1.-

Calcula estas integrales de funciones trigonométricas.

a) $\int sen\ 2x\ dx$

b) $\int cos\ (x+1)\ dx$

c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\ dx$

d) $\int sen\ (-x)\ dx$

a) $\int sen\ 2x\ dx = \frac{1}{2}\int 2\ sen\ 2x\ dx = \frac{-cos\ 2x}{2} + k$

b) $\int cos\ (x+1)\ dx = sen\ (x+1) + k$

c) $\int \frac{sen\ \frac{x}{2}}{2}\ dx = \int \frac{1}{2}\ sen\ \frac{x}{2}\ dx = -cos\ \frac{x}{2} + k$

d) $\int sen\ (-x)\ dx = -\int -sen\ (-x)\ dx = cos\ (-x) + k$

2.-

Resuelve estas integrales de tipo funciones arco.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\ dx$

b) $\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\ dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\ dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\ dx = arc\,sen\ 5x + k$

b) $\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\ dx = arc\,tg\ (x-3) + k$

3.-

Halla la solución de las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\ dx$

b) $\int \frac{x}{1+9x^4}\ dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\ dx = \frac{1}{2}\ arc\,sen\ (2x-3) + k$

b) $\int \frac{x}{1+9x^4}\ dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+(3x^2)^2}\ dx = \frac{1}{6}\ arc\,tg\ (3x^2) + k$

4.-

Halla estas integrales integrando por partes.

a) $\int x^2 \ln x \, dx$ b) $\int x^2 sen\ x \, dx$

a) $$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + k$$

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = x^2\,dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

b) $$\int x^2 sen\ x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2x sen\ x - \int 2 sen\ x\,dx =$$

$u = x^2 \rightarrow du = dx\ dx$

$dv = sen\,x\,dx \rightarrow v = -\cos x$

$u = 2x \rightarrow du = 2dx$

$dv = \cos x\,dx \rightarrow v = sen\,x$

$$= -x^2\cos x + 2x sen\ x + 2\cos x + k$$

5.-

Utiliza la integración por partes para calcular:

a) $\int e^x(7+2x)\,dx$ b) $\int (4x^2 - 3x + 1)\cos x\,dx$

a) $$\int e^x(7+2x)\,dx = (7+2x)e^x - \int 2e^x\,dx = (7+2x)e^x - 2e^x + k = e^x(5+2x) + k$$

$u = 7+2x \rightarrow du = 2\,dx$

$dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x$

b) $$\int (4x^2 - 3x + 1) sen\,x\,dx = -(4x^2 - 3x + 1)\cos x + \int (8x-3)\cos x\,dx =$$

$u = 4x^2 - 3x + 1 \rightarrow du = (8x - 3x)\,dx$

$dv = sen\,x\,dx \rightarrow v = -\cos x$

$$= -(4x^2 - 3x + 1)\cos x + (8x-3) sen\,x - \int 8\ sen\,x\,dx =$$

$u = 8x - 3 \rightarrow du = 8\,dx$

$dv = \cos x\,dx \rightarrow v = sen\,x$

$$= -(4x^2 - 3x + 1)\cos x + (8x-3) sen\,x + 8\cos x + k$$

6.-

Resuelve esta integral racional:

$$\int \frac{4x^2 - 2x}{(x+2)(x-3)^2}\,dx$$

$$\int \frac{4x^2-2x}{(x+2)(x-3)^2}\,dx = \int\left(\frac{6}{(x-3)^2} + \frac{\frac{16}{5}}{x-3} + \frac{\frac{4}{5}}{x+2}\right)dx =$$

$$= 6\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \frac{16}{5}\int \frac{1}{x-3}\,dx + \frac{4}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{6}{x-3} + \frac{16}{5}\ln|x-3| + \frac{4}{5}\ln|x+2| + k$$

7.-

Calcula las integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^4 - 5x^2 + 4}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{7x-2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\,dx$

a) $$\int \frac{2x+1}{x^4-5x^2+4}\,dx = \int\left(\frac{\frac{5}{12}}{x-2} + \frac{\frac{-1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{6}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{5}{12}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{5}{12}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + k$$

b) $$\int \frac{7x-2}{x^3-2x^2-x+2}\,dx = \int\left(\frac{4}{x-2} + \frac{\frac{-5}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-3}{2}}{x+1}\right)dx =$$

$$= 4\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= 4\ln|x-2| - \frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + k$$

8.-

Calcula la integral racional:

$$\int \frac{-x^2+7x}{x^3-x^2-x+1}\,dx$$

$$\int \frac{-x^2+7x}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \int\left(\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{-2}{x+1}\right)dx =$$

$$= 3\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - 2\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{x-1} + \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + k$$

9.-

Calcula las integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{-2x^2+1}{x^3+6x^2+12x+8}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^4}\,dx$

a) $$\int \frac{-2x^2+1}{x^3+6x^2+12x+8}\,dx = \int\left(\frac{-7}{(x+2)^3}+\frac{8}{(x+2)^2}+\frac{-2}{x+2}\right)dx =$$

$$= -7\int \frac{1}{(x+2)^3}\,dx + 8\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx - 2\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{7}{2(x+2)^2} - \frac{8}{x+2} - 2\ln|x+2| + k$$

b) $$\int \frac{x-2}{x^4}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{-2}{x^4}\right)dx = \int \frac{1}{x^3}\,dx - 2\int \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{-1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} + k$$

