porque la función tiene límite en ese punto.

PARA RESOLVER

19 **a) Calcula el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:**

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$$

b) Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{x-3}{(x-3)(x-2)}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2}$

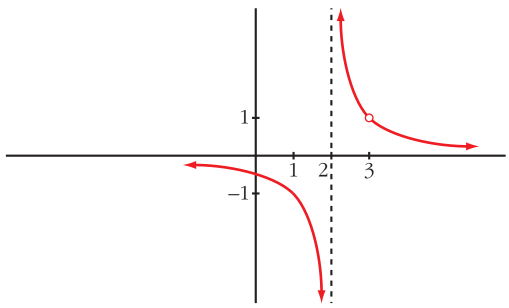
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b)



s20 **Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2k & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \ne 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (k - x) = k - 2 \\ f(2) = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ k - 2 = 3 \;\to\; k = 5 \end{array}$$

b) • Si $x \ne 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + k) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ f(0) = 0 + k = k \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ k = -1 \end{array}$$

c) • Si $x \ne 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{kx} = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x + 2k = 2k \\ f(0) = e^{k \cdot 0} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 1 = 2k \;\to\; k = 1/2 \end{array}$$

Página 251

s21 **Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 1$, la función es continua, porque lo es $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$.

Para que sea continua en $x = 1$, debe verificarse que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Calculamos $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

(*) Indeterminación del tipo $\dfrac{(0)}{(0)}$. Simplificamos la fracción.

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $k = 4$. Para este valor, f es continua en $\mathbb{R}$.

b) • Si $x \geq 0$ y $x \neq 1$, la función es continua, porque lo es $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Para que sea continua en $x = 1$, debe verificarse que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Calculamos $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} \quad \text{(Indeterminación).}$$

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $\left(\sqrt{x} + 1\right)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{(x - 1)\left(\sqrt{x} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = k$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $k = \dfrac{1}{2}$. Para este valor, f es continua en $[0, +\infty)$.

22 Estudia la continuidad de esta función: $f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 1 \rightarrow$ la función es continua.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x + 2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

• Si $x = 1 \rightarrow$ No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$.

Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

23 **Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a de modo que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

☛ ***El precio de una unidad es $C(x)/x$.***

a) $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Para que sea continua, ha de ser:

$\sqrt{100a + 500} = 50 \rightarrow 100a + 500 = 2\,500 \rightarrow 100a = 2\,000 \rightarrow a = 20$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ €

s24 **En el laboratorio de Biología de la universidad, han determinado que el tamaño T de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo t, siguiendo la ley:**

$$T(t) = \begin{cases} \sqrt{t + a} & \text{si } t < 8 \text{ horas} \\ \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} & \text{si } t > 8 \text{ horas} \end{cases}$$

El parámetro a es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor para el cual el crecimiento se mantenga continuo en $t = 8$.

a) Decide la cuestión.

b) Investiga cuál llegará a ser el tamaño de una bacteria si se la cultiva indefinidamente.

a) Para que la función sea continua en $t = 8$, debe cumplirse que $\lim\limits_{t \to 8} T(t) = T(8)$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{t \to 8^-} T(t) = \lim_{t \to 8^-} \sqrt{t + a} = \sqrt{8 + a}$$

$$\lim_{t \to 8^+} T(t) = \lim_{t \to 8^+} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \lim_{t \to 8^+} \frac{\sqrt{3t - 15} - 3}{t - 8} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{\left(\sqrt{3t - 15} - 3\right)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 15 - 9}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 24}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3(t - 8)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3}{\sqrt{3t - 15 + 3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Para que $T(t)$ pueda ser continua, tendría que cumplirse que:

$$\sqrt{8 + a} = \frac{1}{2} \rightarrow 8 + a = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{-31}{4}$$

Pero, si $a = \frac{-31}{4}$, quedaría $T(t) = \sqrt{t + \frac{-31}{4}}$ si $t < 8$.

Esto daría lugar a que $T(t)$ no existiera para $t \le \frac{31}{4} = 7{,}75$ horas.

Por tanto, no hay ningún valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ micras.

25 **Dada $f(x) = \frac{|x|}{x + 1}$, justifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x + 1} & \text{si } x \le 0 \\[2ex] \dfrac{x}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

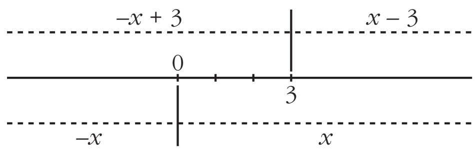
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x + 1} = -1$$

26 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, definiéndolas previamente por intervalos:**

a) $f(x) = |x - 3| - |x|$ **b)** $f(x) = |2x - 1| + x$ **c)** $f(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$

a) Definimos f por intervalos:

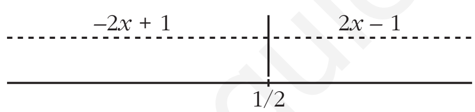


- Si $x < 0$: $|x-3| - |x| = -(x-3) - (-x) = -x + 3 + x = 3$
- Si $0 \le x \le 3$: $|x-3| - |x| = -(x-3) - x = -2x + 3$
- Si $x > 3$: $|x-3| - |x| = (x-3) - x = -3$

Luego: $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \le 0 \\ -2x+3 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

b)



- Si $x \le \dfrac{1}{2}$: $|2x-1| + x = -(2x-1) + x = -2x + 1 + x = -x + 1$
- Si $x > \dfrac{1}{2}$: $|2x-1| + x = (2x-1) + x = 3x - 1$

Luego: $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \le \dfrac{1}{2} \\ 3x-1 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x-1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$

c) • Si $x < 0$: $\dfrac{x+1}{|x|} = \dfrac{x+1}{-x}$

- Si $x > 0$: $\dfrac{x+1}{|x|} = \dfrac{x+1}{x}$

f no está definida en $x = 0$. Luego: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+1}{x} = -1$$

27 **Estudia la continuidad en $x = 0$ de la función:**

$$y = 2x + \frac{|x|}{x}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, entonces:

$\lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1$; $\lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

s28 **Se define la función f del modo siguiente:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- Para que la gráfica de $f(x)$ pase por el origen de coordenadas, ha de ser $f(0) = 0$, es decir: $f(0) = b = 0$
- Para que la función sea continua (para $x \neq 1$, es una función continua), tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\ f(1) = 2 + a \end{array}\right\}$$

Han de ser iguales, es decir: $2 + a = -1 \rightarrow a = -3$

Por tanto, si $a = -3$ y $b = 0$, la función es continua; y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

CUESTIONES TEÓRICAS

29 **Si una función no está definida en $x = 3$, ¿puede ocurrir que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$?**

¿Puede ser continua la función en $x = 3$?

Sí, puede ser que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$, por ejemplo:

$f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ es tal que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 5$; y $f(x)$ no está definida en $x = 3$.

Sin embargo, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 3$ (pues no existe $f(3)$).

30 **De una función continua, f, sabemos que $f(x) < 0$ si $x < 2$ y $f(x) > 0$ si $x > 2$. ¿Podemos saber el valor de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?**

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

s31 **Sea la función $f(x) = x^2 + 1$.**

¿Podemos asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo [1, 5]? En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y $f(0) = 1$, $f(2) = 5$.

Por tanto, por el teorema de los valores intermedios, la función toma, en el intervalo $[0, 2]$, todos los valores del intervalo $[1, 5]$.

s32 **Da una interpretación geométrica del teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que las gráficas de $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.**

☛ ***Mira el ejercicio resuelto 11.***

- Interpretación geométrica: Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado, y en sus extremos toma valores de distinto signo, entonces, con seguridad, corta al eje X en ese intervalo.
- Para las dos funciones dadas, $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$, consideramos la función diferencia: $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos x$

  Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, también lo es $f(x) - g(x)$.

  Además: $\begin{cases} f(0) - g(0) = -4 \quad \to \quad f(0) - g(0) < 0 \\ f(2) - g(2) \approx 9{,}42 \quad \to \quad f(2) - g(2) > 0 \end{cases}$

  Por tanto, existe un número $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$ (aplicando el teorema de Bolzano), es decir, $f(c) = g(c)$.

Página 252

s33 Considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Para que f sea continua en $x = 2$, debemos elegir $f(2) = 4$.

34 De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado [0, 1] y que para $0 < x \le 1$ es $g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$. ¿Cuánto vale $g(0)$?

Si g es continua en $x = 0$, debe verificar que $\lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$. Hallamos el límite:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$$

Por tanto, $g(0) = 1$.

s35 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 4}{4} & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

observamos que f está definida en [0, 1] y que verifica $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e^{-1} > 0$, pero no existe ningún $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

Según el teorema de Bolzano, si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y *signo de* $f(a) \neq$ *signo de* $f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Veamos si se cumplen las hipótesis. Estudiamos la continuidad en $x = \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to (1/2)^-} f(x) = \lim_{x \to (1/2)^-} \frac{x-4}{4} = \frac{-7}{8} \\ \displaystyle\lim_{x \to (1/2)^+} f(x) = \lim_{x \to (1/2)^+} e^{-x^2} = e^{-1/4} \end{array}\right\}$$

Como $\lim_{x \to (1/2)^-} f(x) \neq \lim_{x \to (1/2)^+} f(x)$, no existe $\lim_{x \to 1/2} f(x)$.

$f(x)$ no es continua en $x = \frac{1}{2}$.

Por tanto, f no es continua en el intervalo [0, 1]; luego no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en dicho intervalo.

s36 **Se sabe que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = 3$ y $f(b) = 5$. ¿Es posible asegurar que para algún c del intervalo $[a, b]$ cumple que $f(c) = 7$? Razona la respuesta y pon ejemplos.**

No lo podemos asegurar. Por ejemplo:

$f(x) = x + 3$ cumple que $f(0) = 3$ y $f(2) = 5$. Sin embargo, no existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 7$, ya que: $f(c) = c + 3 = 7 \;\rightarrow\; c = 4 \;\rightarrow\; c \notin [0, 2]$.

s37 **Halla razonadamente dos funciones que no sean continuas en un punto x_0 de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho punto.**

Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{no es continua en } x = 2;$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{no es continua en } x = 2;$$

pero la función suma, $f(x) + g(x) = 3x$, sí es continua en $x = 2$.

s38 **¿Tiene alguna raíz real la siguiente ecuación?:**

$$\mathit{sen}\; x + 2x + 1 = 0$$

Si la respuesta es afirmativa, determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

Consideramos la función $f(x) = \mathit{sen}\; x + 2x + 1$.

Tenemos que: $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \approx 1{,}84 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \; \textit{signo de } f(1) \neq \textit{signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, la ecuación $\mathit{sen}\; x + 2x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

s39 **Demuestra que la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución real.**

Consideramos la función $f(x) = x^5 + x + 1$.

Tenemos que: $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \; \textit{signo de } f(-1) \neq \textit{signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

s40 **Una ecuación polinómica de grado 3 es seguro que tiene alguna raíz real. Demuestra que es así, y di si ocurre lo mismo con las de grado 4.**

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio de grado 3, tenemos que:

  — Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

  — Si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

  Como f pasa de $+\infty$ a $-\infty$ o viceversa, podemos encontrar un número k tal que *signo de* $f(-k) \neq$ *signo de* $f(k)$.

  Además, $f(x)$ es continua. Por el teorema de Bolzano, sabemos que $f(x)$ tiene al menos una raíz c en el intervalo $(-k, k)$. Dicha raíz es la solución de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

- Si $f(x)$ es un polinomio de grado 4, no ocurre lo mismo.

  Por ejemplo, $x^4 + 1 = 0$ no tiene ninguna raíz real; puesto que $x^4 + 1 > 0$ para cualquier valor de x.

s41 **Si el término independiente de un polinomio en x es igual a –5 y el valor que toma el polinomio para $x = 3$ es 7, razona que hay algún punto en el intervalo (0, 3) en el que el polinomio toma el valor –2.**

Si $f(x)$ es un polinomio, entonces es una función continua. El término independiente es igual a –5; es decir, $f(0) = -5$; y, además, $f(3) = 7$. Por tanto, aplicando el teorema de los valores intermedios, como $-5 < -2 < 7$, podemos asegurar que existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = -2$.

s42 **La función $y = tg\ x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?**

La función $y = tg\, x$ no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$, que está en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Por tanto, no podemos aplicar el teorema de Bolzano para dicho intervalo.

