Opción A

1.- Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

a) **[1,5 puntos]** Determina la matriz X para la que $A^tXB^{-1} = C$, (A^t la matriz traspuesta de A).
b) **[1 punto]** Calcula el determinante de $B^{-1}(C^tC)B$, (C^t la matriz traspuesta de C).

2.- Considera las siguientes matrices de orden 2:

A = $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Determina dos matrices M y N de orden 2 tales que:

$$\begin{cases} AM + BN = D \\ AM \qquad\;\; = N \end{cases}$$

b) [1 punto] Sea una matriz G de orden 3, G = [C_1, C_2, C_3] donde C_1, C_2, C_3 representan sus columnas y su determinante vale 2. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz H = [C_3, C_3+C_2, $3C_1$]?

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x \quad + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

a**) [1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores de λ.
b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

4.- **[2,5 puntos]** Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Esas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 euros, respectivamente. Compramos en total 20 latas, que pesan un total de 10 kg y nos cuestan 35,6 euros. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado.

Opción B

1.- Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$

a) **[1,5 puntos]** Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.
b) **[1 punto]** Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

2.- Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
a) [0,5 puntos] El determinante de A^3.
b) [0,5 puntos] El determinante de A^{-1}.
c) [0,5 puntos] El determinante de 2A.
d) [1 punto] El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2.

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} 2x + y + (\alpha - 1)z = \alpha - 1 \\ x - \alpha y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 2\alpha - 2 \end{cases}$$

[1 punto] Resuelve el sistema para $\alpha = 1$.
[1,5 puntos] Determina, si existe, el valor de α para el que (x, y, z) = (1,-3, α) es la única solución del sistema dado.

4.- **[2,5 puntos]** En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una moneda.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Opción A

1.- Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Determina la matriz X para la que $A^tXB^{-1} = C$, (A^t la matriz traspuesta de A).
b) [1 punto] Calcula el determinante de $B^{-1}(C^tC)B$, (C^t la matriz traspuesta de C).

Solución:

a) Para determinar la matriz pedida debemos resolver la ecuación matricial:
$A^tXB^{-1} = C \Rightarrow (A^t)^{-1}.A^tXB^{-1}.B = (A^t)^{-1}.C.B \Rightarrow X = (A^t)^{-1}.C.B$

Por lo tanto deben existir las matrices inversa de A = $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y B. Como son matrices cuadradas basta que sus determinantes sean no nulos:

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3 \neq 0$

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+0)-(0+0+0) = 1 \neq 0$

Hallemos $(A^t)^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t)$

Como $\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ obtenemos:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$X = (A^t)^{-1}.C.B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & 10 & 0 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

b) Para calcular el determinante de $B^{-1}(C^tC)B$ utilizamos las propiedades de éstos, en especial que:

- el determinante de un producto es el producto de los determinantes
- el determinante de la matriz inversa es igual al cociente entre la unidad y el determinante de la matriz dada.

$|B^{-1}(C^tC)B| = \frac{1}{|B|}|C^tC||B| = |C^tC| = \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

ya que todos los términos de la tercera fila son ceros.

2.- Considera las siguientes matrices de orden 2:

A = $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Determina dos matrices M y N de orden 2 tales que:

$$\begin{cases} AM + BN = D \\ AM \quad\;\; = N \end{cases}$$

b) [1 punto] Sea una matriz G de orden 3, G = [C_1, C_2, C_3] donde C_1, C_2, C_3 representan sus columnas y su determinante vale 2. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz H = [C_3, C_3+C_2, $3C_1$]?

Solución:

a) Despejando el sistema de ecuaciones matriciales obtenemos:

$\begin{cases} AM + BN = D \\ AM \quad\;\; = N \end{cases} \Rightarrow N+BN = D \Rightarrow (I+B).N = D \Rightarrow N = (I+B)^{-1}.D$

La matriz E = I+B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa, teniendo en cuenta que $|E| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+2 = 4$ y $\text{Adj}(E^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ obtenemos:

$E^{-1} = \frac{1}{|E|}\text{Adj}(E^t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Siendo la matriz N = $(I+B)^{-1}.D = E^{-1}.D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Para calcular M despejamos en la 2ª ecuación;

$A.M = N \Rightarrow M = A^{-1}.N$

Hallamos la inversa de A, teniendo en cuenta que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1-8 = -9$ y $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ obtenemos:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^t) = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Siendo la matriz $M = A^{-1}.N = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

b) El determinante de la matriz H es:

$|H| = |C_3, C_3+C_2, 3C_1| = |C_3, C_3, 3C_1| + |C_3, C_2, 3C_1|$

Como los elementos de la 2ª columna se descomponen en sumandos, su determinante es igual a la suma de 2 determinantes que tiene todas las demás columnas iguales y uno de sumandos de la 2ª columna.

$|H| = |C_3, C_3+C_2, 3C_1| = 0 + |C_3, C_2, 3C_1|$

Si dos filas o columnas de la matriz son iguales el determinante vale 0.