10.-

Resuelve estas integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int -\frac{3x-2}{2+x^2}\,dx$

a) $$\int \frac{2}{x^2+1}\,dx = 2\,arc\,tg\,x + k$$

b) $$\int -\frac{3x-2}{2+x^2}\,dx = \int -\frac{3x}{2+x^2}\,dx + \int \frac{2}{2+x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|2+x^2| + \frac{2}{\sqrt{2}}\,arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + k$$

11.-

Resuelve estas integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{2x^4}{(x-1)^3}\,dx$

b) $\displaystyle\int -\frac{3x^3-2}{(2-x)^2}\,dx$

$$\text{a)}\quad \int \frac{2x^4}{(x-1)^3}\,dx = \int\left(2x+6+\frac{12}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)dx =$$

$$= x^2+6x+12\ln|x-1| - \frac{8}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + k$$

$$\text{b)}\quad \int -\frac{3x^3-2}{(2-x)^2}\,dx = \int\left(-3x-12+\frac{-22}{2-x}+\frac{-36}{(2-x)^2}\right)dx =$$

$$= \frac{-3x^2}{2} - 12x + 22\ln|2-x| - \frac{36}{2-x} + k$$

12.-

Calcula estas integrales mediante un cambio de variable.

a) $\displaystyle\int x^2(7+2x^3)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\log^5 x}{x}\,dx$

$$\text{a)}\quad \int x^2(7+2x^3)\,dx \underset{\substack{t=7+2x^3\\ dt=6x^2\,dx}}{=} \frac{1}{6}\int t\,dt = \frac{t^2}{12}+k = \frac{(7+2x^3)^2}{12}+k$$

$$\text{b)}\quad \int \frac{\log^5 x}{x}\,dx \underset{\substack{t=\log x\\ dt=\frac{1}{\ln 10\cdot x}dx}}{=} \ln 10\int t^5\,dt = \ln 10\cdot\frac{t^6}{6}+k = \ln 10\cdot\frac{\log^6 x}{6}+k$$

13.-

Calcula las integrales racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{-2x^5+1}{x^4-2x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^6-1}{x^2(x^2+1)(x-1)}\,dx$

$$\text{a)}\quad \int \frac{-2x^5+1}{x^4-2x^2+1}\,dx = \int\left(-2x+\frac{\frac{-1}{4}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{-9}{4}}{x-1}+\frac{\frac{3}{4}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{-7}{4}}{x+1}\right)dx =$$

$$= \int -2x\,dx + \int \frac{\frac{-1}{4}}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{\frac{-9}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{\frac{-7}{4}}{x+1}\,dx$$

$$= -x^2 + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{9}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{4(x+1)} - \frac{7}{4}\ln|x+1| + k$$

$$\text{b)}\quad \int \frac{x^6-1}{x^2(x^2+1)\,(x-1)}\,dx = \int\left(x+1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\operatorname{arctg} x+k$$

14.-

Halla las integrales con un cambio de variable.

a) $\displaystyle\int e^{x^2}(2x^3+2x)\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx$

$$\text{a)}\quad \int e^{x^2}(2x^3+2x)\,dx \underset{\substack{t=x^2\\ dt=2x\,dx}}{=} \int (e^t t + e^t)\,dt = \int e^t t\,dt + \int e^t\,dt = \int e^t t\,dt + e^t =$$

$$\underset{\substack{u=t \to du=dt\\ dv=e^t\,dt \to v=e^t}}{=} te^t - \int e^t dt + e^t = te^t + k = x^2e^{x^2} + k$$

$$\text{b)}\quad \int \frac{4x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx \underset{\substack{t=2-3x^2\\ dt=-6x\,dx}}{=} \frac{-2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{-4\sqrt{t}}{3}+k = \frac{-4\sqrt{2-3x^2}}{3}+k$$

15.-

Calcula estas integrales.

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$ b) $\displaystyle\int \sqrt{4 - x^2} \, dx$

a) $$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx \underset{\substack{t = \cos x \\ dt = -\operatorname{sen} x \, dx}}{=} -\int (1 - t^2)^2 t^2 \, dt = -\int (t^6 - 2t^4 + t^2) \, dt =$$

$$= -\frac{t^7}{7} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + k = -\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + k$$

b) $$\int \sqrt{4 - x^2} \, dx = 2\int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \, dx \underset{\substack{\frac{x}{2} = \operatorname{sen} t \\ dx = 2 \cos t \, dt}}{=} 2\int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cdot 2 \cos t \, dt = 4\int \cos^2 t \, dt =$$

$$= 4\int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = 2t + 2 \operatorname{sen} 2t + k =$$

$$= 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2} + 2 \operatorname{sen} 2\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2}\right) + k =$$

$$= 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{x}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + k =$$

$$= 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + k$$

16.-

Halla la solución de las integrales.