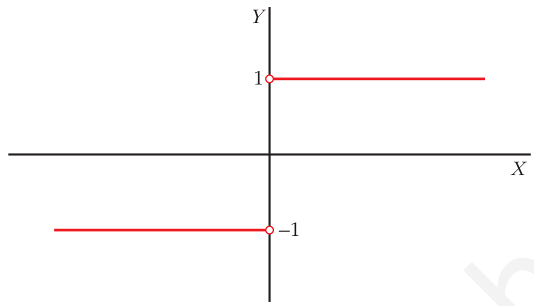
s43 **Considera la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Determina su dominio. Dibuja su gráfica y razona si se puede asignar un valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

Definimos f por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, no podemos asignar ningún valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ (pues en $x = 0$ no lo es). Tiene una discontinuidad de salto finito.

Gráfica:



s44 **Si existe el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$, y si $f(x)$ es positivo cuando $x < a$, ¿podemos asegurar que tal límite es positivo? ¿Y que no es negativo? Justifica razonadamente las respuestas.**

Si $f(x) > 0$ cuando $x < a$, entonces, si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, ha de ser $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$.

Por tanto, podemos asegurar que el límite no es negativo (podría ser positivo o cero).

s45 **a) Comprueba que $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln(x+1) - ln(x)] = 0$.**

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln(x+1) - ln(x)]$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln\,(x+1) - ln\,(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln \left(\dfrac{x+1}{x} \right) \right] = ln\,1 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln\,(x+1) - ln\,(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\,ln \left(\dfrac{x+1}{x} \right) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln \left(\dfrac{x+1}{x} \right)^x \right] =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x \right] = ln\,e = 1$

s46 **De dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se sabe que son continuas en el intervalo $[a, b]$, que $f(a) > g(a)$ y que $f(b) < g(b)$.**

¿Puede demostrarse que existe algún punto c de dicho intervalo en el que se corten las gráficas de las dos funciones?

Consideramos la función $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$, entonces $f(x) - g(x)$ es continua en $[a, b]$.
- Si $f(a) > g(a)$, entonces $f(a) - g(a) > 0$.

- Si $f(b) < g(b)$, entonces $f(b) - g(b) < 0$.

Es decir, *signo* $[f(a) - g(a)] \neq$ *signo* $[f(b) - g(b)]$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) = g(c)$. (Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $x = c$).

s47 Si $f(x)$ es continua en [1, 9], $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$, ¿podemos asegurar que la función $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en el intervalo [1, 9]?

- Si $f(x)$ es continua en [1, 9], entonces $g(x) = f(x) + 3$ también será continua en [1, 9] (pues es suma de dos funciones continuas).
- Si $f(1) = -5$, entonces $g(1) = f(1) + 3 = -5 + 3 = -2 < 0$.
- Si $f(9) > 0$, entonces $g(9) = f(9) + 3 > 0$.

Es decir, *signo de* $g(1) \neq$ *signo de* $g(9)$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (1, 9)$ tal que $g(c) = 0$; es decir, la función $g(x)$ tiene al menos un cero en el intervalo [1, 9].

48 Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ **e)** $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = +\infty$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

a) Dado $\varepsilon > 0$, existe h tal que, si $x < -h$, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

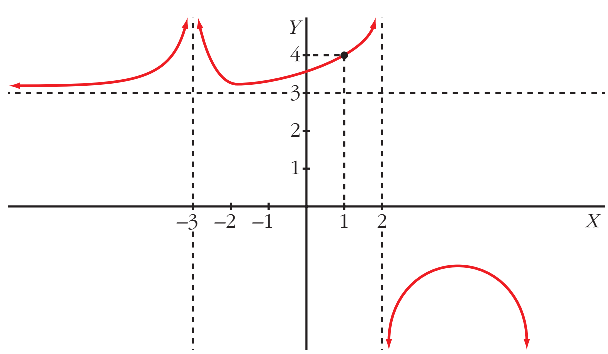
b) Dado k, podemos encontrar h tal que, si $x > h$, entonces $f(x) < -k$.

c) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 - \delta < x < 2$, entonces $f(x) > k$.

d) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 < x < 2 + \delta$, entonces $f(x) < -k$.

e) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $3 - \delta < x < 3 + \delta$, entonces $f(x) > k$.

f) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $1 - \delta < x < 1 + \delta$, entonces $|f(x) - 4| < \varepsilon$.



Página 253

PARA PROFUNDIZAR

49 **Estudia el comportamiento de cada una de estas funciones cuando x tiende a $+\infty$:**

a) $f(x) = x^3 - \text{sen}\, x$ **b)** $g(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{E[x]}{x}$ **d)** $j(x) = \dfrac{3x + \text{sen}\, x}{x}$

a) Como $-1 \le \text{sen}\, x \le 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - \text{sen}\, x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

b) Como $-1 \le \cos x \le 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pm 1}{x^2 + 1} = 0$

c) Como $x - 1 < E[x] < x$,

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E[x]}{x} < \frac{x}{x} \;\to\; \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} < \lim_{x \to +\infty} \frac{E[x]}{x} < \lim_{x \to +\infty} 1 \;\to$$

$$\to \lim_{x \to +\infty} \frac{E[x]}{x} = 1$$

d) Como $-1 \le \text{sen}\, x \le 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \text{sen}\, x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{\text{sen}\, x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{\pm 1}{x}\right) = 3 + 0 = 3$$

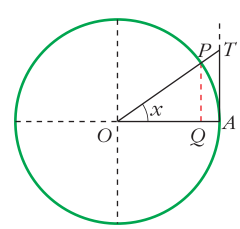
50 **En una circunferencia de radio 1, tomamos un ángulo $\widehat{AOP}$ de x radianes. Observa que:**

$\overline{PQ} = \text{sen}\, x$, $\overline{TA} = \text{tg}\, x$ **y arco** $\overset{\frown}{PA} = x$

Como $\overline{PQ} < \overset{\frown}{PA} < \overline{TA} \;\to\; \text{sen}\, x < x < \text{tg}\, x$

A partir de esa desigualdad, prueba que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$$



Tenemos que $\text{sen}\, x < x < \text{tg}\, x$. Dividiendo entre $\text{sen}\, x$, queda:

$$1 < \frac{x}{\text{sen}\, x} < \frac{1}{\cos x} \;\to\; 1 > \frac{\text{sen}\, x}{x} > \cos x$$

Tomando límites cuando $x \to 0$, queda:

$$1 \ge \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} \ge 1; \text{ es decir: } \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1.$$

51 **Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$, calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\text{sen } x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x} = 1 \left(\text{Si hacemos } 2x = z, \text{ tenemos } \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\text{sen } z}{z} = 1 \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\text{sen } x}{x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{\text{sen } x}{x} \right) = 1 - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1 - 1 = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x / \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen } x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \right) =$

$= 1 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen } x}{x} \right)^2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \cos x} =$

$= 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

52 **Supongamos que f es continua en [0, 1] y que $0 < f(x) < 1$ para todo x de [0, 1]. Prueba que existe un número c de (0, 1) tal que $f(c) = c$.**

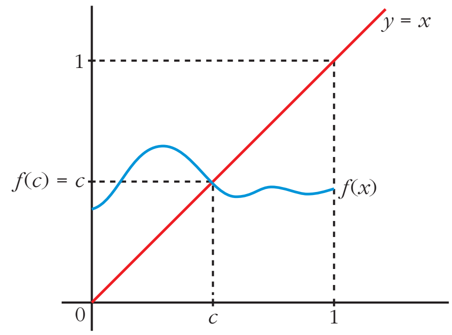
Haz una gráfica para que el resultado sea evidente.

☛ ***Aplica el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - x$.***

Consideramos la función $g(x) = f(x) - x$. Tenemos que:

- $g(x)$ es continua en [0, 1], pues es la diferencia de dos funciones continuas en [0, 1].
- $g(0) = f(0) > 0$, pues $f(x) > 0$ para todo x de [0, 1].
- $g(1) = f(1) - 1 < 0$, pues $f(x) < 1$ para todo x de [0, 1].

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) - c = 0$, o bien $f(c) = c$.



Página 253

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{\log(x^2 + 1)}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1} = -\infty$, porque el minuendo es de grado 2, y el sustraendo, de grado 3.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{\log(x^2 + 1)} = \dfrac{(0)}{(+\infty)} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)} \to$ Como es del tipo $(1)^{(+\infty)}$, podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \left((x-1) \cdot \frac{1}{1-x}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}\right) = (\infty) - (\infty)$

Resolvemos la indeterminación multiplicando y dividiendo por $2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}$:

$$\frac{\left(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}\right)\left(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}\right)}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1)}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2}{2 + \sqrt{4}} = \frac{4}{4} = 1$$

2. **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$**:**

a) Estudia su continuidad.

b) Halla $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$**.**

a) Si $x \neq 0$, f es continua, porque e^x y $1 - x$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(1) \to f \text{ es continua en } \mathbb{R}.$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3. **a) Estudia la continuidad de** $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x}$ **y justifica qué tipo de discontinuidad tiene.**

b) Halla sus límites cuando $x \to +\infty$ **y** $x \to -\infty$**.**

c) Representa la información obtenida en a) y b).

a) La función es discontinua en los puntos en los que no está definida. En este caso, en los puntos que anulan su denominador.

$$x^2 + 3x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Estudiamos el tipo de discontinuidad:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = \dfrac{(9)}{(0)} = \pm\infty \begin{cases} \text{Si } x \to 0^-, \ f(x) \to -\infty \\ \text{Si } x \to 0^+, \ f(x) \to +\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = \dfrac{(0)}{(0)} \to \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\cancel{(3 + x)}(3 - x)}{x\cancel{(x + 3)}} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3 - x}{x} = -2$

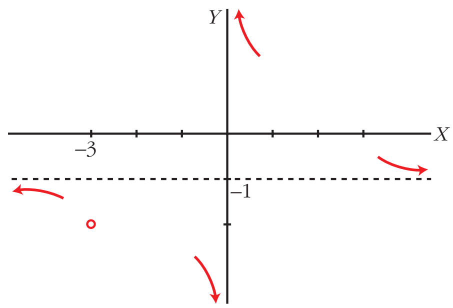
En $x = 0$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

En $x = -3$, tiene una discontinuidad evitable.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = -1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = -1$

c)



4. **Halla a para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \dfrac{1}{2}$.**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \frac{1}{2} \to \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \to 4 = \sqrt{a} \to a = 16$$

5. **Halla a y b para que esta función sea continua y represéntala:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{a}{x} + b & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} ax^2 + b = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x - a = -a \\ f(0) = -a \end{array}\right\} b = -a \qquad (1)$$

Para que sea f continua en $x = 1$, debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} x - a = 1 - a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{a}{x} + b = a + b \\ f(1) = a + b \end{array}\right\} 1 - a = a + b \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos: $1 - a = a - a \to \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Si $a = 1$ y $b = -1$, la función es continua en $x = 0$ y en $x = 1$.

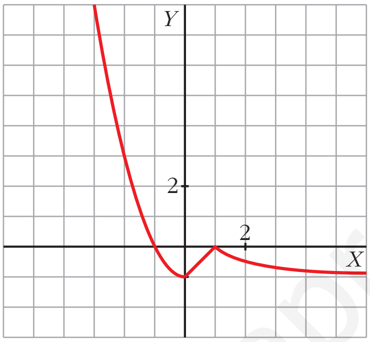
Para valores de $x < 0$ y $0 \le x < 1$, f está definida por medio de funciones polinómicas, que son continuas.

Para valores de $x \ge 1$, la función $\dfrac{a}{x} + b$ es también continua.

Por tanto, si $a = 1$ y $b = -1$, f es continua en todos sus puntos.

Representación:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x} - 1 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$



6. **Dada la función $f(x) = sen\, \dfrac{\pi}{4}x$, demuestra que existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = f(c + 1)$.**

Construimos la función $g(x) = f(x + 1) - f(x) = sen\, \dfrac{\pi(x+1)}{4} - sen\, \dfrac{\pi x}{4}$.

Demostrar que $f(c + 1) = f(c)$ para algún $c \in (0, 4)$, es lo mismo que demostrar que existe $c \in (0, 4)$ tal que $g(c) = 0$.

$$g(0) = sen\, \frac{\pi(0+1)}{4} - sen\, \frac{\pi \cdot 0}{4} = sen\, \frac{\pi}{4} - sen\, 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$g(4) = sen\, \frac{5\pi}{4} - sen\, \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

La función g es continua en $[0, 4]$ y *signo de* $g(0) \neq$ *signo de* $g(4)$.

Según el teorema de Bolzano, existirá un $c \in (0, 4)$ tal que $g(c) = 0$; es decir, existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c + 1) = f(c)$.

7. **Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$. Demuestra que existe algún número real c tal que $c + e^{-c} = 4$.**

$f(x) = x + e^{-x}$ es una función continua en $\mathbb{R}$. Calculamos algunos valores de f:

$f(0) = 0 + e^0 = 1$ $\qquad$ $f(5) = 5 + e^{-5} = 5,007$

Por el teorema de los valores intermedios, $f(x)$ toma todos los valores del intervalo $[1; 5,007]$.