$|H| = -|3C_1, C_2, C_3|$

Si permutamos dos filas o columnas de una matriz cambia el signo del determinante.

$|H| = -3|C_1, C_2, C_3| = -3|G| = -3.2 = -6$

Si se multiplican los elementos de una columna por un número multiplicamos el determinante por dicho número.

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores de λ.

b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Solución:

a) Para discutir el sistema utilizamos el Teorema de Rouché-Frobenius. Siendo la matriz de coeficientes y ampliada:

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right)$

Hallemos el valor del determinante de A:

$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (0+\lambda-\lambda) - (0+\lambda^2-\lambda^2) = 0$

Luego el determinante será siempre nulo cualquiera que sea el valor de λ.

Si tomamos el menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y columnas:

$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} = -\lambda$

Que será nulo si $\lambda = 0$.

Como la tercera columna es linealmente dependiente de las dos primeras, hallamos el determinante formado por las primera, segunda y cuarta columnas de la matriz ampliada:

$|C_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+\lambda-\lambda) - (0+\lambda^2+0) = -\lambda^2$

- Si $\lambda \neq$ **0** rango(A) = 2 < rango(A*) = 3. El sistema es incompatible y no tiene solución.
- Si $\lambda =$ **0** la matriz de coeficientes y ampliada:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Si tomamos el menor de orden 2 formado por las dos primeras columnas y la primera y tercera filas:

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$
Por lo tanto rango(A) = 2. Como la tercera y cuarta columnas son iguales, rango(A*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*)=2 < nº de incógnitas, por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones

b) En el apartado anterior hemos visto que es un sistema compatible indeterminado. Tomamos las 1ª y 3ª ecuaciones, parametrizando en función de z = t:

$$\begin{cases} y - z = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 + t \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 + t \\ x = 1 - t \end{cases}$$

Luego las infinitas soluciones del sistema son de la forma:
(x, y, z) = (1-t, -1+t, t) con t $\in$**R**

4.- **[2,5 puntos] Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Esas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 euros, respectivamente. Compramos en total 20 latas, que pesan un total de 10 kg y nos cuestan 35,6 euros. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado**.

Solución:
Sean:

- X el número de latas de tomate del fabricante A
- Y el número de latas de tomate del fabricante B
- Z el número de latas de tomate del fabricante C

Como compramos en total 20 latas, tenemos que x +y +z= 20.
Como pesan 10 kg., tenemos que 0,25x +0,5y +z = 10
Como cuestan 35,6 €, tenemos que x+ 1,8y+ 3,3z = 35,6

El sistema de ecuaciones, eliminado decimales, es:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + 2y + 4z = 40 \\ 10x + 18y + 33z = 356 \end{cases}$$

Resolvemos el problema aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 2 & 4 & 40 \\ 10 & 18 & 33 & 356 \end{array}\right)$$

Restando a la 2ª ecuación la 1ª y a la 3ª la 1ª multiplicada por 10 obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 8 & 3 & 156 \end{array}\right)$$

Restando a la 3ª ecuación la 2ª multiplicada por 8 obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Siendo el sistema escalonado asociado:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ y + 3z = 20 \\ -z = -4 \end{cases}$$

La tercera da z = 4 que sustituyendo en la segunda da:
y = 20-3z = 20-12 = 8

sustituyendo ambos valores en la primera obtenemos:
x = 20-y-z = 20-12 = 8

Por lo tanto **se han comprado 8 latas del fabricante A, 8 latas del fabricante B y 4 latas del fabricante Z**.

Opción B

1.- Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.
b) [1 punto] Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

Solución:
a) Discutamos el rango de A. Su determinante es:
$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = -m-4$
que será nulo si m = -4

- Si $m \neq -4$ rango(A) = 2
- Si m = 4 rango(A) = 1

Discutamos el rango de B. Su determinante es:
$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} = (m^2+0+0)-(0+0-4m) = m^2+4m = m(m+4)$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq -4$, rango(B) = 3.
- Si m = 0
  B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y como el menor formado por las dos primeras filas y columnas $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$,
  rango(B) = 2.
- Si m = 4
  B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y como el menor formado por las dos primeras filas y columnas $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$,
  rango(B) = 2.

Por lo tanto el valor de m para los que A y B tienen el mismo rango es **m = 0.**

b) Los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante son las soluciones de la ecuación obtenida al igualar los valores de ambos obtenidos en el apartado anterior:
$-m-4 = m(m+4) \Rightarrow m(m+4)+ (m+4) = 0 \Rightarrow (m+4).(m+1) = 0$

cuyas soluciones son:
m= -1 y **m = -4.**

2.- Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
a) [0,5 puntos] El determinante de A^3.
b) [0,5 puntos] El determinante de A^{-1}.
c) [0,5 puntos] El determinante de 2A.
d) [1 punto] El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2.

