Opción A

1.- a) **[1 punto]** Se sabe que $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{2}{ax}\right)$ es finito. Determina el valor de a.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{\operatorname{sen}(2x)}$

2.- Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2 - 3)}$ (donde *ln* indica logaritmo neperiano)

a) **[0,5 puntos]** Halla su dominio de definición.
b) **[2 puntos]** Calcula sus asíntotas y sitúa al gráfica de la función respecto de las mismas.

3.- **[2,5 puntos]** Sea una función f: [a, b] $\to$ R continua y c y d$\in$(a, b) dos puntos que verifican f(c) = -10 y f(d) = 10, demuestra que existe un punto e$\in$(c, d) para el que g(e) = 10 siendo g la función g(x) = f(x) + 11.

4.- **[2,5 puntos]** Determina si la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ está acotada y alcanza sus valores máximos y mínimo en los intervalos (0,3) y [-1,1]. Enuncia los teoremas que hayas utilizado

Opción B

1.- Sea la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$

a) **[0,5 puntos]** Halla su dominio de definición.
b) **[2 puntos]** Calcula sus asíntotas y sitúa al gráfica de la función respecto de las mismas.

2.- **[2,5 puntos]** Averigua, razonadamente, si es continua en x = 0 la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{2x - \operatorname{tg}(x)}$, caso de que no lo sea, indica el tipo de discontinuidad existente.

3.- a) **[1,5 puntos]** Halla el valor de a para que la función f: R $\to$ R tal que $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x^3 - 2x^2 + ax + 4}$ presente una discontinuidad evitable en x = 2, y redefine f para que sea una función continua.

b) **[1 punto]** Prueba que la función $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$ presenta una discontinuidad evitable en el punto x = 0 y halla el valor de f en dicho punto.

4.- Sea la función f(x) = cos(x)-sen(x) definida en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

a) **[1 punto]** Prueba que f es estrictamente decreciente en ese intervalo.
b) **[1 punto]** Prueba que la ecuación anterior posee una única solución en el intervalo.
c) **[0,5 puntos]** Encuentra la solución anterior con un error menor que una centésima.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Opción A

1.- a) [1 punto] Se sabe que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{2}{ax}\right)$ es finito. Determina el valor de a.

b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\operatorname{sen}(2x)}$

Resolución:

a) Para que exista dicho límite ha de ser una indeterminación del tipo ($\infty-\infty$), cosa que es cierta, ya que es una constante dividida por un polinomio de grado 1 y e^x-1 es equivalente en cero a x. La indeterminación se resuelve reduciendo a común denominador:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{2}{ax}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{ax}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a-2}{ax}\right)$$

Este límite será finito si da lugar a una indeterminación $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, luego:

$a-2=0 \Rightarrow a=2$.

b) El límite vale $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\operatorname{sen}(2x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{(2x)^2/2}}{\operatorname{sen}(2x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2x^2}}{\operatorname{sen}(2x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2}|x|}{\operatorname{sen}(2x)}=$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}|x|}{\operatorname{sen}(2x)}\cdot\frac{2x}{2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)}\right)\cdot\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{|x|}{x}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}.1.1=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

2.- Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x^2-3)}$ (donde *ln* indica logaritmo neperiano)

a) [0,5 puntos] Halla su dominio de definición.

b) [2 puntos] Calcula sus asíntotas y sitúa al gráfica de la función respecto de las mismas.

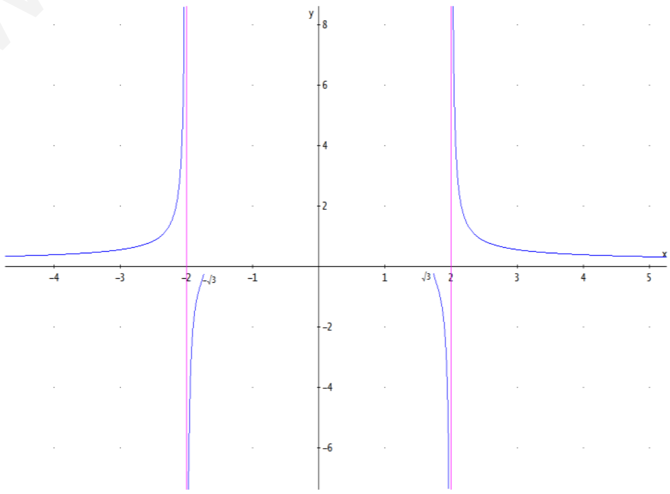
Resolución:

a) La función f(x) es un cociente de funciones donde el numerador es una constante, luego basta considerar el dominio del cociente, $\ln(x^2-3)$, que está definida para los valores

$x^2-3>0 \Rightarrow x^2>3 \Rightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$,

La función tampoco está definido cuando $x^2-3=1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$, ya que no existe ln(1). Por lo tanto su dominio es:

$(-\infty,-2)\cup(-2,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)\cup(2,+\infty)$



(b) Asíntotas.