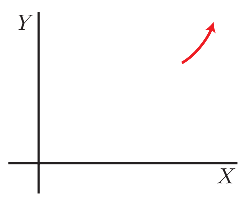
Por tanto, existirá un $0 < c < 5$ tal que $f(c) = 4$. Es decir, $c + e^{-c} = 4$

8. **Expresa simbólicamente cada una de estas frases y haz una representación gráfica de cada caso:**

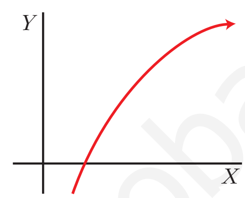
a) Podemos conseguir que $f(x)$ sea mayor que cualquier número K, por grande que sea, dando a x valores tan grandes como sea necesario.

b) Si pretendemos que los valores de $g(x)$ estén tan próximos a 1 como queramos, tendremos que dar a x valores suficientemente grandes.

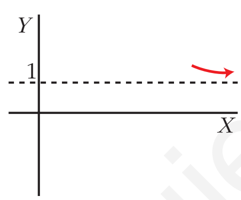
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



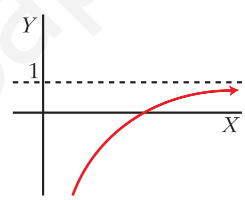
o bien



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$



o bien

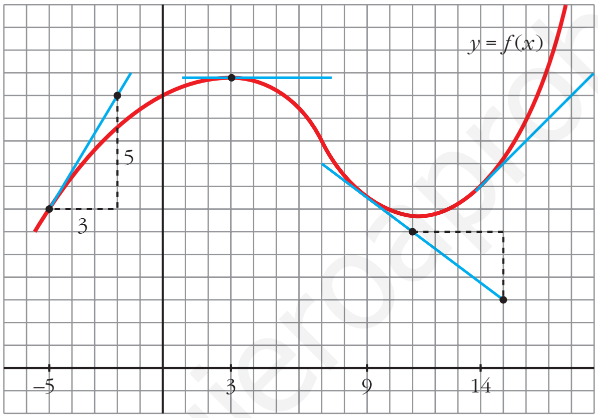


9 DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Página 255

REFLEXIONA Y RESUELVE

Tangentes a una curva



■ **Halla, mirando la gráfica y las rectas trazadas, $f'(3)$, $f'(9)$ y $f'(14)$.**

$f'(3) = 0$; $f'(9) = \frac{-3}{4}$; $f'(14) = 1$

■ **Di otros tres puntos en los que la derivada es positiva.**

La derivada también es positiva en $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$…

■ **Di otro punto en el que la derivada es cero.**

La derivada también es cero en $x = 11$.

■ **Di otros dos puntos en los que la derivada es negativa.**

La derivada también es negativa en $x = 4$, $x = 5$…

■ **Di un intervalo $[a, b]$ en el que se cumpla que "si $x \in [a, b]$, entonces $f'(x) > 0$".**

Por ejemplo, en el intervalo $[-5, 2]$ se cumple que, si $x \in [-5, 2]$, entonces $f'(x) > 0$.

Función derivada

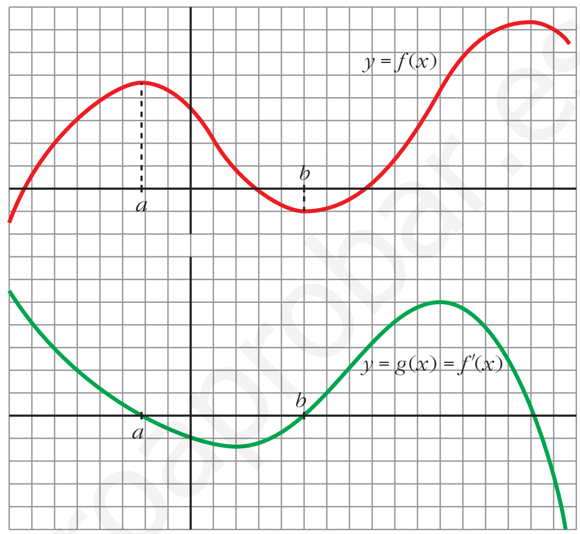
■ **Continúa escribiendo las razones por las cuales $g(x)$ es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de $f(x)$.**

- En el intervalo (a, b), $f(x)$ es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a $g(x)$ en (a, b).
- La derivada de f en b es 0: $f'(b) = 0$. Y también es $g(b) = 0$.
- En general:

  $g(x) = f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene tangente horizontal.

  $g(x) = f'(x) > 0$ donde $f(x)$ es creciente.

  $g(x) = f'(x) < 0$ donde $f(x)$ es decreciente.



■ **Las tres gráficas de abajo, A, B y C, son las funciones derivadas de las gráficas de arriba, 1, 2 y 3, pero en otro orden.**

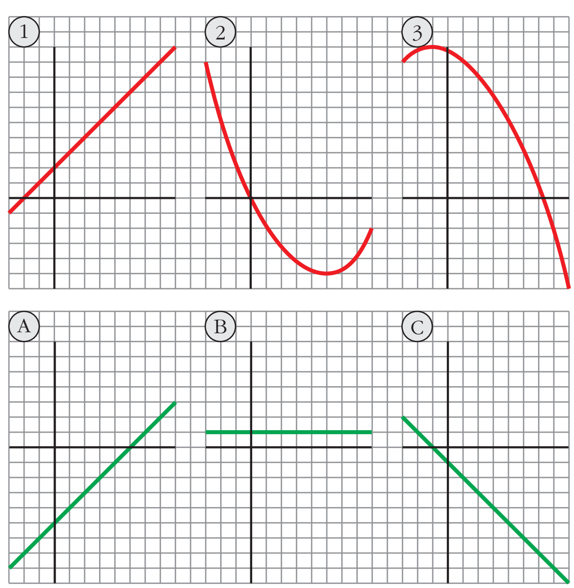
Explica razonadamente cuál es la de cada una.

1) B

2) A

3) C

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente, y es negativa donde la función decrece.



Página 261

1. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = ln\dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\,x}{1+tg\,x}}$

f) $f(x) = ln\sqrt{e^{tg\,x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log(sen\,x \cdot cos\,x)^2$

i) $f(x) = sen^2\,x + cos^2\,x + x$

j) $f(x) = sen\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}$

k) $f(x) = arc\ sen\sqrt{x}$

l) $f(x) = sen(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sen\,x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

b) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

De otra forma: Si tomamos logaritmos previamente:

$f(x) = ln\,(1-x) - ln\,(1+x)$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\,x)(1+tg\,x) - (1-tg\,x) \cdot (1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2} =$

$$= \frac{(1+tg^2\,x)[-1-tg\,x-1+tg\,x]}{(1+tg\,x)^2} = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

De otra forma: Si tenemos en cuenta el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot D[tg\,x] = \frac{-2}{(1+tg\,x)^2} \cdot (1+tg^2\,x) = \frac{-2(1+tg^2\,x)}{(1+tg\,x)^2}$$

e) Teniendo en cuenta lo obtenido en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - tg\, x}{1 + tg\, x}}} \cdot \frac{-2(1 + tg^2\, x)}{(1 + tg\, x)^2} = \frac{-(1 + tg^2\, x)}{\sqrt{(1 - tg\, x)(1 + tg\, x)^3}}$$

También podríamos haber llegado a este resultado utilizando lo obtenido en b).

f) $f(x) = ln\, \sqrt{e^{tg\, x}} = ln\, e^{(tg\, x)\,/\,2} = \dfrac{tg\, x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\, x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)\,/\,2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)\,/\,2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\, 3 = \dfrac{ln\, 3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\,(sen\, x \cdot cos\, x)^2 = 2[log\,(sen\, x + log\,(cos\, x)]$

$$f'(x) = 2\left[\frac{cos\, x}{sen\, x} \cdot \frac{1}{ln\, 10} + \frac{-sen\, x}{cos\, x} \cdot \frac{1}{ln\, 10}\right] = \frac{2}{ln\, 10} \cdot \frac{cos^2\, x - sen^2\, x}{sen\, x \cdot cos\, x} =$$

$$= \frac{4}{ln\, 10} \cdot \frac{cos^2\, x - sen^2\, x}{2 sen\, x \cdot cos\, x} = \frac{4}{ln\, 10} \cdot \frac{cos\, 2x}{sen\, 2x} = \frac{4}{ln\, 10 \cdot tg\, 2x}$$

De otra forma:

$$f(x) = log\,(sen\, x \cdot cos\, x)^2 = 2\, log\left(\frac{sen\, 2x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{ln\, 10} \cdot \frac{cos\, 2x}{\dfrac{sen\, 2x}{2}} = \frac{4}{ln\, 10 \cdot tg\, 2x}$$

i) $f(x) = sen^2\, x + cos^2\, x + x = 1 + x$

$f'(x) = 1$

j) $$f'(x) = \frac{cos\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{sen\sqrt{x+1} \cdot (-sen\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{cos\sqrt{x+1} \cdot cos\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{sen\sqrt{x+1} \cdot sen\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

k) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

l) $f'(x) = cos\left(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}\right) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sen\, x + x^2 + 1}} \cdot (cos\, x + 2x) = \dfrac{cos\, x + 2x}{2\sqrt{sen\, x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = 2cos\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-sen\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \dfrac{1 + 2(3-x)\cdot(-1)}{\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} =$

$= \dfrac{-2\ cos\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\ sen\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x-5)}{3\sqrt[3]{x + (3-x)^2)^2}} =$

$= \dfrac{(5-2x)\cdot sen\left(2\sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}}$

2. **Halla las derivadas 1.ª, 2.ª y 3.ª de las siguientes funciones:**

a) $y = x^5$ **b)** $y = x\ cos\ x$ **c)** $y = sen^2\ x + cos^2\ x + x$

a) $y = x^5$

$y' = 5x^4;\ \ y'' = 20x^3;\ \ y''' = 60x^2$

b) $y = x\ cos\ x$

$y' = cos\ x - x\ sen\ x$

$y'' = -sen\ x - sen\ x - x\ cos\ x = -2sen\ x - x\ cos\ x$

$y''' = -2cos\ x - cos\ x + x\ sen\ x = -3cos\ x + x\ sen\ x$

c) $y = sen^2\ x + cos^2\ x + x = 1 + x$

$y' = 1;\ \ y'' = 0;\ \ y''' = 0$

3. **Calcula $f'(1)$ siendo:** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \dfrac{x^{1/2}\cdot 3^{1/3}\cdot x^{1/3}\cdot e^4}{2\cdot 3^{1/5}\cdot x^{2/5}} = \dfrac{3^{2/15}\cdot e^4}{2}\cdot x^{13/30} = \dfrac{\sqrt[15]{9}\cdot e^4}{2}\cdot x^{13/30}$

$f'(x) = \dfrac{\sqrt[15]{9}\cdot e^4}{3}\cdot\dfrac{13}{30}\ x^{-17/30} = \dfrac{13\sqrt[15]{9}\cdot e^4}{60\ \sqrt[30]{x^{17}}}$

Por tanto: $f'(1) = \dfrac{13\sqrt[15]{9}\cdot e^4}{60}$

4. **Calcula $f'(\pi/6)$ siendo:**

$$f(x) = (cos^2\ 3x - sen^2\ 3x)\cdot sen\ 6x$$

$f(x) = (cos^2\ 3x - sen^2\ 3x)\cdot sen\ 6x = cos\ 6x \cdot sen\ 6x = \dfrac{sen\ 12x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{12cos\ 12x}{2} = 6cos\ 12x$

Por tanto: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6\cdot cos\ \dfrac{12\pi}{6} = 6\cdot cos(2\pi) = 6\cdot 1 = 6$

5. **Calcula $f'(0)$ siendo:**

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4x^2+4x+1}{3}} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3+4x^2+4x+1} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{2}{4x^2+4x+4} = \frac{2x+1}{2x^2+2x+2} - \frac{1}{2x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{2x}{2x^2+2x+2} = \frac{x}{x^2+x+1}$$

Por tanto: $f'(0) = 0$

Página 262

1. **Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$$

- Continuidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0 \\ \text{Por tanto, } f(x) \text{ es continua en } x_0 = 3. \end{array}$$

- Derivabilidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (3) = 3 = f'(3^+) \end{array}\right\} \text{Las derivadas laterales existen y coinciden.}$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x_0 = 3$. Además, $f'(3) = 3$.