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2 - x^2}}{4} \, dx$

a) $$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k$$

b) $$\int \frac{\sqrt{2 - x^2}}{4} \, dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \, dx \underset{\substack{\frac{x}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} t \\ dx = \sqrt{2} \cos t \, dt}}{=} \frac{\sqrt{2}}{4} \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \, \sqrt{2} \cos t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) + k = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{8} \sqrt{2 - x^2} + k$$

17.-

Comprueba, en cada uno de los casos, que la función $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$.

a) $F(x) = 3x^5 - 2x + 1$ $\quad f(x) = 15x^4 - 2$

b) $F(x) = (x^5 - 2)^3$ $\quad f(x) = 15x^4(x^5 - 2)^2$

c) $F(x) = \dfrac{2 - x}{x^3} + 7$ $\quad f(x) = \dfrac{2x - 6}{x^4}$

d) $F(x) = \dfrac{x - 1}{x^2} - 3$ $\quad f(x) = \dfrac{-x + 2}{x^3}$

e) $F(x) = \ln \sqrt{x^2 + 2x}$ $\quad f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x}$

f) $F(x) = 5e^{-x^2} + 11$ $\quad f(x) = -10xe^{-x^2}$

g) $F(x) = arc\ tg \sqrt{x}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$

h) $F(x) = cos^2 x - 1.492$ $\quad f(x) = -sen\ 2x$

a) $F(x) = 3x^5 - 2x + 1 \rightarrow F'(x) = 15x^4 - 2 \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

b) $F(x) = (x^5 - 2)^3 \rightarrow F'(x) = 15x^4(x^5 - 2) \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

c) $F(x) = \dfrac{2 - x}{x^3} + 7 \rightarrow F'(x) = \dfrac{2x - 6}{x^4} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

d) $F(x) = \dfrac{x - 1}{x^2} - 3 \rightarrow F'(x) = \dfrac{-x + 2}{x^3} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

e) $F(x) = \ln\sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow F'(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

f) $F(x) = 5e^{-x^2} + 11 \rightarrow F'(x) = -10xe^{-x^2} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

g) $F(x) = arc\,tg \sqrt{x} \rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)} \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

h) $F(x) = cos^2 x - 1.492 \rightarrow F'(x) = -2\ sen\,x \cos x = -sen\ 2x \rightarrow F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$.

18.-

Contesta a estas preguntas.

a) ¿Por qué una primitiva de una función polinómica $f(x)$ es otra función polinómica $F(x)$?

b) Si $f(x)$ es de grado $n$, ¿cuál es el grado de $F(x)$?

a) Porque la derivada de un una función polinómica siempre es otra función polinómica.

b) El grado de $F(x)$ es $n + 1$, considerando que $f(x)$ es un polinomio o que $n$ sea distinto de $-1$.

19.-

Calcula una función primitiva $F(x)$ de cada una de las siguientes funciones que cumpla la condición que se indica.

a) $f(x) = 3x^2$ $\qquad F(0) = 1$

b) $f(x) = \dfrac{4}{5x}$ $\qquad F(1) = 4$

c) $f(x) = sen\ 3x$ $\qquad F(\pi) = -\dfrac{1}{3}$

d) $f(x) = e^{2x}$ $\qquad F(0) = \dfrac{2}{3}$

a) $f(x) = 3x^2 \rightarrow F(x) = x^3 + k$

$F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{4}{5x} \rightarrow F(x) = \dfrac{4}{5}\ln|x| + k$

$F(1) = 4 \rightarrow k = 4 \rightarrow F(x) = \dfrac{4}{5}\ln x + 4$

c) $f(x) = sen\ 3x \rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{3} cos\ 3x + k$

$F(\pi) = -\dfrac{1}{3} \rightarrow \dfrac{1}{3} + k = -\dfrac{1}{3} \rightarrow k = -\dfrac{2}{3} \rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{3}\ cos\ 3x - \dfrac{2}{3}$

d) $f(x) = e^{2x} \rightarrow F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + k$

$F(0) = \dfrac{2}{3} \rightarrow \dfrac{1}{2} + k = \dfrac{2}{3} \rightarrow k = \dfrac{1}{6} \rightarrow F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{1}{6}$

20.-

¿Puede ser una función logarítmica una primitiva de una función racional? ¿Y una función trigonométrica?

La función logarítmica puede ser primitiva de una función racional,

por ejemplo, si $f(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow F(x) = \ln|x|$.

La función trigonométrica no puede ser primitiva de una función racional porque la derivada de una función trigonométrica siempre es otra función trigonométrica.

21.- Resolver las integrales irracionales:

a) $\int 3\sqrt{5x}\,dx = 2\sqrt{5x^3} + k$

b) $\int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x})\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + k$

c) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 9\sqrt[5]{x}\right) dx = 8\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^6} + k$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[3]{2x}\right) dx = 8\ln|x| + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2x^4} + k$

e) $\int (\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x})\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{32}{5}\sqrt[4]{x^5} + k$

f) $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx = 3\sqrt[3]{x^2} - 8\sqrt{x} + k$

22.-

Calcula las siguientes integrales.

**a)** $\int \cos(5x + 1)\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx$

a) $\int \cos(5x - 1)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(5x - 1)}{5} + k$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{(x+2)}} + k$

23.-

Calcular $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$.

*(Castilla y León. Junio 2002. Prueba A. Cuestión 3)*

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = \frac{-1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k$$

24.-

Determina estas integrales de funciones racionales.

a) $\displaystyle\int \frac{4}{x-2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right) dx$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-4}\right) dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+4)^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{7}{x+3}\right) dx$

f) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{(x+3)^3}-\frac{5}{(x-3)^2}\right) dx$

g) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\right) dx$

h) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}\right) dx$

a) $\displaystyle\int \frac{4}{x-2}\,dx = 4\ln|x-2|+k$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right) dx = \ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+k$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-4}\right) dx = 2\ln|x+3|-\ln|x-4|+k$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+4)^2}\,dx = -\frac{1}{x+4}+k$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{7}{x+3}\right) dx = \frac{-1}{x-1}+7\ln|x+3|+k$

f) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{(x+3)^3}-\frac{5}{(x-3)^2}\right) dx = \frac{-1}{(x+3)^2}+\frac{5}{(x-3)}+k$

g) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\right) dx = \operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{x}+k$

h) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}\right) dx = \operatorname{arc\,tg} x+\frac{2}{x}+3\ln|x|+k$

25.-

Sea la función $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}$. Encontrar una función primitiva de $f$.