- **Asíntotas verticales**: son rectas con ecuación x = a, tales que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$. Los valores son aquellos en que no está definida $x=\pm 2$.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{\ln(x^2-3)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{\ln(x^2-3)} = -\infty$$

Asíntota x = -2 y la función toma valores positivos a la izquierda y negativos a la derecha.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\ln(x^2-3)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\ln(x^2-3)} = +\infty$$

Asíntota x = 2 y la función toma valores negativos a la izquierda y positivos a la derecha.

- **Asíntotas horizontales**: son rectas con ecuación y = b tales que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$. Son:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln(x^2-3)} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\ln(x^2-3)} = 0$$

Para situar la asíntota respecto de la gráfica calculamos el signo de f(x)-b:

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{\ln(x^2-3)} - 0 \right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\ln(x^2-3)} = 0^+$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{\ln(x^2-3)} - 0 \right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln(x^2-3)} = 0^+$$

La gráfica se acerca por encima de la asíntota a izquierda y derecha.

- **Asíntotas oblicuas**: No existen puesto que los siguientes límites son nulos:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/\ln(x^2-3)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x.\ln(x^2-3)} = 0$$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1/\ln(x^2-3)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x.\ln(x^2-3)} = 0$$

3.- [2,5 puntos] Sea una función f: [a, b] $\to$ R continua y c y d$\in$(a, b) dos puntos que verifican f(c) = -10 y f(d) = 10, demuestra que existe un punto e$\in$(c, d) para el que g(e) = 10 siendo g la función g(x) = f(x) + 11.

Solución:

Consideramos la función g: [a, b] $\to$ **R**, tal que g(x) = f(x)+ 11 que es continua en [c, d] $\subset$ [a, b] ya que es suma de dos funciones continuas. Como:

g(c) = f(c) + 11 = -10 +11 = 1

g(d) = f(d) + 11 = 10 +6 =16

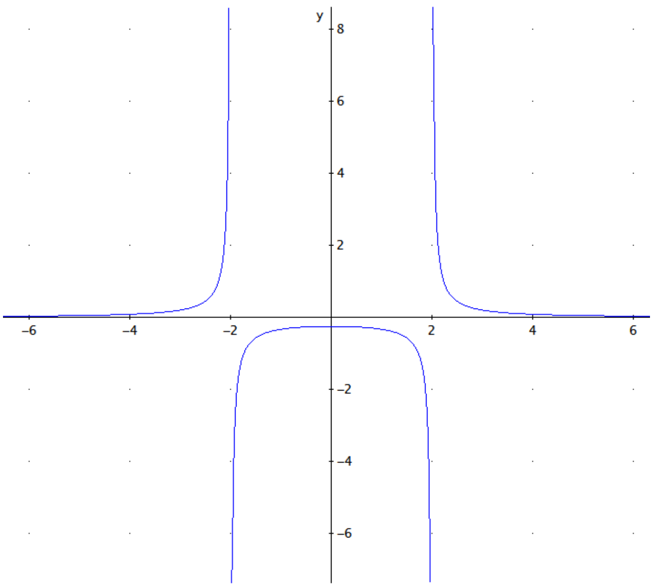
Aplicando el teorema de los valores intermedios o de Darboux a la función g, para cualquier k tal que g(c) $\le$ K $\le$ g(d) existirá un valor e$\in$(c, d) tal que:

g(c) $\le$ 10 $\le$ g(d) $\Rightarrow$ g(e) = 10

como queríamos demostrar.

4.- [2,5 puntos] Determina si la función f(x) = $\frac{1}{x^2-4}$ está acotada y alcanza sus valores máximos y mínimo en los intervalos (0,3) y [-1,1]. Enuncia los teoremas que hayas utilizado

Resolución:



No está acotada en el intervalo (0, 3) ya que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$ por lo tanto no tiene máximo ni mínimo en dicho intervalo.

Si está acotada en el intervalo [-1, 1] ya que es un cociente de funciones continuas, no anulándose la función denominador en el intervalo cerrado tal como enuncia el Teorema de Weiertrass. Tiene un máximo de valor -1/4 que alcanza en el punto x = 0 y dos mínimos de valor -1/6 que se alcanzan en los puntos x = -1 y x = 1.