2. **Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

- Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$ Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$ Para que sea derivable en $x = 0$, ha de ser: $-m = 0 \quad \to \quad m = 0$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

Página 263

1. **Sabemos que la derivada de la función $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$.**

Teniendo en cuenta este resultado, halla la derivada de su función inversa: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Página 264

1. **Comprueba que $sen\,(x^2 y) - y^2 + x = 2 - \frac{\pi^2}{16}$ pasa por el punto $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ y halla la ecuación de la recta tangente en ese punto.**

Sustituimos $x = 2$, $y = \frac{\pi}{4}$ en la expresión:

$$sen\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{16} + 2 = 0 + 2 - \frac{\pi^2}{16} = 2 - \frac{\pi^2}{16}$$

Se cumple la igualdad. Luego la curva dada pasa por el punto $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$.

Necesitamos obtener el valor de $f'\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$. Hallamos previamente $f'(x, y)$:

Derivamos $sen\ (x^2y) - y^2 + x = 2 - \frac{\pi^2}{16}$:

$$cos\ (x^2y) \cdot (2xy + x^2 \cdot y') - 2y \cdot y' + 1 = 0$$

$$2xy\ cos\ (x^2y) + y' \cdot x^2 \cdot cos\ (x^2y) - 2yy' + 1 = 0$$

$$y'\left(x^2 \cdot cos\ (x^2y) - 2y\right) = -1 - 2xy\ cos\ (x^2y)$$

$$f'(x, y) = \frac{-1 - 2xy\ cos\ (x^2y)}{x^2 \cdot cos\ (x^2y) - 2y}$$

Por tanto:

$$f'\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 - \pi \cdot cos\ \pi}{4\ cos\ \pi - \pi/2} = \frac{-1 + \pi}{-4 - \pi/2} = \frac{-2 + 2\pi}{-8 - \pi} = \frac{2 - 2\pi}{8 + \pi}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = \frac{\pi}{4} + \frac{2 - 2\pi}{8 + \pi}(x - 2)$

2. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (sen\ x)^x$ **b) $g(x) = x^{sen\ x}$**

a) $f(x) = (sen\ x)^x \rightarrow ln\ f(x) = x\ ln\ (sen\ x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln\ (sen\ x) + x \cdot \frac{cos\ x}{sen\ x} \rightarrow f'(x) = (sen\ x)^x \left[ln\ (sen\ x) + \frac{x\ cos\ x}{sen\ x}\right]$$

b) $g(x) = x^{sen\ x} \rightarrow ln\ g(x) = sen\ x \cdot ln\ x$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = cos\ x \cdot ln\ x + sen\ x \cdot \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^{sen\ x} \cdot \left[cos\ x \cdot ln\ x + \frac{sen\ x}{x}\right]$$

Página 270

1. Calcula Δy, dy, $\Delta y - dy$:

a) $y = x^2 - x$ para $x_0 = 3$, $dx_0 = 0{,}01$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ para $x_0 = 2$, $dx_0 = 0{,}1$

c) $y = \sqrt[3]{x}$ para $x_0 = 125$, $dx_0 = 1$

a) $\Delta y = y(3{,}01) - y(3) = 6{,}0501 - 6 = 0{,}0501$

$dy = y' \cdot dx = (2x - 1) \cdot dx$, que evaluado en $x_0 = 3$ y $dx_0 = 0{,}01$ es:

$5 \cdot 0{,}01 = 0{,}05$

$\Delta y - dy = 0{,}0001$

b) $\Delta y = y(2{,}1) - y(2) = 1{,}8466 - 1{,}7321 = 0{,}1145$

$dy = y' \cdot dx = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot dx$, que evaluado en $x_0 = 2$ y $dx_0 = 0{,}1$ es:

$\dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0{,}1 = 0{,}1155$

$\Delta y - dy = -0{,}001$

c) $\Delta y = y(126) - y(125) = 5{,}01330 - 5 = 0{,}01330$

$dy = y' \cdot dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx$, que evaluado en $x_0 = 125$ y $dx_0 = 1$ es:

$\dfrac{1}{75} \cdot 1 = 0{,}01333$

$\Delta y - dy = -0{,}00003$

2. A una bola de bronce de 7 cm de radio se le da un baño de plata de 0,2 mm de grosor.

Calcula la cantidad de plata empleada (aproximadamente, a partir de la diferencial).

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$dV = 4\pi r^2 \cdot \text{h} = 4\pi \cdot 7^2 \cdot 0{,}02 = 12{,}3088$

Se emplean, aproximadamente, 12,3 cm³ de plata.

3. Calcula una aproximación de $\sqrt[3]{126}$ dando los siguientes pasos:

- **Llama $f(x) = \sqrt[3]{x}$.**
- **Obtén df para $x_0 = 125$ y $dx_0 = 1$.**
- **Obtén $f(126) \approx f(125) + df(125)$ para $dx_0 = 1$.**

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$df = f'(x) \cdot dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx$

Evaluando en $x_0 = 125$ y $dx_0 = 1$:

$df(125) = \dfrac{1}{75} = 0{,}0133$

Así:

$f(126) \approx f(125) + df(125) = 5 + 0{,}0133 = 5{,}0133$

4. **Procediendo como en el ejercicio anterior, halla, aproximadamente:**

a) $1,01^4$

b) $\sqrt{15,8}$

c) $\sqrt[3]{66}$

a) $f(x) = x^4$; $x_0 = 1$; $dx_0 = 0,01$

$df = f'(x) \cdot dx = 4x^3 \cdot dx = 4 \cdot 1^3 \cdot 0,01 = 0,04$

$f(1,01) \approx f(1) + df(1) = 1 + 0,04 = 1,04$

b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 16$; $dx_0 = -0,2$

$$df = f'(x) \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot (-0,2) = -0,025$$

$f(15,8) \approx f(16) + df(16) = \sqrt{16} - 0,025 = 3,975$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $x_0 = 64$; $dx_0 = 2$

$$df = f'(x) \cdot dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} \cdot 2 = 0,0417$$

$f(66) \approx f(64) + df(64) = 4 + 0,0417 = 4,0417$

Página 275

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Reglas de derivación

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1 **a)** $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$ **b)** $y = \sqrt[3]{3x^2}$

a) $y' = \dfrac{2x(x^2 + 3) - (x^2 - 3)\,2x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{2x^3 + 6x - 2x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

b) $y' = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9x}}$

2 **a)** $y = \left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^{2/3}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2}$

a) $y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1 \cdot (1 + x) - (1 - x)}{(1 + x)^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1 - x - 1 + x}{(1 + x)^2} =$

$= \dfrac{2}{3}\,\dfrac{-2}{(1 - x)^{1/3} \cdot (1 + x)^{5/3}} = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(1 - x)(1 + x)^5}}$

b) $y' = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{2} \cdot 2x = -\dfrac{2}{x^2} + x$

3 **a)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **b)** $y = 7e^{-x}$

a) $y' = \dfrac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

b) $y = -7e^{-x}$

4 **a)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ **b)** $y = \operatorname{sen} x \cos x$

a) $y' = \dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

b) $y' = \cos x \cdot \cos x + (-\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$

5 **a)** $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{sen\ x}}$ **b)** $\boldsymbol{y = ln(x^2 + 1)}$

a) $y' = \dfrac{-cos\ x}{sen^2\ x}$ b) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

6 **a)** $\boldsymbol{y = arc\ tg \dfrac{x}{3}}$ **b)** $\boldsymbol{y = cos^2 (2x - \pi)}$

a) $y' = \dfrac{1}{1 + (x/3)^2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/3}{1 + x^2/9} = \dfrac{3}{9 + x^2}$

b) $y' = 2cos\ (2x - \pi) \cdot \big(-sen\ (2x - \pi)\big) \cdot 2 = -4cos\ (2x - \pi) \cdot sen\ (2x - \pi) =$

$= -2cos\ (4x - 4\pi)$

7 **a)** $\boldsymbol{y = sen^2\ x}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt{tg\ x}}$

a) $y' = 2sen\ x \cdot cos\ x = sen\ 2x$ b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{tg\ x}} \cdot (1 + tg^2\ x) = \dfrac{1 + tg^2\ x}{2\sqrt{tg\ x}}$

8 **a)** $\boldsymbol{y = sen\ x^2}$ **b)** $\boldsymbol{y = arc\ tg\ (x^2 + 1)}$

a) $y' = cos\ x^2 \cdot 2x = 2x\ cos\ x^2$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (x^2 + 1)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

9 **a)** $\boldsymbol{y = (2\sqrt{x} - 3)^7}$ **b)** $\boldsymbol{y = log_2 \sqrt{x}}$

a) $y' = 7(2\sqrt{x} - 3)^6 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - 3)^6$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{ln\ 2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x\ ln\ 2}$

10 **a)** $\boldsymbol{y = sen^2\ x^2}$ **b)** $\boldsymbol{y = arc\ tg \dfrac{1}{x}}$

a) $y' = 2\,sen\ x^2 \cdot cos\ x^2 \cdot 2x = 4x\ sen\ x^2\ cos\ x^2 = 2x\ sen\ (2x^2)$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$

11 **a)** $\boldsymbol{y = cos^5\ (7x^2)}$ **b)** $\boldsymbol{y = 3^x + 1}$

a) $y' = 5cos^4\ (7x^2) \cdot \big(-sen\ (7x^2)\big) \cdot 14x = -70x\ cos^4\ (7x^2)\ sen\ (7x^2)$

b) $y' = 3^x\ ln\,3$

12 **a)** $y = \sqrt[3]{(5x-3)^2}$ **b)** $y = arc\ sen\ \dfrac{x^2}{3}$

a) $y' = \dfrac{2}{3}(5x-3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x-3}}$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{3}\right)^2}} \cdot \dfrac{2x}{3} = \dfrac{2x/3}{\dfrac{\sqrt{9-x^4}}{3}} = \dfrac{2x}{\sqrt{9-x^4}}$

13 **a)** $y = ln(2x-1)$ **b)** $y = tg\ \dfrac{x^2}{2}$

a) $y' = \dfrac{2}{2x-1}$

b) $y' = \left(1 + tg^2\ \dfrac{x^2}{2}\right) \cdot \dfrac{2x}{2} = x + x\ tg^2\ \dfrac{x^2}{2}$

14 **a)** $y = ln(x^2-1)$ **b)** $y = arc\ cos\ \sqrt{2x}$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$

b) $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}} \cdot \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{1-2x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2x-4x^2}}$

15 **a)** $y = ln\sqrt{1-x}$ **b)** $y = (arc\ tg\ x)^2$

a) $y = ln\ \sqrt{1-x} = ln\ (1-x)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ ln\ (1-x)$

$y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-1}{(1-x)} = \dfrac{-1}{2-2x}$

b) $y' = 2(arc\ tg\ x) \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2\ arc\ tg\ x}{1+x^2}$

16 **a)** $y = log_3(7x+2)$ **b)** $y = ln\ tg\ \dfrac{3}{x}$

a) $y' = \dfrac{1}{ln\ 3} \cdot \dfrac{7}{(7x+2)} = \dfrac{7}{(7x+2)\ ln\ 3}$

b) $y' = \dfrac{1}{tg\ 3/x} \cdot \left(1 + tg^2\ \dfrac{3}{x}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{x^2}\right) = -\dfrac{3\ (1 + tg^2\ 3/x)}{x^2\ tg\ 3/x}$

17 **a)** $y = e^{4x}$ **b)** $y = ln\left(ln\ \dfrac{1}{x}\right)$

a) $y' = 4e^{4x}$

b) $y' = \dfrac{1}{ln\ 1/x} \cdot \dfrac{1}{1/x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x\,ln\,(1/x)}$

18 **a)** $\boldsymbol{y = 2^x}$ **b)** $\boldsymbol{y = arc\ sen\ \dfrac{x+1}{x-1}}$

a) $y' = 2^x \cdot ln\ 2$

b) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{(x-1)^2-(x+1)^2}}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} =$$

$$= -\frac{2/(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-(x+1)^2}} = \frac{2}{(x-1)\sqrt{x^2+1-2x-x^2-1-2x}} =$$

$$= -\frac{2}{(x-1)\sqrt{-4x}}$$

19 **a)** $\boldsymbol{y = 5\ tg^3(3x^2+1)}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt{x+\sqrt{x}}}$

a) $y' = 15\ tg^2\ (3x^2+1) \cdot [1 + tg^2\ (3x^2+1)] \cdot 6x = 90x\ [tg^2\ (3x^2+1) + tg^4\ (3x^2+1)]$

b) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$$

20 **a)** $\boldsymbol{y = \sqrt{tg\ x^2}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}}$

a) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{tg\ x^2}}(1+tg^2\ x^2) \cdot 2x = \frac{x(1+tg^2\ x^2)}{\sqrt{tg\ x^2}}$$

b) $$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-2/3} \cdot \frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2}} \cdot \frac{4}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{4}{3\cdot(x+2)^2 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{(x+2)^{2/3}}} = \frac{4}{3(x+2)^{4/3}\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{(x+2)^4\ (x-2)^2}} =$$

$$= \frac{4}{3(x+2)\sqrt[3]{(x+2)(x-2)^2}}$$

Otras técnicas de derivación

21 **Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:**

a) $\boldsymbol{y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$ **b)** $\boldsymbol{y = ln(x\ tg\ x)^2}$

c) $\boldsymbol{y = ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right)}$ **d)** $\boldsymbol{y = ln(2^x\ sen^2\ x)}$