*(Asturias. Junio 2002. Bloque 4)*

$$\int \frac{6x}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = 3\ln|x^2+1|+k$$

26.-

Calcular $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$.

*(Castilla y León. Septiembre 2002. Prueba A. Cuestión 4)*

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + k$$

27.-

Calcula: $\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx$

*(Andalucía. Año 2007. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 2)*

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + 4\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + 4\,arc\,tg\,x + k$$

28.-

Calcula la primitiva de $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$.

*(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 2. Pregunta A)*

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$$

29.-

Calcular la primitiva que sigue: $\int \frac{2x+A}{x^2+4}\,dx$ en función del valor de $A$.

*(País Vasco. Julio 2004. Bloque D. Cuestión D)*

$$\int \frac{2x+A}{x^2+4}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + A\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \ln\left|x^2+4\right| + 2A\cdot arc\,tg\,\frac{x}{2} + k$$

30.-

Una función $y=f(x)$, con $x>-1$, tiene por derivada: $y' = \frac{a}{1+x}$, donde $a$ es una constante. Determina la función si, además, sabemos que $f(0)=1$ y $f(1)=-1$.

$$f(x) = \int \frac{a}{1+x}\,dx = a\ln|1+x| + k \rightarrow \begin{cases} f(0)=1 \rightarrow a\ln 1 + k = 1 \rightarrow k=1 \\ f(1)=-1 \rightarrow a\ln 2 + 1 = -1 \rightarrow a = \dfrac{-2}{\ln 2} \end{cases}$$

Por tanto la función es $f(x) = \frac{-2}{\ln 2}\ln|1+x| + 1$.

31.-

Calcular la primitiva de la función $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}x$ que se anula en $x = 2$.

*(Extremadura. Septiembre 2002. Repertorio B. Ejercicio 4)*

$$F(x) = \int (x^2+1)^{-1} x\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + k$$

$$f(2) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|1+2^2\right| + k = 0 \rightarrow k = -\frac{\ln 5}{2} = -\ln\sqrt{5}$$

$$\rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| - \ln\sqrt{5}$$

32.-

De la función $f\colon(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ se sabe que $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

a) Determina $f$.

b) Halla la primitiva de $f$ cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

*(Andalucía. Año 2004. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 1)*

a) $$f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = \frac{-3}{x+1} + k$$

$$f(2) = 0 \rightarrow \frac{-3}{3} + k = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow f(x) = \frac{-3}{x+1} + 1$$

b) $$F(x) = \int \left(\frac{-3}{x+1} + 1\right) dx = -3\ln\left|x+1\right| + x + k$$

$$F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = -3\ln\left|x+1\right| + \frac{3}{2}x + 1$$

33.-

Calcular la primitiva de la función $f(x) = (x+1)^2 x^{-\frac{1}{2}}$ que se anule en $x = 1$.

*(Extremadura. Septiembre 2005. Repertorio A. Ejercicio 4)*

$$\int (x+1)^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}}{=} 2\int (t^2+1)^2\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + t\right) + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \sqrt{x} + k$$

$$F(1) = 0 \rightarrow \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 1 + k = 0 \rightarrow k = -\frac{31}{15} \rightarrow F(x) = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \sqrt{x} - \frac{31}{15}$$

34.-

Determina la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ tiene de ecuación $5x - y - 3 = 0$.

*(Andalucía. Año 2001. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 2)*

$$f''(x) = 3$$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 3\,dx = 3x + k_1$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x + k_1)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + k_1x + k_2$$

La recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5x - 3$
$\to$ La pendiente es $m = 5$.

Para $x = 1 \to y = 5 \cdot 1 - 3 = 2 \to$ La función pasa por el punto $(1, 2)$.

$$f'(1) = 5 \to 3 + k_1 = 5 \to k_1 = 2$$

$$f(1) = 2 \to \frac{3}{2} + k_1 + k_2 = 2 \to \frac{3}{2} + 2 + k_2 = 2 \to k_2 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

35.-

Halla una función polinómica de tercer grado $f(x)$ que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

- Su derivada es $f'(x) = x^2 - 3x$.
- El valor del máximo relativo es el doble del mínimo relativo.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^2 - 3x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + k$$

Calculamos su máximo y mínimo relativo.

$$f'(x) = 0 \to \begin{cases} x = 3 \to f(3) = 9 - \dfrac{27}{2} + k = \dfrac{-9}{2} + k \\ x = 0 \to f(0) = k \end{cases}$$

Imponemos la condición.

$$f(0) = 2f(3) \to k = 2\left(\frac{-9}{2} + k\right) \to k = 9$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9$$

36.-

De una función derivable se sabe que pasa por el punto $(-1, -4)$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + k_1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln|x| + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Como pasa por el punto $(-1, -4)$:

$$f(-1) = -4 \rightarrow -2 - \frac{1}{2} + k_1 = -4 \rightarrow k_1 = -\frac{3}{2}$$

Como existe la derivada en $x = 1$, necesariamente la función es continua y derivable en dicho punto.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \rightarrow 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 + k_2 \rightarrow k_2 = 0$$

La función es: $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \ln|x| & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) La recta tangente es: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$f'(2) = \frac{1}{2} \rightarrow y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{x-2}{2} + \ln 2$$

37.-

Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$ indicando los pasos realizados.

