EJERCICIOS DE ALGEBRA

MATEMÁTICAS II

Índice Temático

TEMA 1

1.- MATRICES

1. 1.- MATRIZ.

1.- Definiciones

- Una **matriz** es un conjunto de números ordenado en forma de tabla de doble entrada, de la siguiente forma. Se designan con letras mayúsculas A, B,.. Z.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),\ i = 1,2,..,m,\ \ j = 1,2,..,n$$

- **Término** es cada uno de los números de la tabla.
- **Fila** es el conjunto de términos con igual subíndice i.
- **Columna** es el conjunto de términos con igual subíndice j.
- **Dimensión** de la matriz es el producto del número de filas por el de columnas (m x n).
- **Orden** de una matriz cuadrada es el número de términos de una fila o columna.

2.- Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si los son todos y cada uno de sus términos, es decir si tiene la misma dimensión y los términos que ocupan el mismo lugar son iguales.

3.- Tipos de matrices

- **Matriz fila** es la que únicamente tiene una fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz columna** es la que únicamente tiene una columna.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz cuadrada, A,** es la que tiene igual número de filas que de columnas. El conjunto de términos en que coinciden el número de fila y de columna forman la **diagonal principal**.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz traspuesta, A^t,** es la que se obtiene cambiando filas por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica** es toda matriz cuadrada que cumple $A^t = A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz antisimétrica** es toda matriz cuadrada que cumple $A^t = -A$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz nula** es aquella cuyos términos son nulos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal** es aquella matriz cuadrada cuyos términos distintos de la diagonal principal son nulos. **Matriz escalar** es una matriz diagonal cuyos términos no nulos son coincidentes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz unidad** es la matriz escalar cuyos términos no nulos son la unidad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz triangular:**
  Es la matriz cuadrada en que todos los términos situados por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos. Puede ser **triangular superior** o **triangular inferior:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS

1.- Averigua si son iguales las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5^2 - 4^2 & 4+12+9 \\ -\frac{6}{3} & (2-1)(2+1) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} (5+4)(5-4) & 5^2 \\ -2 & 2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Son iguales ya que desarrollando las operaciones $A = B = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2.- Averigua si las siguientes matrices son matriz fila, matriz columna o matriz cuadrada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 13 & -1 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 20 \\ 2 & 13 & -1 \\ 3 & 10 & 30 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolución:
Son matrices fila B y G, matrices columna A y H y matrices cuadradas D y E.

3.- Averigua cuáles de las siguientes matrices son pares de matrices traspuestas.

A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$**, B =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$**, C =** $\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{20} \\ \mathbf{13} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{10} & \mathbf{30} \end{pmatrix}$**,**

D = $\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{13} & \mathbf{10} \\ \mathbf{20} & \mathbf{-1} & \mathbf{30} \end{pmatrix}$**, E =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**, F =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Resolución:
Son matrices traspuestas los pares A y B, C y D.

4.- De las siguientes matrices enuncia cuáles son simétricas y cuales no.

A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**, B =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**, C =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**, D =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Resolución:
Son matrices simétricas B y C y no son matrices simétricas A y D.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Averigua si son iguales las siguientes matrices

A = $\begin{pmatrix} 5^2 - 2^2 & 7+9 \\ -1 & (3-1)(3+1) \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} (5+2)(5-2) & 4^2 \\ -2+1 & 3^2-1 \end{pmatrix}$

Solución: Son iguales

2.- Averigua cuáles de las siguientes matrices son pares de matrices traspuestas.

A = $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & -1 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 10 \\ 10 & -1 & 30 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: Son matrices traspuestas el par A y B, C y D.

3.- De las siguientes matrices enuncia cuáles son simétricas y cuales no.

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: No son matrices simétricas B y C.
Son matrices simétricas A y D.

4.- Averigua la dimensión de las siguientes matrices:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 20 \\ 2 & 13 & -1 \\ 3 & 10 & 30 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución: dim(A) = 3x2, dim(B) = 2x1, dim(C) = 1x4, dim(C) = 3x1

1.2.- OPERACIONES CON MATRICES

1.- Suma de dos matrices

Suma de dos matrices, A + B, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión es otra matriz $S = (s_{ij})$, de la misma dimensión de los sumandos y cuyo término genérico es $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Propiedades
- Conmutativa: A+B = B+A
- Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C
- Existencia de elemento neutro: A + 0 = 0 +A
- Existencia de elemento simétrico: A + (-A) = (-A) + A = 0

2.- Producto de una matriz por un número

Producto de una matriz $A = (a_{ij})$ por un número real k es otra matriz kA de la misma dimensión que la primera y tal que su elemento genérico es ka_{ij}.