Opción B

Ejercicio 1. Sea la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$

(a) [0,5 puntos] Halla su dominio de definición.

(b) [2 puntos] Calcula sus asíntotas y sitúa al gráfica de la función respecto de las mismas.

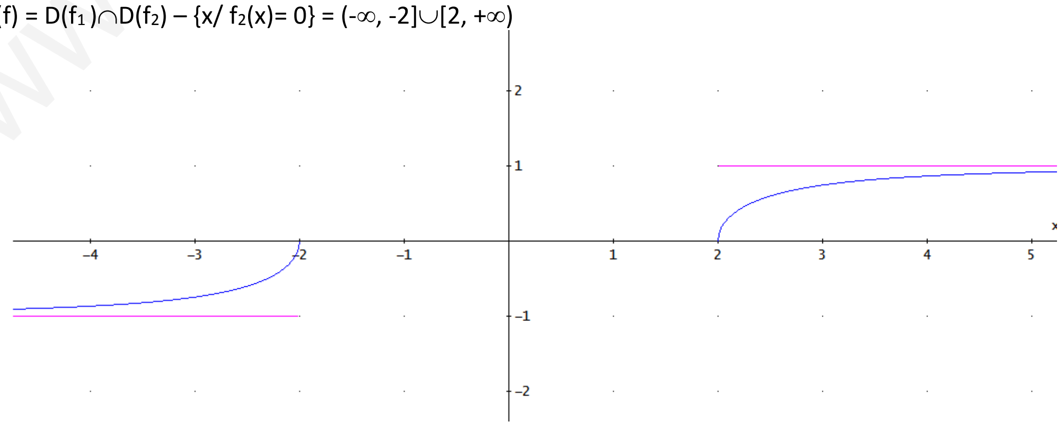
Resolución:

a) El dominio de definición de la función que está formado por la intersección de los dominios de ambos factores salvo los valores que anulan el denominador. Al ser el denominador un radical hallamos los valores que hagan que el radicando sea positivo o cero:

$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow D(f_1) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$D(f_2) = \mathbb{R}$

$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) - \{x / f_2(x) = 0\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$



b) Asíntotas:

- **Asíntotas verticales**: son rectas con ecuación x = a, tales que $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. El posible valor es aquel en que se anula el denominador x = 0. Pero $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ no existen ya que dicho punto no pertenece al dominio de definición.

- **Asíntotas horizontales**: son las rectas con ecuación y = b tales que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$. Vamos a hallarlas en ambos lados:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{\substack{u\to\infty\\u=-x}}\frac{\sqrt{u^2-4}}{-u}=\lim_{\substack{u\to\infty\\u=-x}}\frac{u}{-u}=-1$$

Por lo tanto las asíntotas horizontales son y = 1 a la derecha e y = -1 a la izquierda. Para situarlas respecto de la gráfica hallamos el signo de f(x)-b:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4}-x).(\sqrt{x^2-4}+x)}{x.(\sqrt{x^2-4}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{x.(\sqrt{x^2-4}+x)}=0^-$$

La gráfica se acerca por debajo de la asíntota a la derecha.

Veamos el signo de f(x)-b hacia la izquierda

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+1\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}+x}{x}=\lim_{\substack{u\to\infty\\u=-x}}\frac{\sqrt{u^2-4}-u}{-u}=\lim_{u\to\infty}\frac{(\sqrt{u^2-4}-u).(\sqrt{u^2-4}+u)}{-u(\sqrt{u^2-1}+u)}=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\frac{4}{u(\sqrt{u^2-1}+u)}=0^+$$

La gráfica se acerca por encima de la asíntota a la izquierda.

- Asíntotas oblicuas: no hay ya que:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}/x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}=0$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}/x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}=0$$

2.- [2,5 puntos] Averigua, razonadamente, si es continua en x = 0 la función f(x) = $\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{2x-tg(x)}$, caso de que no lo sea, indica el tipo de discontinuidad existente.

Resolución:

La función es continua en el intervalo por ser un cociente de funciones continuas, el numerador es diferencia de polinomio y seno y el denominador es raíz de la diferencia de una constante y coseno. En x_0 = 0, donde se anula el denominador, puede presentar una discontinuidad hallaremos sus límites laterales para ver si la discontinuidad es evitable:

- $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{2x-tg(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$

Indeterminación que resolvemos recordando que x~tg(x) y 1-cos(x)~x^2/2 para x $\to$ 0 (infinitésimos equivalentes):

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2/2}}{2x-x}=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{\sqrt{2}.x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{|x|}{x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2x-sen(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)$

Indeterminación que resolvemos recordando que x~tg(x) y 1-cos(x)~ x^2/2:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2/2}}{2x-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{\sqrt{2}.x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{|x|}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en x= 0 ya que no coinciden los límites laterales en dicho punto.