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}\,[ln\,(1-x) - ln\,(1+x)]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-1+x}{1-x^2}\right] = \frac{-1}{1-x^2}$$

b) $y = ln\,(x\,tg\,x)^2 = 2[ln\,x + ln\,(tg\,x)]$

$$y' = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1+tg^2\,x}{tg\,x}\right] = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{tg\,x} + tg\,x\right] = \frac{2}{x} + 2\,cotg\,x + 2\,tg\,x$$

c) $y = ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right) = ln\,\sqrt[3]{x^2-1} - ln\,x^2 = \dfrac{1}{3}\,ln\,(x^2-1) - 2ln\,x$

$$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{(x^2-1)} - 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2x}{3(x^2-1)} - \frac{2}{x}$$

d) $y = ln(2^x\,sen^2\,x) = ln\,2^x + ln\,sen^2\,x = x\,ln\,2 + 2\,ln\,sen\,x$

$$y' = ln\,2 + 2\cdot\frac{cos\,x}{sen\,x} = ln\,2 + \frac{2}{tg\,x}$$

22 **Calcula la derivada de estas funciones implícitas:**

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9$

c) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{8} - \dfrac{(y+3)^2}{14} = 1$

e) $x^3 + y^3 = -2xy$

f) $xy^2 = x^2 + y$

a) $2x + 2y\cdot y' = 0$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

b) $2x + 2yy' - 4 - 6y' = 0$

$$y'(2y-6) = 4 - 2x$$

$$y' = \frac{4-2x}{2y-6} = \frac{2-x}{y-3}$$

c) $\dfrac{2x}{16} + \dfrac{2yy'}{9} = 0$

$$\frac{x}{8} + \frac{2yy'}{9} = 0$$

$$\frac{2yy'}{9} = -\frac{x}{8} \;\rightarrow\; 2yy' = \frac{-9x}{8} \;\rightarrow\; y' = \frac{-9x}{16y}$$

d) $\dfrac{2(x-1)}{8} - \dfrac{2(y+3)y'}{14} = 0$

$\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{(y+3)y'}{7} = 0$

$y' = \dfrac{7(x-1)}{4(y+3)}$

e) $3x^2 + 3y^2y' + 2y + 2xy' = 0$

$y'(3y^2 + 2x) = -3x^2 - 2y$

$y' = \dfrac{-3x^2 - 2y}{3y^2 + 2x}$

f) $xy^2 = x^2 + y$

$y^2 + x \cdot 2yy' = 2x + y'$

$2xyy' - y' = 2x - y^2$

$y'(2xy - 1) = 2x - y^2$

$y' = \dfrac{2x - y^2}{2xy - 1}$

23 **Aplica la derivación logarítmica para derivar:**

a) $y = x^{3x}$

b) $y = x^{x+1}$

c) $y = x^{e^x}$

d) $y = (\ln x)^{x+1}$

e) $y = \left(\dfrac{\text{sen } x}{x}\right)^x$

f) $y = x^{tg\,x}$

a) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $\ln x^n = n \ln x$:

$y = x^{3x} \;\rightarrow\; \ln y = 3x \ln x$

Derivamos como función implícita:

$\dfrac{y'}{y} = 3 \ln x + 3x \cdot \dfrac{1}{x} = 3 \ln x + 3$

Despejamos y':

$y' = x^{3x}(3\ln x + 3)$

b) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $\ln x^n = n \ln x$:

$y = x^{x+1} \;\rightarrow\; \ln y = (x+1) \ln x$

Derivamos como función implícita:

$\dfrac{y'}{y} = \ln x + (x+1) \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1 + \dfrac{1}{x}$

Despejamos y':

$$y' = x^{x+1}\left(ln\, x + 1 + \frac{1}{x}\right)$$

c) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $ln\, x^n = n\, ln\, x$:

$$y = x^{e^x} \quad \rightarrow \quad ln\, y = e^x \cdot ln\, x$$

Derivamos como función implícita:

$$\frac{y'}{y} = e^x \cdot ln\, x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x\left(ln\, x + \frac{1}{x}\right)$$

Despejamos y':

$$y' = x^{e^x} \cdot e^x\left(ln\, x + \frac{1}{x}\right)$$

d) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $ln\, x^n = n\, ln\, x$:

$$y = (ln\, x)^{x+1} \quad \rightarrow \quad ln\, y = (x+1) \cdot ln\,(ln\, x)$$

Derivamos como función implícita:

$$\frac{y'}{y} = ln\,(ln\, x) + (x+1) \cdot \frac{1}{ln\, x} \cdot \frac{1}{x} = ln\,(ln\, x) + \frac{x+1}{x\, ln\, x}$$

Despejamos y':

$$y' = (ln\, x)^{x+1} \cdot \left[ln\,(ln\, x) + \frac{x+1}{x\, ln\, x}\right]$$

e) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $ln\, x^n = n\, ln\, x$ y que el logaritmo de un cociente es

$$ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\, a - ln\, b:$$

$$y = \left(\frac{sen\, x}{x}\right)^x \quad \rightarrow \quad ln\, y = x\, ln\left(\frac{sen\, x}{x}\right) = x\,\big(ln\,(sen\, x) - ln\, x\big)$$

Derivamos como función implícita:

$$\frac{y'}{y} = ln\,(sen\, x) - ln\, x + x\left(\frac{cos\, x}{sen\, x} - \frac{1}{x}\right) = ln\left(\frac{sen\, x}{x}\right) + \frac{x\, cos\, x}{sen\, x} - 1$$

Despejamos y':

$$y' = \left(\frac{sen\, x}{x}\right)^x \cdot \left[ln\left(\frac{sen\, x}{x}\right) + \frac{x\, cos\, x}{sen\, x} - 1\right]$$

f) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $ln\, x^n = n\, ln\, x$:

$$y = x^{tg\, x} \quad \rightarrow \quad ln\, y = tg\, x \cdot ln\, x$$

Derivamos como función implícita:

$$\frac{y'}{y} = (1 + tg^2\, x) \cdot ln\, x + (tg\, x) \cdot \frac{1}{x}$$

Despejamos y':

$$y' = x^{tg\, x} \cdot \left[(1 + tg^2\, x)\, ln\, x + \frac{tg\, x}{x}\right]$$

24 **Obtén la derivada de las siguientes funciones de dos maneras y comprueba, operando, que llegas al mismo resultado:**

I) Utilizando las reglas de derivación que conoces.

II)Aplicando la derivación logarítmica.

a) $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^3$

b) $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

c) $y = sen^3\, x\, cos^2\, x$

d) $y = \sqrt{x^2 + 1}\ \sqrt[3]{x^2}$

a) I) $y' = 3\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{3 \cdot (x^2 + 1)^2 (x^2 - 1)}{x^4}$

II) $ln\, y = 3\big(ln\, (x^2 + 1) - ln\, x\big)$

$$\frac{y'}{y} = 3\left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{2x^2 - x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}\right) = \frac{3(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)}$$

$$y' = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^3 \cdot \frac{3(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)} = \frac{3 \cdot (x^2 + 1)^2 (x^2 - 1)}{x^4}$$

b) I) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}} \cdot \frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x^2)} = \frac{1}{\sqrt{(1 + x)(1 - x)^3}}$

II) $ln\, y = \frac{1}{2}\,[ln\, (1 + x) - ln\, (1 - x)]$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + x} - \frac{-1}{1 - x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1 - x + 1 + x}{(1 + x)(1 - x)}\right] = \frac{1}{(1 + x)(1 - x)}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \cdot \frac{1}{(1 + x)(1 - x)} = \frac{1}{\sqrt{(1 + x)(1 - x)^3}}$$

c) I) $y' = 3sen^2\, x\, cos\, x \cdot cos^2\, x + sen^3\, x \cdot 2cos\, x\, (-sen\, x) =$

$= 3sen^2\, x\, cos^3\, x - 2cos\, x\, sen^4\, x$

II) $ln\, y = 3ln\, (sen\, x) + 2ln\, (cos\, x)$

$$\frac{y'}{y} = 3\,\frac{cos\, x}{sen\, x} + 2 \cdot \frac{-sen\, x}{cos\, x} = \frac{3cos^2\, x - 2sen^2\, x}{sen\, x\, cos\, x}$$

$$y' = sen^3\, x\, cos^2\, x \cdot \frac{3cos^2\, x - 2sen^2\, x}{sen\, x\, cos\, x} = sen^2\, x\, cos\, x\, (3cos^2\, x - 2sen^2\, x) =$$

$$= 3\, sen^2\, x\, cos^3\, x - 2cos\, x\, sen^4\, x$$

d) I) $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+1} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt[3]{x}} =$

$$= \frac{3x^2 + 2(x^2+1)}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

II) $ln\, y = \dfrac{1}{2}\, ln\, (x^2+1) + \dfrac{2}{3}\, ln\, x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{3x} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)}$$

$$y' = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

25 **Calcula el valor de la derivada de cada una de las siguientes funciones en $x = 0$:**

a) $g(x) = e^{sen\, f(x)}$ **si** $f(0) = 0$ **y** $f'(0) = 1$

b) $h(x) = [sen\, f(x)]^3$ **si** $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ **y** $f'(0) = 1$

c) $j(x) = \sqrt{ln\, f(x)}$ **si** $f(0) = e$ **y** $f'(0) = 1$

a) Aplicamos la regla de la cadena:

$g'(x) = D[sen\, f(x)] \cdot e^{sen\, f(x)} = f'(x)\, cos\, f(x)\, e^{sen\, f(x)}$

$g'(0) = f'(0)\, cos\, f(0)\, e^{sen\, f(0)} = 1 \cdot cos\, 0 \cdot e^{sen\, 0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

b) Aplicamos la regla de la cadena:

$h'(x) = 3\,[sen\, f(x)]^2\, D[sen\, f(x)] = 3\,[sen\, f(x)]^2\, f'(x)\, cos\, f(x)$

$h'(0) = 3[sen\, f(0)]^2\, f'(0)\, cos\, f(0) =$

$$= 3\left[sen\, \frac{\pi}{4}\right]^2 \cdot 1 \cdot cos\, \frac{\pi}{4} = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

c) Aplicamos la regla de la cadena:

$$j'(x) = \frac{D[\ln f(x)]}{2\sqrt{\ln f(x)}} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln f(x)}}$$

$$j'(0) = \frac{f'(0)}{2f(0)\sqrt{\ln f(0)}} = \frac{1}{2e\sqrt{\ln e}} = \frac{1}{2e\sqrt{1}} = \frac{1}{2e}$$

26 **Dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 1$, halla:**

a) $(f \circ g)'(x)$ **b) $(g \circ f)'(x)$**

a) $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)]\, g'(x)$

Como $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 1 \;\to\; f'(x) = 2x;\;\; g'(x) = 3$

$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot (3x + 1) \cdot 3 = 6(3x + 1) = 18x + 6$

También podemos hacer:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x + 1) = (3x + 1)^2$

$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot 3(3x + 1) = 18x + 6$

b) $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)]\, f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$

O bien:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 3x^2 + 1 \;\to\; (g \circ f)'(x) = 6x$

Página 276

Derivabilidad y continuidad

27 **a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(1)$:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple $f'(x) = 5$?

a) **Si $x \neq 1$,** la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

Continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2 \\ &\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + x) = 2 \\ &f(1) = 2 \end{aligned}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x+1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen y coinciden.

Luego, $f(x)$ es derivable en $x = 1$. Además, $f'(1) = 3$.

Así $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 3$

$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

c) Si $f'(x) = 5$, entonces $x \geq 1$. Es decir:

$f'(x) = 2x + 1 = 5 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{4}{2} = 2 > 1$

$f'(2) = 5$

28 **Comprueba que $f(x)$ es continua pero no derivable en $x = 2$:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}}$$

- Si $x \neq 2$, la función es continua y derivable.
- Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x-6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\}$$ f es continua en $x = 2$.

- Derivabilidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden.

$f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

29 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) **Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$,** la función es continua y derivable.

Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$

Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden. La función no es continua en $x = 3$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Las derivadas laterales existen, pero no coinciden.