3.- Producto de dos matrices

Producto de dos matrices, A.B, $A = (a_{ij})$ (de dimensión mxn) y $B = (b_{ij})$ (de dimensión nxp) es otra matriz $P = (p_{ij})$ de dimensión mxj. tal que cada elemento de la matriz producto se obtiene multiplicando la fila i de la primera matriz por la fila j de la segunda.

Propiedades
- Asociativa: A . (B . C) = (A . B) . C
- Distributiva: A . (B + C) = A . B + A . C
- Existencia de matrices unidad: $A_{mxn}.I_n = I_m.A_{mxn} = A_{mxn}$
- Existencia de elemento simétrico: A + (-A) = (-A) + A = 0
- No Conmutativa: $A.B \neq B+A$
- Divisores del cero: $A . B = 0$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$
- No Simplificativa: A.C = B. C ≠> A = B

4.- Potencia de una matriz

Potencia de una matriz cuadrada de orden n $A = (a_{ij})$ es otra matriz $A^2 = (p_{ij})$ de orden n tal que cada elemento de la matriz potencia se obtiene multiplicando la fila i por la columna j de A.

Es posible que sea interesante hallar la potencia genérica de una matriz A^n. Para demostrar que el resultado es correcto utilizamos el método de inducción:
- Efectuamos una conjetura sobre A^n.
- Comprobamos que se cumple la ley para los valores n = 2 o n = 3.
- Suponemos que se cumple para A^n y comprobamos que se cumple para n+1:

EJEMPLOS

1.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

halla 3A + 2B.

Resolución:

$$3A+2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & 15 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & 2 \\ 6 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & 21 \\ 4 & -1 & 16 & -1 \\ 15 & 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

2.- Efectúa el producto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Resolución:

El producto es la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 13 & -1 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

3.- Si A y B son dos matrices cuadradas y del mismo orden,)es cierta en general la relación $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Justifica la respuesta.

Resolución:

Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden se verifica:

$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

como en general el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa, normalmente no ocurre que:

$AB \neq BA$

luego la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ en general no es cierta.

4.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$, determina los valores de x e y para los que la matriz $B = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ verifica la relación AB = BA.

Resolución:

Hallemos los productos:

$$A.B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & b \\ cx+dy & d \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx \\ ay+c & by+d \end{pmatrix}$$

Igualando ambos tenemos:

$$\begin{pmatrix} ax+by & b \\ cx+dy & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx \\ ay+c & by+d \end{pmatrix}$$

que igualando término a término queda:

$$\begin{cases} ax+by = ax \\ b = bx \\ cx+dy = ay+c \\ d = by+d \end{cases}$$

Como $b \neq 0$ de la primera y segunda ecuación obtenemos:
$by = 0 \Rightarrow y = 0$
$b = bx \Rightarrow x = 1$
y el resto de ecuaciones se convierten en identidades.

5.- Considera la matriz

A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Calcula S = A^t.A.

Resolución:

$$S = A^t.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6.- Sea *M* el conjunto de todas las matrices de la forma

M = $\begin{pmatrix} \mathbf{2^x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

obtenidas al variar x en el conjunto de los números reales.
a) Prueba que al multiplicar dos matrices de *M*, el resultado es otra matriz del mismo conjunto.
b) Determina, caso de existir, un valor $x \in \mathbb{R}$ tal que M(2).M(x) = M(4).

Resolución:
a) Sean A y B dos matrices pertenecientes al conjunto *M:*

$$A = \begin{pmatrix} 2^a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2^b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Su producto es:

$$A.B = \begin{pmatrix} 2^a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^a.2^b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{a+b} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que efectivamente pertenece a *M:*

b) Si existe un valor x tal que M(2).M(x) = M(4), se cumplirá:

$$\begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} 2^{2+x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2+x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E igualando valores obtenemos:
$2 + x = 4 \Rightarrow x = 4-2 = 2$

Es decir, para x = 2 se cumple la expresión anterior.

7.- Calcula la potencia enésima de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

aplicando el método de inducción.

Resolución:

- Vamos a hallar las potencias sucesivas:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 24 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Parece evidente que podemos suponer que la matriz es de la forma:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n\text{-}1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  ya que:
  a) los valores de los elementos $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ no varían.

  b) los valores de los elementos a_{12}, a_{23} son 2, 4, 6, 8, 10 y responden a la sucesión $a_n = 2n$

  c) los valores de los elementos a_{13} son 0, 4, 12, 24, 40 que se pueden poner de la forma 2(1.0), 2(2.1), 2(3.2), 2(4.3), 2(5.4), es decir $a_n = 2n.(n\text{-}1)$.