*(C. Valenciana. Junio 2003. Ejercicio A. Problema 2)*

$$\int \frac{2}{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{\pi} \int x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{\pi}\left(-x \cos x + \int \cos x \, dx\right) =$$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x$

$$= \frac{2}{\pi}(-x \cos x + \operatorname{sen} x) + k$$

38.-

Calcula estas integrales por partes.

a) $\int x^3 \ln x\, dx$

b) $\int \ln(2x+1)\, dx$

c) $\int e^{-x} \operatorname{sen} 2x\, dx$

d) $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$

e) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

f) $\int x \operatorname{sen} 2x\, dx$

g) $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$

h) $\int (2x+3)e^{2x}\, dx$

i) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

j) $\int (x^2-5)\cos x\, dx$

k) $\int (2x^2+x-2)e^{3x}\, dx$

l) $\int (2+e^{2x})\cos(x+1)\, dx$

a) $$\int x^3 \ln x\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4}\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + k = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + k$$

$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x^3\, dx \to v = \frac{x^4}{4}$

b) $$\int \ln(2x+1)\, dx = x \ln|2x+1| - \int \frac{2x}{2x+1}\, dx = x\ln|2x+1| - \int \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) dx =$$

$u = \ln(2x+1) \to du = \frac{2}{2x+1}\, dx$

$dv = dx \to v = x$

$$= x\ln|2x+1| - x + \frac{\ln|2x+1|}{2} + k = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln|2x+1| - x + k$$

c) $$\int e^{-x}\operatorname{sen} 2x\, dx = -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x\, dx =$$

$u = e^{-x} \to du = -e^{-x}dx$

$dv = \operatorname{sen} 2x\, dx \to v = \frac{-\cos 2x}{2}$

$u = e^{-x} \to du = -e^{-x}dx$

$dv = \cos 2x\, dx \to v = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$

$$= -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-x}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-x}\operatorname{sen} 2x\, dx\right)\int e^{-x}\operatorname{sen} 2x\, dx =$$

$$= -e^{-x}\frac{\cos 2x}{2} - e^{-x}\frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{1}{4}\int e^{-x}\operatorname{sen} 2x\, dx$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\operatorname{sen} 2x\, dx = -e^{-x}\left(\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right)$$

$$\to \int e^{-x}\operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{-e^{-x}}{5}(2\cos 2x + \operatorname{sen} 2x) + k$$

d) $$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\ln |x^2+1|}{2} + k$$

$$u = \operatorname{arc\,tg} x \rightarrow du = \frac{1}{x^2+1} \, dx$$
$$dv = dx \rightarrow v = x$$

e) $$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} \, dx \rightarrow 2 \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \ln^2 x \rightarrow \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + k$$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx$$
$$dv = \frac{1}{x} \, dx \rightarrow v = \ln x$$

f) $$\int x \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{-x \cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$
$$dv = \operatorname{sen} 2x \, dx \rightarrow v = \frac{-\cos 2x}{2}$$

g) $$\int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{-x^2 \cos 2x}{2} + \int x \cos 2x \, dx =$$

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx$$
$$dv = \operatorname{sen} 2x \, dx \rightarrow v = \frac{-\cos 2x}{2}$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$
$$dv = \cos 2x \, dx \rightarrow v = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

$$= \frac{-x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} - \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \, dx = \frac{-x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + k$$

h) $$\int (2x+3) e^{2x} \, dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \int e^{2x} \, dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + k = (x+1)e^{2x} + k$$

$$u = 2x+3 \rightarrow du = 2 \, dx$$
$$dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$$

i) $$\int \frac{x}{e^x} \, dx = \frac{x}{e^x} + \int e^{-x} \, dx = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + k = \frac{x-1}{e^x} + k$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$
$$dv = e^{-x} dx \rightarrow v = -e^{-x}$$

j) $$\int (x^2 - 5) \cos x \, dx = (x^2 - 5) \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$u = x^2 - 5 \rightarrow du = 2x \, dx$$
$$dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x$$

$$= (x^2 - 5) \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = (x^2 - 5) \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + k$$

k) $\displaystyle\int (2x^2+x-2)e^{3x}dx = \frac{(2x^2+x-2)e^{3x}}{3} - \int \frac{(4x+1)e^{3x}}{3}\,dx = \frac{(2x^2+x-2)e^{3x}}{3} -$