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = 3$:

Como $f(x)$ no es continua en $x = 3$, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

b) **Si $x \neq -1$ y $x \neq 2$,** $f(x)$ es continua y derivable.

Continuidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = -1.$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 12 \end{array}\right\}$$ Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden.

$f(x)$ no es continua en $x = 2$.

Derivabilidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} 2 = 2 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen, pero no coinciden.

$f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

Derivabilidad en $x = 2$:

$f(x)$ no es continua en $x = 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

s30 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) **Continuidad:**

- **Si $x \ne 0$ y $x \ne 1$** $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\}$$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** $\rightarrow$ La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

  $f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

- **En $x = 1$:**

  $f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

  La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) **Continuidad:**

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos funciones continuas.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$ Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

  La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

  $f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

  Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = -1$. La función es derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Definición de derivada

31 **Utiliza la definición de derivada para hallar $f'(2)$ en los siguientes casos:**

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \rightarrow f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$\left.\begin{array}{l} f(2+h) = \dfrac{2+h-1}{2+h+1} = \dfrac{h+1}{h+3} \\ f(2) = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$$

$$f(2+h) - f(2) = \frac{h+1}{h+3} - \frac{1}{3} = \frac{3h + \cancel{3} - h - \cancel{3}}{3(h+3)} = \frac{2h}{3(h+3)}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{2h}{3(h+3)} : h = \frac{2}{3(h+3)}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{3(h+3)} = \frac{2}{9}$$

b) $f(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = \sqrt{4} = 2 \\ f(2+h) = \sqrt{2+h+2} = \sqrt{h+4} \end{array}\right\} f(2+h) - f(2) = \sqrt{h+4} - 2$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\sqrt{h+4}-2}{h}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+4}-2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{h+4})^2 - 2^2}{(\sqrt{h+4}+2)\,h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h + \cancel{4} - \cancel{4}}{h\,(\sqrt{h+4}+2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+4}+2} = \frac{1}{4}$$

32 **Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ en cada caso:**

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f(x + h) = x + h + \frac{1}{x + h} \;\to\; f(x + h) - f(x) =$$

$$= \cancel{x} + h + \frac{1}{x + h} - \cancel{x} - \frac{1}{x} = h + \frac{x - x - h}{x(x + h)}$$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 1 + \frac{-1}{x(x + h)} \;\to\; f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[1 - \frac{1}{x(x + h)}\right] = 1 - \frac{1}{x^2}$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \;\to\; f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$$f(x + h) = \sqrt{(x + h)^2 + 1} \;\to\; f(x + h) - f(x) = \sqrt{(x + h)^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x + h)^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{(x + h)^2 + 1}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^2}{h\left(\sqrt{(x + h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{1}}{h\left(\sqrt{(x + h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}\left(\sqrt{(x + h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}\right)} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

PARA RESOLVER

33 **Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $y = |x - 2|$

b) $y = |x^2 + 6x + 8|$

c) $y = x + |x - 3|$

d) $y = x^2 + |x|$

☛ ***Mira el ejercicio resuelto 3.***

a) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} f'(2^-) \neq f'(2^+) \;\to\; \text{No existe } f'(2)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos en los que $y = 0$:

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Derivamos:

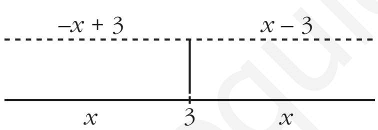
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4^-) = 2(-4) + 6 = -2 \\ f'(-4^+) = -2(-4) - 6 = 2 \end{array}\right\} f'(-4^-) \ne f'(-4^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -2(-2) - 6 = -2 \\ f'(-2^+) = 2(-2) + 6 = 2 \end{array}\right\} f'(-2^-) \ne f'(-2^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(-2)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$.

c) Analizamos el signo de $x - 3$ para definir la función por intervalos:



$$x + (-x + 3) = 3$$

$$x + x - 3 = 2x - 3$$

Así:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 0 \\ f'(3^+) = 2 \end{array}\right\} f'(3^-) \ne f'(3^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(3)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$.

d) Definimos la función por intervalos. Recordamos que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

Así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ f'(0^+) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} f'(0^-) \neq f'(0^+) \;\to\; \text{No existe } f'(0).$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

34 **Calcula los puntos de derivada nula de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$

b) $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

c) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

d) $y = e^x(x-1)$

e) $y = x^2 e^x$

f) $y = sen\, x + cos\, x$

a) $y' = \dfrac{(x+3)^2 - 2(x+3)x}{(x+3)^4} = \dfrac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \dfrac{3-x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \;\to\; 3 - x = 0 \;\to\; x = 3 \;\to\; y = \dfrac{1}{12}$

Se anula en el punto $\left(3, \dfrac{1}{12}\right)$.

b) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x^2} \;\to\; y' = \dfrac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$$y' = 0 \;\to\; 3x^2 - 8x = 0 \;\to\; x(3x-8) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\; (\text{no vale}) \\ x = \dfrac{8}{3} \;\to\; y = \dfrac{-27}{16} \end{cases}$$

$x = 0$ no está en el dominio.

La derivada se anula en el punto $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

c) $y' = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$$= \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 - \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{x} - \cancel{2x} - 1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2+x+1)^2}$$

$$y' = 0 \;\to\; 2x^2 - 2 = 0 \;\to\; x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \;\to\; y = \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \;\to\; y = 3 \end{cases}$$

Se anula en los puntos $(-1, 3)$ y $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$.

d) $y' = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$y' = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1$

Se anula en el punto $(0, -1)$.

e) $y' = 2x\,e^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$

$$y' = 0 \rightarrow 2x + x^2 = 0 \rightarrow x(2+x) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = -2 \rightarrow y = 4e^{-2} \end{cases}$$

Se anula en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 4e^{-2})$.

f) $y' = \cos x - \operatorname{sen} x$

$$y' = 0 \rightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \rightarrow y = \sqrt{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \rightarrow y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Se anula en los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right), \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k, -\sqrt{2}\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

s35 **a) Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

a) Para que sea derivable, en primer lugar ha de ser continua.

- **Si $x \ne 1$,** la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ &\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ &f(1) = -4 + m \end{aligned}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser:

$-4 + m = -1 + n$; es decir: $m = n + 3$.

Derivabilidad:

- **Si $x \ne 1$,** la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable en $x = 1$, ha de ser $-3 = -2 + n$, es decir, $n = -1$.

Por tanto, la función será derivable en todo $\mathbb{R}$ si $m = 2$ y $n = -1$. En este caso, la derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2x - 5$ si $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}; \text{ pero } \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$ si $x \geq 1$

$$-2x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}; \text{ pero } -\frac{1}{2} < 1$$

Por tanto, $f'(x)$ no se anula en ningún punto.

s36 Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 2$** debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$; es decir, $2a + 3 = -b$ o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **En $x = 2$** debe cumplirse que $f'(2^-) = f'(2^+)$:

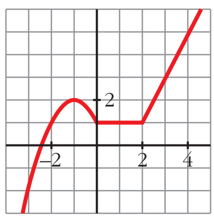
  $$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$

  Para que sea derivable, ha de ser $4a + 3 = 4 - b$; es decir, $b = -4a + 1$.

  Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

  $$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \;\rightarrow\; 2a = 4 \;\rightarrow\; a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

  Por tanto, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

37 

Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Calcula, observándola:

$$f'(-1),\; f'(1) \;\text{y}\; f'(3)$$

¿En qué puntos no es derivable?

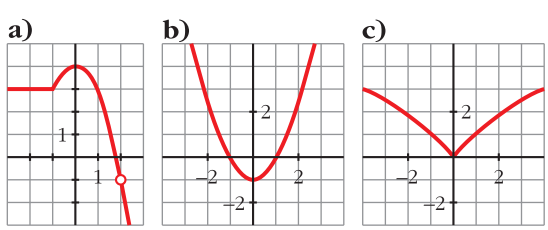
- En $x = -1$, la recta tangente a f es horizontal; su pendiente es 0.

  Por tanto, $f'(-1) = 0$.
- En $x = 1$, f es una función constante. Luego $f'(1) = 0$.
- En $x = 3$, f es una recta que pasa por los puntos (2, 1) y (4, 5).

  Calculamos su pendiente:

  $$m = \frac{5-1}{4-2} = 2. \quad \text{Por tanto, } f'(3) = 2.$$
- No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$, porque en ellos observamos que $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ y $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.

s38 **Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables. ¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?**



a) No es derivable en $x = -1$ porque $f'(-1^-) \neq f'(-1^+)$ (tiene un punto "anguloso") ni en $x = 2$ (no está definida la función).

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c) No es derivable en $x = 0$ porque $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ (tiene un punto "anguloso").

Página 277

s39 **Calcula a y b para que f sea continua y derivable.**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Continuidad:

- **En $x \neq 0$** → La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua ha de ser } b = 0.$$

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$** → La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto, $f(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

40 **Halla el valor de la derivada de la función $cos(x + y) + sen(x - y) = 0$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.**

Derivamos:

$$-sen\ (x + y) \cdot (1 + y') + cos\ (x - y) \cdot (1 - y') = 0$$

$$-sen\ (x + y) - y'\ sen\ (x + y) + cos\ (x - y) - y'\ cos\ (x - y) = 0$$

$$-sen\ (x + y) + cos\ (x - y) = y'\ \big(sen\ (x + y) + cos\ (x - y)\big)$$

$$y' = \frac{-sen\ (x + y) + cos\ (x - y)}{sen\ (x + y) + cos\ (x - y)}$$

Calculamos la derivada en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 + 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

s41 **Calcula la derivada de orden n de la función $f(x) = e^{2x}$.**

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = 4e^{2x} = 2^2e^{2x}$

$f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3e^{2x}$

…

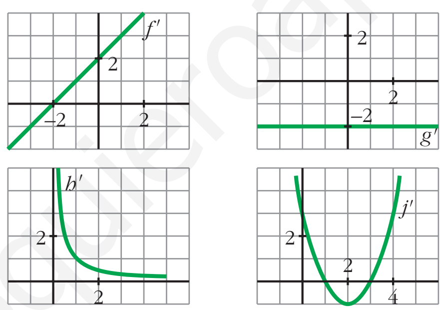
$f^n(x) = 2^n e^{2x}$

Lo demostramos por inducción:

Para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, vemos que se cumple.

Supongamos que es cierto para $n - 1$; es decir, que $f^{n-1}(x) = 2^{n-1}e^{2x}$; entonces, derivando, tenemos que: $f^n(x) = 2 \cdot 2^{n-1}e^{2x} = 2^n e^{2x}$. Por tanto, la expresión obtenida es cierta para todo n.

s42 **Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones f, g, h y j:**



a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.

f tiene un punto de tangente horizontal en $x = -2$, pues $f'(-2) = 0$.

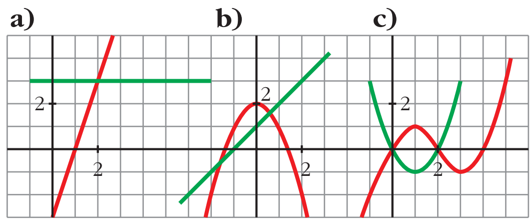
j tiene dos puntos de tangente horizontal en $x = 1$ y en $x = 3$, pues $j'(1) = j'(3) = 0$.

g y h no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es g'.

c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es f'.

43 **¿Cuál de los siguientes apartados representa la gráfica de una función f y la de su derivada f'? Justifica tu respuesta.**



a) La función en rojo es una recta que tiene pendiente 3. Por tanto, su derivada es $y = 3$ (la recta verde). Luego, estas gráficas sí representan a una función y su derivada.

b) La función en rojo es un polinomio de 2.° grado, una parábola. Su derivada es una recta. En $x = 0$, la función tiene un máximo; la derivada se anula. Para que la recta fuera la derivada, tendría que pasar por (0, 0).

No representan, por tanto, a una función y su derivada.

c) La función tiene que ser un polinomio de 3.^{er} grado porque tiene dos extremos relativos. Su derivada será un polinomio de 2.° grado, una parábola. En $x = 1$, la función tiene un máximo; la derivada se anula, $f'(1) = 0$, y tendría que pasar por (1, 0). Estas tampoco representan a una función y su derivada.

Por tanto, solo la primera es válida.

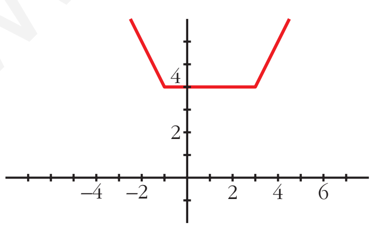
44 **a) Representa la función siguiente:**

$$f(x) = |x + 1| + |x - 3|$$

Observando la gráfica, di en qué puntos no es derivable.