3.- a) [1,5 puntos] Halla el valor de a para que la función f: R $\rightarrow$ R tal que f(x) = $\dfrac{2x-4}{x^3-2x^2+ax+4}$ presente una discontinuidad evitable en x = 2, y redefine f para que sea una función continua.

b) [1 punto] Prueba que la función g(x) = $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}$ presenta una discontinuidad evitable en el punto x = 0 y halla el valor de f en dicho punto.

Resolución:

a) Para que sea continua en x = 2 debemos redefinirla de modo que:

$$f(2) = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{x^3-2x^2+ax+4}$$

dicho límite es una indeterminación $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ que resolvemos factorizando el numerador de la fracción aplicando la regla de Ruffini y sabiendo que una de las raíces es 2:

	1	-2	a	4
2		2	0	2a
	1	0	a	4+2a

Como el resto ha de anularse:

$4+2a = 0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$

Quedando:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{x^3-2x^2-2x+4} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{x^2-2} = \frac{2}{2} = 1$$

Luego redefinimos f de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

b) Tomando factor común e^{-x} en el numerador obtenemos que $e^x-e^{-x} = e^{-x}(e^{2x}-1)$ y teniendo en cuenta que si e^x-1 y x son infinitésimos equivalentes en x = 0 también lo son $e^{2x}-1$ y 2x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{2x} = \lim_{x\to 0}e^{-x}\cdot\lim_{\substack{u\to 0\\ u=2x}}\frac{e^u-1}{u} = 1.1 = 1$$

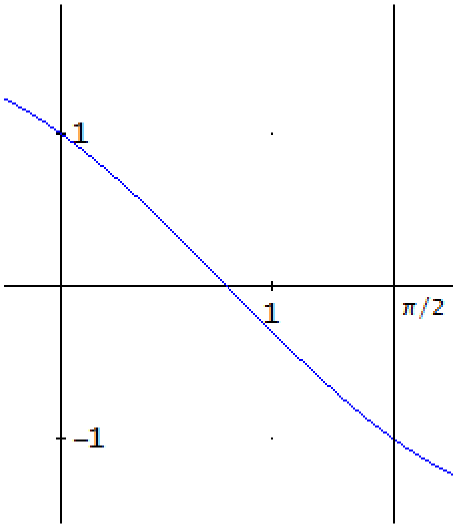
Que al ser finito permite sustituir f(0) por su límite para $x\to 0$ y redefinir la función como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4.- Sea la función f(x) = cos(x)-sen(x) definida en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$:

a) [1 punto] Prueba que f es estrictamente decreciente en ese intervalo.
b) [1 punto] Prueba que la ecuación anterior posee una única solución en el intervalo.
c) [0,5 puntos] Encuentra la solución anterior con un error menor que una centésima.

Resolución:



a) La función f es estrictamente creciente en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ya que:

$x_1 < x_2 \Rightarrow$ cos(x_2)-cos(x_1) <0 por ser decreciente cos(x) en dicho intervalo.
$x_1 < x_2 \Rightarrow$ -sen(x_2)+sen(x_1)< 0 por ser creciente sen(x) en dicho intervalo.
siendo la suma de funciones decrecientes una función decreciente tal como se ve en la figura.

b) Para probar que la ecuación f(x) = 0 posee una única solución en el intervalo utilizamos el Teorema de Bolzano ya que como ambas funciones son continuas en el intervalo, su diferencia lo es cumpliéndose en los extremos que:
cos(0)-sen(0) = 1-0 = 1 > 0
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = 0-1 = -1 < 0
Por lo tanto $f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

Aplicando el Teorema existe una solución de la ecuación $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dicha solución es única, ya que si existiera otra solución en dicho intervalo, d, la función habría de ser creciente en algún subintervalo de intervalo (c, d) lo que contradeciría que la función es estrictamente decreciente como hallamos en el apartado anterior.

c) Para encontrar la solución anterior con un error menor que una centésima bastaría, utilizando la calculadora determinar puntos en el interior del intervalo. Serían [0,78; 0,79]:
f(0,78) = cos(0,78)-sen(0,78) = 0,7109-0,7033 = 0,0076
f(0,79) = cos(0,79)-sen(0,79) = 0,7038-0,7104 = -0.0066