$u = 2x^2+x-2 \rightarrow du = (4x+1)\,dx$

$dv = e^{3x}dx \rightarrow v = \dfrac{e^{3x}}{3}$

$u = 4x+1 \rightarrow du = 4\,dx$

$dv = e^{3x}dx \rightarrow v = \dfrac{e^{3x}}{3}$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{(4x+1)e^{3x}}{3} - \int \frac{4e^{3x}}{3}\,dx\right) = \frac{(2x^2+x-2)e^{3x}}{3} - \frac{(4x+1)e^{3x}}{9} + \frac{4}{27}e^{3x} + k$$

l) $\displaystyle\int (2+e^{2x})\cos(x+1)\,dx = \int 2\cos(x+1)\,dx + \int e^{2x}\cos(x+1)\,dx =$

$$= 2sen(x+1) + e^{2x}sen(x+1) - \int 2e^{2x}sen(x+1)\,dx =$$

$u = e^{2x} \rightarrow du = 2e^{2x}dx$

$dv = sen\,(x+1)\,dx \rightarrow v = -\cos\,(x+1)$

$$= 2\,sen\,(x+1) + e^{2x}sen\,(x+1) + 2e^{2x}\cos\,(x+1) - 2\int 2e^{2x}\cos\,(x+1) =$$

$$= 2\,sen\,(x+1) + \frac{e^{2x}sen\,(x+1) + 2e^{2x}\cos\,(x+1)}{5} + k$$

39.-

Aplicar el método de integración por partes para calcular las siguientes primitivas.

a) $I = \displaystyle\int x\,e^{2x}\,dx$ b) $J = \displaystyle\int x\ln x\,dx$

*(País Vasco. Junio 2004. Bloque D. Cuestión D)*

a) $\displaystyle\int x\,e^{2x}dx = \frac{x\,e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + k$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^{2x}dx \rightarrow v = \dfrac{e^{2x}}{2}$

b) $\displaystyle\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4} + k$

$u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx$

$dv = x\,dx \rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$

40.-

Utilizando el método de integración por partes, calcule $I = \int \ln x \; dx$.

*(Murcia. Septiembre 2002. Bloque 4. Cuestión 1)*

$$I = \underbrace{\int \ln x \; dx = x \ln x - \int dx}_{\substack{u = \ln x \to du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = dx \to v = x}} = x \ln x - x + k$$

41.-

Calcula $\int (x^2 - 1)e^{-x} \, dx$.

*(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)*

$$\underbrace{\int (x^2-1)e^{x}dx = -(x^2-1)e^{-x}}_{\substack{u = x^2 - 1 \to du = 2x\, dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x}}} + \underbrace{\int 2x\, e^{-x}dx = -(x^2-1)e^{-x} - 2x\, e^{-x}}_{\substack{u = 2x \to du = 2\, dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x}}} + \int 2\, e^{-x}dx =$$

$$= -(x^2-1)e^{-x} - 2x\, e^{-x} - 2e^{-x} + k = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x} + k$$

42.-

Calcular la primitiva siguiente: $\int \ln(25 + x^2) \, dx$

*(Canarias. Junio 2003. Opción A. Cuestión 2)*

$$\underbrace{\int \ln(25+x^2)\, dx = x \ln(25+x^2) -}_{\substack{u = \ln(25+x^2) \to du = \frac{2x}{25+x^2}\, dx \\ dv = dx \to v = x}} \int \frac{2x^2}{25+x^2}\, dx =$$

$$= x \ln(25+x^2) - \int \left(2 - \frac{50}{25+x^2}\right) dx = x \ln(25+x^2) - \int 2\, dx + \int \frac{50}{25+x^2}\, dx =$$

$$= x \ln(25+x^2) - 2x + 10 \, arc\, tg \frac{x}{5} + k$$

43.-

Halla una función primitiva de:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

que pase por el punto $P(e, 2)$.

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) dx = \ln|x| - x \ln|x| + x + k$$

$$F(e) = 2 \to 1 - e + e + k = 2 \to k = 1 \to F(x) = \ln|x| - x \ln|x| + x + 1$$

44.-

En cada uno de los siguientes casos, obtén una función $f(x)$ que cumpla las condiciones que se señalan:

a) $f'(x) = x^2 \text{ sen } x,\ f(0) = -1$ b) $f'(x) = x \ln x,\ f(1) = \dfrac{1}{2}$

$$\text{a)}\ \underbrace{\int x^2 \text{sen}\, x\, dx}_{\substack{u = x^2 \to du = 2x\, dx \\ dv = \text{sen}\, x\, dx \to v = -\cos x}} = -x^2 \cos x + 2\underbrace{\int x \cos x\, dx}_{\substack{u = x \to du = dx \\ \cos x\, dv = dx \to v = \text{sen}\, x}} = -x^2 \cos x + 2x\, \text{sen}\, x + 2\cos x + k =$$

$$= (2 - x^2)\cos x + 2x\, \text{sen}\, x + k$$

$$f(0) = -1 \to 2 + k = -1 \to k = -3 \to f(x) = (1 - x^2)\cos x + x\, \text{sen}\, x - 3$$

$$\text{b)}\ \underbrace{\int x \ln x\, dx}_{\substack{u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x\, dx \to v = \frac{x^2}{2}}} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + k$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \to -\frac{1}{4} + k = \frac{1}{2} \to k = \frac{3}{4} \to f(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$$

45.-

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f'(x) = x^2 \text{ sen } 2x$. Calcula la primitiva de $f$ cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