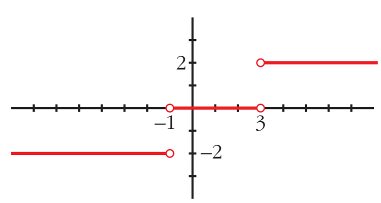
b) Representa $f'(x)$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 - x + 3 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 - x + 3 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x + 1 + x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



No es derivable en $x = -1$ ni en $x = 3$. (Son puntos “angulosos”).

b) $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



s45 **Halla los puntos de derivada nula de la función siguiente:**

$$\boldsymbol{f(x) = (3x - 2x^2)\, e^x}$$

$f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = (3 - 4x + 3x - 2x^2)e^x = (-2x^2 - x + 3)e^x$

$$f'(x) = 0 \;\to\; -2x^2 - x + 3 = 0 \;\to\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{-3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

46 **Dada la función $f(x) = e^x + \ln(1 - x)$, comprueba que $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$. ¿Será también $f'''(0) = 0$?**

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1 - x} \;\to\; f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{(1 - x)^2} \;\to\; f''(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{2}{(1 - x)^3} \;\to\; f'''(0) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

47 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x - 3)}{x^2 - 9} & \text{si } x \neq 0,\; x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}}$$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} & \text{si } x \neq 0,\; x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{array}\right\} = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x}{x + 3} & \text{si } x \neq 0,\; x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3\}$. Por tanto, en $x = -3$ no es continua (ni derivable), pues no está definida.

Continuidad:

- **En $x \neq 0$, $x \neq 3$ y $x \neq -3$:** Es continua, pues las funciones que la forman son continuas en este caso.

- **En $x = 0$** debe ser $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x + 3} = 0 \\ f(0) = -1 \end{array}\right\}$$ No es continua en $x = 0$ (tiene una discontinuidad evitable).

- **En $x = 3$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x+3} = 1 \\ f(3) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3). \\ \text{La función es continua en } x = 3. \end{array}$$

- **En $x = -3$:** No es continua, pues no está definida.

  Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$, $x \neq 3$ y $x \neq -3$:** Es derivable. Además: $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$
- **En $x = 0$ y en $x = -3$:** No es derivable, pues no es continua.
- **En $x = 3$:** Sí es derivable, pues $f'(3^-) = f'(3^+) = f'(3) = \dfrac{1}{6}$.

  Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$. Además:

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq -3$$

s48 **Determina, si es posible, el valor del parámetro a para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- **Si $x > 0$, $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por funciones continuas.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a(1 - e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Derivabilidad

- **Si $x > 0$, $x \neq 1$:** es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Luego, para que f sea derivable en todo su dominio de definición, ha de ser $a = 1$.

s49 **Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & x \le 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, la función es continua en $x = 0$.

Veamos si es derivable:

- **Si $x \neq 0$,** tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

No existen las derivadas laterales en $x = 0$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

s50 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$

a) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1 + x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Continuidad:

- **Si $x \neq 0$**:

Es continua, pues está formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- **Si $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ Es continua en } x = 0.$$

Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

  $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$

  No es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Por tanto, en $x = -1$ y en $x = 1$ la función no es continua (ni derivable).

Continuidad:

- **Si $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$**:

  La función es continua, pues está formada por funciones continuas (en estos puntos).

- **En $x = -1$ y en $x = 1$**:

  No es continua, pues no está definida en estos puntos.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \\ \text{La función es continua en } x = 0. \end{array}$$

Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 1$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = -1$ y en $x = 1$:** No es derivable, pues no está definida la función.
- **En $x = 0$:** $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$. No es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

51 **Prueba la igualdad siguiente:** $D\left[arc\ tg\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

$$D\left[arc\ tg\ \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{\left(1 + \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 2}{4}\right) \cdot 2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 4}{(e^{2x} + e^{-2x} + 2) \cdot 2} = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

52 **Demuestra que la derivada de la función** $y = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}$ **con** $0 \leq x \leq \pi$ **es una constante.**

☛ ***Recuerda la fórmula de*** $tg\ \dfrac{x}{2}$.

Si $0 \leq x \leq \pi \ \rightarrow\ 0 \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\pi}{2} \ \rightarrow\ tg\ \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}$

Así: $y = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = arc\ tg\left(tg\ \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$

Por tanto: $y' = \dfrac{1}{2}$

53 **Si** $f(x) = x^2|x|$, **halla** f', f'' **y** f'''.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0) = 0$).

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f''(0^-) = f''(0^+) = f''(0) = 0$).

$$f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$ no existe f''', puesto que $f'''(0^-) = -6 \neq f'''(0^+) = 6$).

54 **Halla los puntos de derivada nula de la función $y = \cos 2x - 2\cos x$.**

$y' = -\text{sen } 2x \cdot 2 - 2 \cdot (-\text{sen } x) = -2\text{sen } 2x + 2 \text{ sen } x =$

$= -2 \cdot 2\text{sen } x \cdot \cos x + 2\text{sen } x = 2\text{sen } x\,(-2\cos x + 1)$

$y' = 0 \quad \rightarrow \quad 2\text{sen } x\,(-2\cos x + 1) = 0$

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 + k \cdot \pi \\ -2\cos x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = \dfrac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\,; \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \end{cases}$$

Página 278

CUESTIONES TEÓRICAS

55 **Sabes que** $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

A partir de esta expresión, justifica la validez de esta otra:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Llamando $h = x - x_0$, tenemos que:

- Si $h \rightarrow 0$, entonces $x \rightarrow x_0$.
- Además, $x_0 + h = x$

Por tanto: $\displaystyle f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

56 **Relaciona los siguientes límites con la derivada de las funciones que aparecen en ellos:**

a) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ **b)** $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ **c)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x}$

a) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

b) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x} = \phi'(2)$

s57 **Una función polinómica de tercer grado, ¿cuántos puntos de derivada nula puede tener?**

¿Es posible que no tenga ninguno? ¿Es posible que solo tenga uno?

La derivada de una función polinómica de tercer grado es una función polinómica de segundo grado.

Por tanto, puede haber dos puntos, un punto, o ningún punto con derivada nula.

Por ejemplo:

$f(x) = x^3 - 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ Dos puntos

$f(x) = x^3 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow$ Un punto

$f(x) = x^3 + 3x \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0$ para todo $x \;\rightarrow$ Ninguno

58 **Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.**

Su derivada es una función polinómica de primer grado, que se anula siempre en un punto.

59 **¿Puede haber dos funciones que tengan la misma derivada?**

Pon ejemplos de funciones cuya derivada sea $f'(x) = 2x$.

Sí. Por ejemplo, si $f'(x) = 2x$, podemos considerar: $f(x) = x^2 + k$, siendo k una constante cualquiera.

60 **Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función $f(x) = sen\ 2x$ se anulan en el origen de coordenadas.**

$f^{\mathrm{I}}(x) = 2\cos 2x$

$f^{\mathrm{II}}(x) = -4 sen\ 2x = -2^2 \cdot sen\ 2x$

$f^{\mathrm{III}}(x) = -8\cos 2x = -2^3 \cdot \cos 2x$

$f^{\mathrm{IV}}(x) = 16 sen\ 2x = 2^4 \cdot sen\ 2x$

…

En general, las derivadas de orden par son de la forma: $f^{(n)}(x) = k \cdot sen\ 2x$, donde k es constante.

Por tanto, se anulan todas en $x = 0$, puesto que $sen\ 0 = 0$. Como $f(0) = 0$, tenemos que todas las derivadas de orden par de $f(x)$ se anulan en el origen de coordenadas.

61 **La función $y = \sqrt{x^2 - 4x}$, ¿tiene algún punto de derivada nula? ¿Y la función $y = \sqrt{4x - x^2}$?**

$$y = \sqrt{x^2 - 4x} \quad \to \quad \textit{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}} = 0 \quad \to \quad x = 2$$

Pero $x = 2$ no pertenece al dominio de definición de la función. Por tanto, no tiene ningún punto de derivada nula.

Para la otra función:

$$y = \sqrt{4x - x^2} \quad \to \quad \textit{Dominio} = [0, 4]$$

$$y' = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = 0 \quad \to \quad x = 2 \ \text{(Sí pertenece al dominio)}$$

La derivada se anula en $x = 2$.

62 **Sean f y g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$, tales que:**

$$f(0) = 5; \ f'(0) = 6; \ f'(1) = 3$$

$$g(0) = 1; \ g'(0) = 4; \ g'(5) = 2$$

Prueba que $f \circ g$ y $g \circ f$ tienen la misma derivada en $x = 0$.

Aplicamos la regla de la cadena:

$$(f \circ g)'(0) = f'\big(g(0)\big) \cdot g'(0) = f'(1) \cdot g'(0) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$(g \circ f)'(0) = g'\big(f(0)\big) \cdot f'(0) = g'(5) \cdot f'(0) = 2 \cdot 6 = 12$$

PARA PROFUNDIZAR

63 **Dada $y = sen\ x$, halla un punto en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la tangente sea paralela a la cuerda que pasa por (0, 0) y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.**

La cuerda que pasa por (0, 0) y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ tiene pendiente: $m = \dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$.

Tenemos que hallar un punto del intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la derivada de la función sea igual a $\frac{2}{\pi}$:

$$\left.\begin{array}{l} y' = cos\ x = \dfrac{2}{\pi} \\[2ex] x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \quad \to \quad x = 0{,}88$$

64 **Prueba, utilizando la definición de derivada, que la función:**

$$f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$$

es derivable en $x = 1$ y no lo es en $x = -1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{-h\sqrt{1 - (1 + h)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\sqrt{1 - (1 + h)^2}\right) = 0 = f'(1)$$

$$(1)\ \begin{cases} f(1 + h) = (1 - 1 - h)\sqrt{1 - (1 + h)^2} \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} \overset{(2)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{(2 - h)\sqrt{2h - h^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left((2 - h)\sqrt{\frac{2h - h^2}{h^2}}\right) = \lim_{h \to 0} (2 - h)\sqrt{\frac{(2 - h)}{h}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{0} \to \text{no existe } f'(-1)$$

$$(2)\ \begin{cases} f(-1 + h) = (1 + 1 + h)\sqrt{1 - (-1 + h)^2} = (2 + h)\sqrt{2h - h^2} \\ f(-1) = (1 + 1)\sqrt{1 - (-1)^2} = 0 \end{cases}$$

s65 $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

Continuidad: Debe cumplirse que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 2\right) = 1 + 2 = 3 \\ &f(0) = k \end{aligned}\right\}$$

La función será continua en $x = 0$ si $k = 3$.

66 **Halla la derivada *n*-ésima de las funciones siguientes:**

a) $y = e^{ax}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \ln(1 + x)$

a) $y' = a\,e^{ax}$; $y'' = a^2\,e^{ax}$; $y''' = a^3\,e^{ax}$; … $y^{n)} = a^n\,e^{ax}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = a^{n-1} e^{ax}$, derivando obtenemos: $y^{n)} = a \cdot a^{n-1} e^{ax} = a^n e^{ax}$, como queríamos demostrar.

b) $y' = \frac{-1}{x^2}$; $y'' = \frac{2}{x^3}$; $y''' = \frac{-6}{x^4}$; … $y^{n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n}$, derivando obtenemos:

$$y^{n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\,(-1) \cdot n}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}},$$ como queríamos demostrar.

c) $y' = \frac{1}{1+x}$; $y'' = \frac{-1}{(1+x)^2}$; $y''' = \frac{2}{(1+x)^3}$; … $y^{n)} = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$

Lo probamos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = \frac{(-1)^{n-2}\,(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}$, derivando, obtenemos:

$$y^{n)} = \frac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!\,(-1)(n-1)}{(1+x)^n} = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n},$$ como queríamos demostrar.

67 **Considera la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^n\, sen(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

siendo n un número natural.

a) Demuestra que f es derivable en $x = 0$ para $n = 2$.

b) Demuestra que f no es derivable en $x = 0$ para $n = 1$.

a) $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2\, sen\,(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h\, sen\left(\frac{1}{h}\right) \overset{(*)}{=} 0$$

(*) Tenemos en cuenta que $-1 \le sen\left(\frac{1}{h}\right) \le 1$.

Por tanto, f es derivable en $x = 0$ para $n = 2$.

b) $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\, sen\,(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} sen\left(\frac{1}{h}\right)$$

Este límite no existe (el valor de $sen\left(\frac{1}{h}\right)$ va oscilando entre –1 y 1).

Por tanto, f no es derivable en $x = 0$ para $n = 1$.

68 **Prueba que existe un punto de la curva:**

$$f(x) = e^x + arc\ tg\ x$$

cuya tangente (en ese punto) es paralela a la recta $y = 3x + 2$.