Solución:
a) Aplicamos la propiedad de que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes
$|A^3| = |A|.|A|.|A| = 5\text{-}5.5 = 125$

b) Aplicamos el hecho de que el determinante de la matriz unidad es 1 y de nuevo que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes

$A.A^{-1} = I \Rightarrow |A.\ A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A|.|A^{-1}| = 5.|A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{5}$

c) Al multiplicar una matriz por un número, cada elemento de dicha matriz aparece multiplicado por dicho número. Utilizando la propiedad de que al multiplicar una columna por un número el determinante queda multiplicado por dicho número, puede salir éste fuera del determinante como factor común. Si una columna

del determinante está multiplicada por un número dicho número puede salir como factor común fuera del determinante multiplicando a éste. Como hay tres columnas, sale el 2 tres veces multiplicándolo.
$|2A| = 2^3|A| = 8.5 = 40$

d) En primer lugar intercambiamos dos columnas entre sí, por lo cual cambia el signo del determinante.
$|3C_1 - C_3, 2C_3, C_2| = -|3C_1 - C_3, C_2, 2C_3|$

Sacamos como factor común multiplicando al determinante al número que está multiplicando una columna
$-|3C_1 - C_3, C_2, 2C_3| = -2|3C_1 - C_3, C_2, C_3|$

Si una columna de un determinante es suma de dos sumandos podemos expresar dicho determinante como la suma de dos determinantes colocando en dicha columna los sumandos respectivos.
$-2|3C_1 - C_3, C_2, C_3| = -2|3C_1, C_2, C_3| +2|C_3, C_2, C_3|$

Si un determinante tiene dos columnas iguales el determinante es nulo cero y sacando factor común al número que multiplica una columna, obtenemos finalmente:
$-2|3C_1, C_2, C_3| +2|C_3, C_2, C_3| = -6|C_1, C_2, C_3| +0 = -6.5 = -30$

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} \mathbf{2x + y + (\alpha - 1)z = \alpha - 1} \\ \mathbf{x - \alpha y - 3z} = 1 \\ \mathbf{x + y + 2z = 2\alpha} - 2 \end{cases}$$

[1 punto] Resuelve el sistema para α = 1.

[1,5 puntos] Determina, si existe, el valor de α para el que (x, y, z) = (1,-3, α) es la única solución del sistema dado.

Solución:

a) Para α = 1 el sistema es:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Sumando a la 2ª ecuación multiplicada por 2 la 3ª multiplicada por 3 obtenemos 5x+y = 2 que junto con la primera da el nuevo sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$$

Restando de la segunda la primera da: $3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Sustituyendo en la primera queda: $y = \frac{-4}{3}$

Sustituyendo en la 3ª ecuación del primer sistema: $2z = \frac{4-2}{3} \Rightarrow z = \frac{1}{3}$

La solución del sistema es $(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

b) Sustituimos la solución (x, y, z) = (1,-3, α) en el sistema dado y comprobamos si es una solución común a las tres ecuaciones:
$2.1 +(-3)+ (\alpha-1)\alpha = \alpha-1 \Rightarrow -1+\alpha^2-\alpha = \alpha-1 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ y $\alpha = 2$
$1-(-3)\alpha- 3\alpha = 1 \Rightarrow 1+3\alpha-3\alpha = 1 \Rightarrow 0 = 0$
$1-3+2\alpha = 2\alpha-2 \Rightarrow -2+2\alpha = 2\alpha-2 \Rightarrow 0 = 0$

La segunda y tercera ecuaciones son siempre ciertas cualesquiera que sean los valores de α., por lo tanto (x, y, z) = (1,-3, α) es la única solución del sistema dado para α = 0 y α = 2.

4.- [2,5 puntos] En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una moneda.

Solución:

Sean:
x = el peso de una sortija
y = el peso de una moneda
z = el peso de un pendiente

De las condiciones del problema obtenemos dos ecuaciones:
$x + y + z = 30$
$4x + 3y + 2z = 90$

Y aparte una tercera que, como desconocemos el objeto, puede ser:
$x = 18$ ó $y = 18$ ó $z = 18$

por lo tanto tenemos tres posibles sistemas. La forma más sencilla de resolverla es probar con las soluciones de los tres y elegir como válido el que sea compatible, determinado y con soluciones positivas:

Si el objeto irreconocible es una moneda, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} y = 18 \\ x + y + z = 30 \\ 4x + 3y + 2z = 90 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 18 + z = 30 \\ 4x + 54 + 2z = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 12 \\ 4x + 2z = 36 \end{cases}$$

Restando a la 2ª ecuación la primera multiplicada por 3 tenemos:
$2x = 12 \Rightarrow x = 6$

Que sustituyendo nuevamente en la primera, nos da:
$z = 12 - x = 12 - 6 = 6$

que es una solución válida puesto que los pesos de los tres objetos son positivos:
- el peso de una sortija es 6 g
- el peso de una moneda es 18 g
- el peso de un pendiente es 6 g