*(Andalucía. Año 2005. Modelo 5. Opción B. Cuestión 2)*

$$\underbrace{\int x^2 \text{sen}\, 2x\, dx}_{\substack{u = x^2 \to du = 2x\, dx \\ dv = \text{sen}\, 2x\, dx \to v = -\frac{\cos 2x}{2}}} = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \underbrace{\int x \cos 2x\, dx}_{\substack{u = x \to du = dx \\ dv = \cos 2x\, dx \to v = \frac{\text{sen}\, 2x}{2}}} = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x\, \text{sen}\, 2x}{2} - \int \frac{\text{sen}\, 2x}{2} dx =$$

$$= -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x\, \text{sen}\, 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} = \frac{(1 - 2x^2)\cos 2x}{4} + \frac{x\, \text{sen}\, 2x}{2} + k$$

$$f(0) = 1 \to \frac{1}{4} + k = 1 \to k = \frac{3}{4} \to f(x) = \frac{(1 - 2x^2)\cos 2x}{4} + \frac{x\, \text{sen}\, 2x}{2} + \frac{3}{4}$$

46.-

Halla la expresión de la familia de funciones tales que la pendiente de las rectas tangentes a sus gráficas en cualquier punto viene dada por $m = (2x+3)e^{2x}$. Determina, entre todas ellas, la que pasa por el punto (0, 1).

La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada de la función.

$$F(x) = \int (2x+3)e^{2x}dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \int e^{2x}dx = \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + k =$$

$$u = 2x+3 \rightarrow du = 2\,dx$$

$$dv = e^{2x}\,dx \rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$= \frac{(2x+3)e^{2x}}{2} + k = (x+1)e^{2x} + k$$

$F(0) = 1 \rightarrow 1 + k = 1 \rightarrow k = 0 \rightarrow$ La función pedida es $F(x) = (x+1)e^{2x}$.

47.-

Calcular $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx$.

*(Canarias. Junio 2006. Opción B. Cuestión 1)*

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \int\left(x + 1 + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-2| - \ln|x-1| + k$$

48.-

Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx$ .

*(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 2. Pregunta A)*

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx = \int\left(x + \frac{1-4x}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \int\left(x + \frac{1}{x^2+4} - \frac{4x}{x^2+4}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} arc\,tg\,\frac{x}{2} - 2\ln|x^2+4| + k$$

49.-

Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$

y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Calcular la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple $H(1) = 1$.

*(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 3. Problema 1)*

$$H(x) = \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}\,dx = \int \left(2x + 1 + \frac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}\right) dx =$$
$$= x^2 + x + \ln\left|6x^2 - 7x + 2\right| + k$$

50.-

Calcula $I = \int \frac{2}{2 - e^x}\,dx$ haciendo el cambio de variable $t = e^x$.

*(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 2)*

$$I = \int \frac{2}{2 - e^x}\,dx \underset{\substack{t = e^x \\ dt = e^x dx}}{=} \int \frac{2}{2 - t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \left(\frac{1}{2 - t} + \frac{1}{t}\right) dt =$$
$$= \ln|2 - t| + \ln|t| + k = \ln\left|2 - e^x\right| + x + k$$

51.-

Sea la integral $\int e^{2x}\, sen\, e^x\, dx$ .

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$.

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

*(Aragón. Junio 2002. Opción B. Cuestión 3)*

a) $$\int e^{2x} sen\, e^x dx \underset{\substack{t = e^x \\ dt = e^x dx}}{=} \int \frac{t^2 sen\, t}{t}\,dt = \int t\, sen\, t\, dt \underset{\substack{u = t \to du = dt \\ dv = sen t\ dt \to v = -cos\, t}}{=} -t\, cos\, t + \int cos\, t\, dt =$$
$$= -t\, cos\, t + sen\, t + k = -e^x cos\, e^x + sen\, e^x + k$$

b) $f(0) = 0 \to -cos\, 1 + sen\, 1 + k = 0 \to k = cos\, 1 - sen\, 1$
$$\to f(x) = -e^x cos\, e^x - sen\, e^x + cos\, 1 + sen\, 1$$

52.-

Sea ln *x* el logaritmo neperiano de x *y* sea $f: D \to \mathbb{R}$ la función definida por

$f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ . Usa el cambio de variable $t = \ln x$ para calcular una primitiva de *f*.

*(Andalucía. Año 2002. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 1)*

$$F(x) = \int \frac{1}{x\,(\ln x)^2}\,dx \underset{\substack{t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx}}{=} \int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{-1}{t} + k = \frac{-1}{\ln x} + k$$

53.-

Considera la integral $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^3}\,dx$ .

a) Calcularla realizando el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$.

b) Calcula la misma integral pero haciendo el cambio de variable $tg\, x = t$.

c) ¿Se obtiene el mismo resultado? Justifica la respuesta.

*(La Rioja. Junio 2000. Propuesta A. Ejercicio 6)*

a) $$\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^3}\,dx \underset{\substack{t=\operatorname{sen} x \\ dt=\cos x\,dx}}{=} \int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{-1}{2t^2} + k = \frac{-1}{2\,(\operatorname{sen} x)^2} + k$$

b) $$\int \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x)^3}\,dx \underset{\substack{t=tg\,x \\ dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx}}{=} \int \frac{1}{tg\,x\ \operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{-1}{2t^2} + k = \frac{-1}{2\,(tg\,x)^2} + k$$

c) $$\frac{-1}{2\,(tg\,x)^2} + k = \frac{-\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^2 x} + k = \frac{\operatorname{sen}^2 x - 1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k = \frac{-1}{2\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} + k = \frac{-1}{2\operatorname{sen}^2 x} + k'$$

Los resultados solo difieren en una constante por lo que obtenemos la misma integral.

