1.- **(10 puntos)** Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-senx}{x\,senx}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-senx}{x\,senx}=\left(\frac{0}{0}Ind\right)\underset{senx\approx x}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-senx}{x^2}\underset{L'Hôp.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{2x}\underset{L'Hôp.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}+senx}{2}=-\frac{1}{2}$$

2.- **(10 puntos)** Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(9^x+1\right)^{\frac{1}{2x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(9^x+1\right)^{\frac{1}{2x}}=\left(\infty^0 ind.\right)=A\quad tomamos\ \ln\ \Rightarrow \ln A=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\ln\left(9^x+1\right)=\left(0.\infty\, ind.\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(9^x+1\right)}{2x}\underset{L'Hôp.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{9^x\cdot\ln 9}{9^x+1}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9^x\cdot\ln 9}{2\left(9^x+1\right)}\underset{L'Hôp.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{9^x}\cdot\ln^{\cancel{2}}9}{2\cdot\cancel{9^x}\cdot\cancel{\ln 9}}=\frac{1}{2}\ln 9=\ln\sqrt{9}=\ln 3\Rightarrow A=3$$

3.- **(10 puntos)** Calcular según los valores de "a": $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{ax^2+4x+8}\right)^{x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{ax^2+4x+8}\right)^{x+1}=\left(1^\infty Ind.\right)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left(\frac{1}{ax^2+4x+8}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{ax^2+4x+8}}=\begin{cases}=e^0=1 & si\quad a\neq 0\\ =e^{\frac{1}{4}} & si\quad a=0\end{cases}$$

4.- **(10 puntos)** Hallar el valor de "m" para que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{sen2x}=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{sen2x}=\left(\frac{0}{0}Ind.\right)\underset{\substack{\ln(1+mx)\approx mx\\ sen2x\approx 2x}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{mx}{2x}=\frac{m}{2}=3\Rightarrow m=6$$

5.- **(10 puntos)** Se considera una caja de cartón de base rectangular y sin tapa superior. La longitud de uno de los lados del rectángulo de la base es siete veces la del otro lado. Calcular las dimensiones que ha de tener la caja para que el volumen sea 49 cm^3 y para que su fabricación sea lo más económica posible.

Sea x=lado corto del rectángulo de la base e y=altura $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} Volumen:\ 7x^2\cdot y=49\Rightarrow y=\dfrac{7}{x^2}\\ Coste: C(x,y)=7x^2+16xy\end{array}\right\}\Rightarrow C(x)=7x^2+\frac{102}{x}$$

$$C'(x)=14x-\frac{112}{x^2}=0\Rightarrow 14x^3-112=0\Rightarrow x=2$$

$$C''(x)=14+\frac{224}{x^3}\Rightarrow C''(2)=14+28=42>0\Rightarrow mínimo\quad x=2;\quad y=\frac{7}{4}=1{,}75$$

$\Rightarrow$ *SOLUCIÓN* : una caja de 2 x 14 x 1,75

6.- **(20 puntos)** Considerar la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1} & si \;\; x<0\\ ax+b & si \;\; 0\le x\le 3\\ x-5 & si \;\; x>3\end{cases}$

a) Calcular los valores de “a” y “b” Para que sea continua en $\mathbb{R}$.

$$\odot x=0 \;\; \left.\begin{array}{l} f(0)=b\\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^2+1}=1\\ \lim\limits_{x\to0^+} ax+b=b\end{array}\right\}\Rightarrow b=1 \quad \odot x=3 \;\; \left.\begin{array}{l} (3) \quad 3a+1\\ \lim\limits_{x\to3^-} ax+1=3a+1\\ \lim\limits_{x\to3^+} x-5=-2\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}3a+1=-2\\ a=-1\end{array}\Rightarrow \begin{array}{c} y=f(x) \; continua \; en \; \mathbb{R}\\ para \;\; a=-1 \;\; y \;\; b=1\end{array}$$

b) Para esos valores de “a” y “b”, estudiar la derivabilidad y calcular la derivada donde sea posible

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2} & si \;\; x<0\\ -1 & si \;\; 0<x<3\\ 1 & si \;\; x>3\end{cases}$$

$$\odot \; x=0 \; \left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\\ f'(0^+)=\lim\limits_{\to0^+} f'(x)=\lim\limits_{x} -1=-1\end{array}\right. \Rightarrow no \;\; derivable$$

$$\odot \; x=3 \; \left\{\begin{array}{l} f'(3^-)=\lim\limits_{x\to3^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-} -1=-1\\ f'(3^+)=\lim\limits_{x\to3^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-} 1=1\end{array}\right. \Rightarrow no \;\; derivable$$

.

7.- **(10 puntos)** Hallar la función derivada de $y=\left(x^2-1\right)^{\cos x}$

$$\ln y=\cos x\cdot\ln\left(x^2-1\right)\Rightarrow\frac{y'}{y}=-senx\cdot\ln\left(x^2-1\right)+\cos x\cdot\frac{2x}{x^2-1}\Rightarrow y'=\left(x^2-1\right)^{\cos x}\cdot\left[\cos x\cdot\frac{2x}{x^2-1}-senx\cdot\ln\left(x^2-1\right)\right]$$

8.- **(10 puntos)** Hallar la ecuación de las rectas tangentes a la curva $x^2+y^2-2x+4y-24=0$ en el punto que tiene de abscisa x_o=3.

Puntos de tangencia: $x=3\Rightarrow 9+y^2-6+4y-24=0\Leftrightarrow y^2+4y-21=0\Rightarrow y=-7 \;\; ; \;\; y=3\Rightarrow(3,-7),(3,3)$

Pendiente de las tangentes: $x^2+y^2-2x+4y-24=0\Rightarrow 2x+2yy'-2+4y'=0\Rightarrow y'=\dfrac{2-2x}{2y+4}=\dfrac{1-x}{y+2}$

$\odot$ $para \; (3,-7)\Rightarrow m=\dfrac{1-3}{-7+2}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow$ ecuación de la tangente $y+7=\dfrac{2}{5}(x-3)$

$\odot$ $para \; (3,3) \;\; \Rightarrow m=\dfrac{1-3}{3+2}=-\dfrac{2}{5}\Rightarrow$ ecuación de la tangente $y-3=-\dfrac{2}{5}(x-3)$

9.- **(10 puntos)** Dada la función $y=e^x\left(x^3-4x^2+7x-6\right)$ definida en $[-2,2]$ hallar los máximos y mínimos relativos y absolutos.

$$y=e^x\left(x^3-4x^2+7x-6\right)\Rightarrow y'=e\;\left(x^3-x^2-x+1\right)=0\Rightarrow x^3-x^2-x+1=0\Rightarrow x=\pm1$$

$$-2\xrightarrow[\searrow]{y'<0}\underset{\substack{mínimo\\ relativo}}{-1}\xleftarrow[\nearrow]{y'>0}\!\!\to 1\xleftarrow[\nearrow]{y'>0}2\Rightarrow \text{Mínimo relativo y absoluto}\left(-1,-\frac{18}{e}\right)\text{ Máximo absoluto }(2,0)$$

A.G.Onandía