☛ ***Aplica el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f'(x) - 3$.***

La pendiente de la recta $y = 3x + 2$ es $m = 3$.

Tenemos que probar que existe un punto de la curva $f(x)$ tal que $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} = 3$$

Consideramos la función $g(x) = f'(x) - 3$; es decir:

$$g(x) = e^x + \frac{1}{1 + x^2} - 3$$

Tenemos que: $\begin{cases} g(0) = -1 < 0 \\ g(1) = e - \dfrac{5}{2} \approx 0{,}22 > 0 \\ g(x) \text{ es una función continua en } [0, 1] \end{cases}$

Aplicando el teorema de Bolzano, sabemos que existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$. Es decir, $f'(c) - 3 = 0$; o bien $f'(c) = 3$, como queríamos probar.

Página 279

69 **Comprueba en cada caso que $f(x)$ verifica la ecuación indicada:**

a) $f(x) = e^x\ sen\ x$

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) $f(x) = ln \dfrac{1}{x+1}$

$x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$

a) $f'(x) = e^x\ sen\ x + e^x \cos x$

$f''(x) = \cancel{e^x\ sen\ x} + e^x \cos x + e^x \cos x - \cancel{e^x\ sen\ x} = 2e^x \cos x$

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2e^x \cos x - 2e^x\ sen\ x - 2e^x \cos x + 2e^x\ sen\ x = 0$

Por tanto: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

De otra forma:

$f'(x) = e^x\ sen\ x + e^x \cos x = f(x) + e^x \cos x$

$f''(x) = f'(x) + e^x \cos x - e^x\ sen\ x =$

$= f'(x) + e^x \cos x - e^x\ sen\ x + e^x\ sen\ x - e^x\ sen\ x =$

$= f'(x) + (e^x\ sen\ x + e^x \cos x) - 2e^x\ sen\ x =$

$= f'(x) + f'(x) - 2f(x) = 2f'(x) - 2f(x)$

Por tanto: $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) $f(x) = ln\ 1 - ln\ (x + 1) = -ln(x + 1)$

$$f'(x) = \frac{-1}{x + 1}$$

$$xf'(x) + 1 = \frac{-x}{x + 1} + 1 = \frac{-x + x + 1}{x + 1} = \frac{1}{x + 1} = e^{ln\left(\frac{1}{x + 1}\right)} = e^{f(x)}$$

Por tanto: $xf'(x) + 1 = e^{f(x)}$

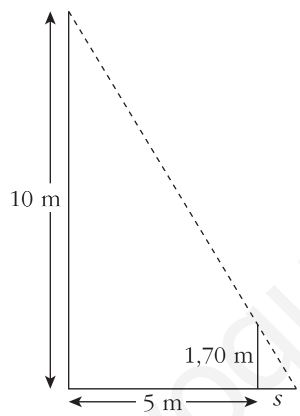
s70 **Una persona camina, a la velocidad constante de 3 m/s, alejándose horizontalmente en línea recta desde la base de un farol cuyo foco luminoso está a 10 m de altura.**

Sabiendo que la persona mide 1,70 m, calcula:

a) La longitud de la sombra cuando la persona está a 5 m de la base del farol.

b) La velocidad de crecimiento de la sombra a los t segundos de comenzar a caminar.

a)



Sea s la longitud de la sombra. Por semejanza de triángulos:

$$\frac{10}{5 + s} = \frac{1,7}{s} \rightarrow 10s = 1,7(5 + s) \rightarrow 10s = 8,5 + 1,7s \rightarrow$$

$$\rightarrow 8,3s = 8,5 \rightarrow s = 1,024 \text{ m}$$

La sombra mide 1,024 metros.

b) El espacio recorrido a los t segundos es $3t$.

Veamos cómo varía la sombra:

$$\frac{10}{3t + s} = \frac{1,7}{s} \rightarrow 10s = 5,1t + 1,7s \rightarrow 8,3s = 5,1t \rightarrow s = \frac{5,1t}{8,3}$$

Esta es la función que nos da la longitud de la sombra según el tiempo trans currido desde que se empieza a caminar.

La velocidad de crecimiento de la sombra será la derivada de s respecto de t:

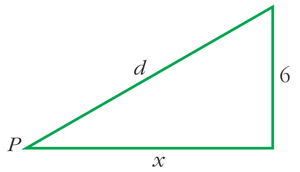
$$s' = \frac{5,1}{8,3} = 0,614 \text{ m/s}$$

71 **Un avión vuela horizontalmente a 6 km de altura. La ruta del avión pasa por la vertical de un punto P y se sabe que, en el instante en que la distancia del avión a P es 10 km, dicha distancia aumenta a razón de 6 km/minuto.**

Halla la velocidad del avión, que supondremos constante.

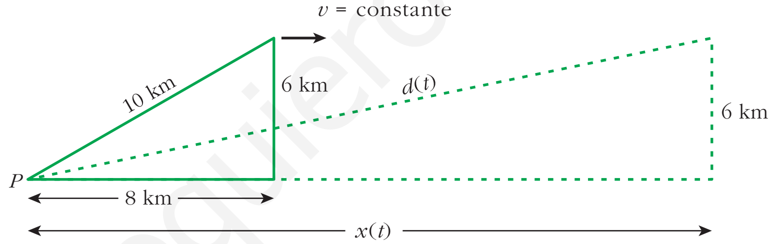
Pasos:

a) Expresa d en función de x:



b) Obtén la expresión de la velocidad de alejamiento de P, $d'(t)$, en función de x y de $x'(t)$.

c) Despeja $x'(t_0)$ siendo t_0 el instante al que se refiere el enunciado y, por tanto, para el que conocemos algunos datos numéricos. $x'(t_0)$ es la velocidad del avión en ese instante y, por tanto, su velocidad constante.



a) $d = \sqrt{x^2 + 36}$

b) $d(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 36}$

La velocidad es la derivada de $d(t)$:

$$d'(t) = \frac{2x(t)\, x'(t)}{2\sqrt{(x(t))^2 + 36}} = \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + 36}}$$

c) Como $d = \sqrt{x^2 + 36} \rightarrow 10 = \sqrt{x^2 + 36} \rightarrow x^2 = 64 \begin{cases} x = 8 \\ x = -8 \ \text{(no vale)} \end{cases}$

En $t = t_0$, $d(t_0) = 10$ km, $d'(t_0) = 6$ km/min y $x(t_0) = 8$ km

$$x'(t_0) = \frac{d'(t_0)\sqrt{(x(t_0))^2 + 36}}{x(t_0)} = \frac{6\sqrt{8^2 + 36}}{8} = \frac{60}{8} = 7{,}5 \text{ km/min}$$

El avión va a 7,5 km/min; es decir, a 450 km/h.

Página 279

AUTOEVALUACIÓN

1. **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $y = (2x + 2)\sqrt{x-1}$ **b)** $y = arc\ tg\,\dfrac{x+3}{x-3}$ **c)** $y = ln(ln\ x)^2$

d) $y = \sqrt[3]{2^{x-1}}$ **e)** $y = (tg\ x)^{1-x}$ **f)** $x^2 + y^2 - xy = 0$

a) $y' = 2\sqrt{x-1} + (2x+2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1} + \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}} =$

$$= \frac{2(x-1) + x + 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{3x-1}{\sqrt{x-1}}$$

b) $y' = \dfrac{D\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)}{1 + \left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{-6}{(x-3)^2}}{\dfrac{(x-3)^2 + (x+3)^2}{(x-3)^2}} = \dfrac{-6}{2x^2 + 18} = \dfrac{-3}{x^2+9}$

c) Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$y = ln\ (ln\ x)^2 = 2\ ln\ (ln\ x) \ \rightarrow\ y' = 2\cdot\frac{D(ln\ x)}{ln\ x} = 2\,\frac{1/x}{ln\ x} = \frac{2}{x\ ln\ x}$$

d) Expresando la raíz como potencia:

$$y = \sqrt[3]{2^{x-1}} = 2^{\frac{x-1}{3}} \ \rightarrow\ y' = D\left(\frac{x-1}{3}\right)\cdot 2^{\frac{x-1}{3}}\cdot ln\ 2 = \frac{ln\ 2}{3}\cdot 2^{\frac{x-1}{3}}$$

e) Aplicamos la derivación logarítmica:

$$ln\ y = (1-x)\ ln\ (tg\ x) \ \rightarrow\ \frac{y'}{y} = -ln\ (tg\ x) + (1-x)\,\frac{D(tg\ x)}{tg\ x} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \frac{y'}{y} = -ln\ (tg\ x) + (1-x)\,\frac{1 + tg^2\ x}{tg\ x} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ y' = \left[-ln\ (tg\ x) + \frac{(1-x)(1 + tg^2\ x)}{tg\ x}\right](tg\ x)^{1-x} =$$

$$= -(tg\ x)^{1-x}\ ln\ (tg\ x) + (1-x)(1 - tg^2\ x)\ (tg\ x)^{-x}$$

f) Derivamos implícitamente:

$$x^2 + y^2 - xy = 0 \ \rightarrow\ 2x + 2yy' - y - xy' = 0 \ \rightarrow\ (2y - x)y' =$$

$$= y - 2x \ \rightarrow\ y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

2. **Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ siendo $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.**

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x+h)^2}{(x+h)^2 \cdot x^2} = \frac{-2xh - h^2}{x^2\,(x+h)^2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2xh - h^2}{x^2\,(x+h)^2 h} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

3. **Dada la función $f(x) = x|x|$, defínela por intervalos y halla:**

a) $f'(x)$ **b)** $f''(x)$

Representa $f'(x)$ y $f''(x)$.

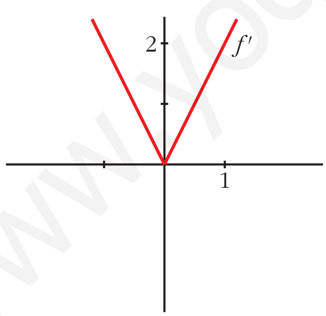
$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

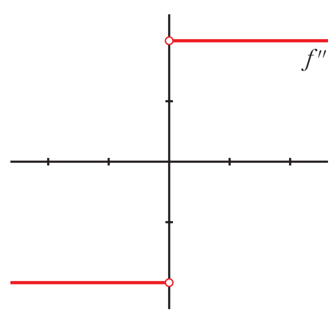
a) $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$, la función es derivable en $x = 0$.

b) $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

No existe $f''(0)$, ya que $f''(0^-) = -2 \neq 2 = f''(0^+)$





4. **Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ y calcula $f'(1)$.**

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ (en $x = 0$ no existe la derivada).

$$f'(1) = \frac{-2}{3}$$

5. **Estudia la continuidad y la derivabilidad de:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$? Represéntala gráficamente.

Continuidad:

- **En $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1). \\ \text{Por tanto, la función es continua en } x = 1. \end{array}$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 1$:** La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$

La función no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Puntos en los que $f'(x) = 0$:

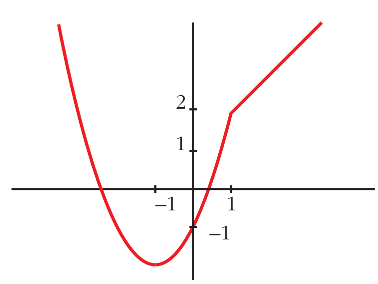
$f'(x) = 2x + 2$ si $x < 1$

$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$f'(x) = 1$ si $x > 1 \rightarrow f'(x) \neq 0$ si $x > 1$

Por tanto, la derivada se anula en $x = -1$.

Gráfica de $f(x)$:



6. **Halla a y b para que $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

- **Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$:** La función es continua, pues está formada por polinomios.
- **En $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $-2 + a = -a + b$; es decir: $b = 2a - 2$.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $b = 2$.

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 2$ y $b = 2$.

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}; \text{ es decir: } f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

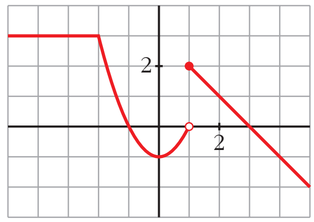
- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = 0$

La función no es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

7. **Observando la gráfica de esta función f, estudia su derivabilidad. Halla si existen $f'(-4)$, $f'(0)$, $f'(3)$.**



- f es discontinua en $x = 1$. Por tanto, no es derivable en $x = 1$.

  En $x = -2$ observamos que $f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$: tampoco es derivable.

  Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$

- $f'(-4) = 0$ porque en ese punto la función es constante.

  $f'(0) = 0$ porque en $x = 0$ la tangente es horizontal.

  $f'(3) = -1$ porque -1 es la pendiente de la recta que pasa por $(1, 2)$ y $(3, 0)$:

  $m = \dfrac{2 - 0}{1 - 3} = -1$