54.-

Halla, realizando un cambio de variable, las siguientes integrales.

a) $\int \cos x \ sen^3 x \ dx$

b) $\int x \ln(1+x^2) \ dx$

c) $\int \frac{\ln 2x}{x} dx$

d) $\int 2x \ sen x^2 \ dx$

e) $\int x\sqrt{x+1} \ dx$

f) $\int \frac{2x}{x^2-1} dx$

g) $\int \cos^2 x \ sen x \ dx$

h) $\int sen x \ e^{\cos x} \ dx$

i) $\int \cos^2 x \ sen^3 x \ dx$

j) $\int \frac{sen^3 x}{\cos x} dx$

k) $\int (x^2+1)e^{x^3+3x} \ dx$

l) $\int \cos^5 x \ sen^3 x \ dx$

a) $$\int \cos x \, sen^3 x \, dx = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + k = \frac{sen^4 x}{4} + k$$

$t = sen x$

$dt = \cos x \, dx$

b) $$\int x \ln(1+x^2) \, dx = \frac{1}{2}\int \ln t \, dt = \frac{1}{2}(t \ln t - t) + k =$$

$t = 1 + x^2$

$dt = 2x \, dx$

$$= \frac{1}{2}\left((1+x^2)\ln(1+x^2) - (1+x^2)\right) + k$$

c) $$\int \frac{\ln 2x}{x} dx = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + k = \frac{\ln^2(2x)}{2} + k$$

$t = \ln 2x$

$dt = \frac{1}{x} dx$

d) $$\int 2x \, sen x^2 \, dx = \int sen t \, dt = -\cos t + k = -\cos x^2 + k$$

$t = x^2$

$dt = 2x \, dx$

e) $$\int x\sqrt{x+1} \, dx = \int 2(t^2-1)t^2 \, dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + k =$$

$t = \sqrt{x+1} \rightarrow t^2 - 1 = x$

$2t \, dt = dx$

$$= \sqrt{x+1}\left(\frac{2(x+1)^2}{5} - \frac{2(x+1)}{3}\right) + k$$

f) $$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx \underset{\substack{t=x^2-1\\ dt=2x\,dx}}{=} \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + k = \ln|x^2-1| + k$$

g) $$\int \cos^2 x\, \text{sen}\, x\, dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\text{sen}\, x\, dx}}{=} \int -t^2\,dt = \frac{-t^3}{3} + k = \frac{-\cos^3 x}{3} + k$$

h) $$\int \text{sen}\, x\, e^{\cos x}\,dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\text{sen}\, x\, dx}}{=} \int -e^t\,dt = -e^t + k = -e^{\cos x} + k$$

i) $$\int \cos^2 x\, \text{sen}^3 x\, dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\text{sen}\, x\, dx}}{=} \int -t^2(1-t^2)\,dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + k = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + k$$

j) $$\int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos x}\,dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\text{sen}\, x\, dx}}{=} \int \frac{t^2-1}{t}\,dt = \frac{t^2}{2} - \ln|t| + k = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + k$$

k) $$\int (x^2+1)\, e^{x^3+3x}\,dx \underset{\substack{t=x^3+3x\\ dt=(3x^2+3)\,dx}}{=} \int \frac{e^t}{3}\,dt = \frac{e^t}{3} + k = \frac{e^{x^3+3x}}{3} + k$$

l) $$\int \cos^5 x\, \text{sen}^3 x\, dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\text{sen}\, x\, dx}}{=} \int t^5(t^2-1)\,dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + k = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + k$$

55.-

$$\int e^x\sqrt{(e^x+1)^3}\,dx \underset{\substack{t=e^x+1\\ dt=e^x\,dx}}{=} \int \sqrt{t^3}\,dt = \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + k = \frac{2}{5}\sqrt{(e^x+1)^5} + k$$

56.- Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Indicación: Puede ayudarte realizar un cambio de variable adecuado.

*(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 2. Pregunta A)*

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx}}{=} \int \frac{4t}{1+t}\,dt = \int\left(4 - \frac{4}{1+t}\right)dt = 4t - 4\ln|1+t| + k = 4\sqrt{x} - 4\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + k$$

57.-

Resolver la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}}$$

(Canarias. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 2)

$$\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{2t}{t^2+t}\,dt = \int \frac{2}{t+1}\,dt =$$

$$t=\sqrt{x+1}$$

$$dt=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$= 2\ln|t+1| + k = 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + k$$

58.-

$$\int (\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos^2 x)\,dx = \int \cos^2 x\,dx - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{-\cos^3 t}{3} + k$$

59.-

$$\int \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int (\cos^2 x + \cos x \operatorname{sen} x)\,dx =$$

$$= \int \cos^2 x\,dx + \int \cos x \operatorname{sen} x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx + \int \cos x \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + k$$

60.-

Calcular las siguientes integrales.

a) $\int (2x-1)\ln x\,dx$ b) $\int \frac{1-x}{1+4x^2}\,dx$

(Canarias. Septiembre 2008. Bloque 2. Opción B)

a) $\int (2x-1)\ln x\,dx = (x^2-x)\ln x - \int (x-1)\,dx = (x^2-x)\ln x - \frac{x^2}{2} + x + k$

b) $\int \frac{1-x}{1+4x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{1+(2x)^2} - \frac{x}{1+4x^2}\right)dx = \frac{\operatorname{arc\,tg} 2x}{2} - \frac{\ln|1+4x^2|}{8} + k$