- Demostremos que el resultado es correcto utilizando el método de inducción:
  a) Hemos visto que se cumple la ley de formación de la potencia, para los valores n = 2,n = 3 y n = 4.

  b) Supongamos que se cumple para A^n y veamos que se cumple para n+1:

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n\text{-}1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 2n.(n\text{-}1)+4n \\ 0 & 1 & 2n+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que operando y sacando factor común quedará de la forma:

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2.(n+1) & 2(n+1).n \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tal y como queríamos demostrar.

8.- Halla A^n siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Resolución:

- Hallamos las potencias sucesivas:

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Parece evidente que podemos suponer que la matriz es de la forma:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que los valores de todos los elementos salvo a_{12} permanecen tal cual y los valores del elemento a_{12} son 1, 3, 5, 7 números impares que responden a la sucesión $a_n = 2n-1$.

- Demostremos por inducción que el resultado es correcto:
  - Se cumple para un valor determinado, por ejemplo para 3:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2.(3-1) & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Supongamos que se cumple para A^n y demostrémoslo para n+1:

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2.n-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n-1+2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que operando y sacando factor común quedará de la forma:

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tal y como queríamos demostrar.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprueba la siguiente igualdad:

$$ABC^t - 5\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcula 3A+ 2C, AB.

Solución:

$$3A+2C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 17 \\ 12 & -3 & 4 \\ 14 & 4 & 13 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 4 & 13 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.- Calcula A^2-3A- I, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución: $A^2-3A-I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.- Halla todas las matrices que satisfacen la ecuación

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \forall\, a, b, c \in R$$

5.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

a) Halla la matriz $3A^tA - 2I$

b) Resuelve la igualdad matricial

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$a) \begin{pmatrix} 100 & 39 \\ 39 & 13 \end{pmatrix}, \; b) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$$

6.- Calcula por inducción la potencia enésima de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

7.- Calcula por inducción la potencia enésima de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(nx) & -\operatorname{sen}(nx) \\ \operatorname{sen}(nx) & \cos(nx) \end{pmatrix}$$

8.- Calcula por inducción la potencia enésima de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \dfrac{n(n-1)a^{n-1}}{2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

9.- Calcula la potencia enésima de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/a & n/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.-)Es conmutativo el producto de matrices? Si la respuesta es afirmativa demuéstralo, si es negativa pon un ejemplo que lo ponga de manifiesto.)Qué matrices conmutan con la matriz A?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: El producto no es conmutativo. Las matrices son de la forma

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

11.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, encuentra una matriz X de orden 2 tal que A+X = AX+XA

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$,)qué relación deben guardar las constantes a y b para que se verifique la igualdad $A^2 = A$?

Solución: a = 0, b = 1 ó a = 1, b = 0.

1.3.- RANGO DE UNA MATRIZ

1.- Definición.

Dos filas o columnas no nulos de una matriz son **linealmente independientes** cuando sus términos no son proporcionales. En general una fila o columna es linealmente independiente si no es igual a la suma de otras filas o columnas previamente multiplicadas por ciertos números.

Rango de una matriz A_{mxn} es el número de filas o columnas linealmente independientes. Si el rango de A es r <m existen m-r filas combinación lineal de las anteriores.

Decimos que dos matrices son **equivalentes** cuando tiene el mismo rango.

2.- Cálculo mediante el método de Gauss.

Para calcular el rango por el método de Gauss trasformaremos la matriz en una equivalente de forma triangular.

Son válidas las siguientes transformaciones:
- Permutar dos filas o columnas
- Multiplicar o dividir una fila o columna por un número
- Sumar a una fila o columna la combinación lineal de otras

Si después de efectuar las transformaciones pertinentes, un fila esté formadas únicamente por ceros será linealmente dependiente de las otras. El rango de la matriz viene dada por el número de filas cuyos elementos no son todos nulos.

EJEMPLOS

1.- Halla el rango de la matriz A usando el método de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Cambiamos la 1ª y 4ª columnas.

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 & 3 \\ 17 & 11 & -6 & 2 \\ -37 & -1 & 24 & 5 \end{pmatrix}$$

Sumamos la 1ª fila x 17 a la 2ª y la 1ª fila x(-37) a la 3ª:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & 130 & 62 & 53 \\ 0 & -260 & -124 & -106 \end{pmatrix}$$

Finalmente sumamos la 2ª fila x 2 a la 3ª fila.

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & 130 & 62 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser la última fila nula, el rango es 2, ya que sólo hay dos filas independientes

2.- Halla el rango de la matriz A usando el método de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Resolución:
Restamos a la 3ª fila la suma de la 1ª y 2ª fila.
Restamos de la 4ª fila la suma de la 2ª y 3ª fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Restamos a la 2ª fila la 1ª x 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser las dos últimas filas nulas, el rango es 2.

3.- Calcula a y b para que el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 4 & b \end{pmatrix}$ sea 1.

Resolución:
Cambiamos la 1ª y 2ª columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & a & b \end{pmatrix}$$

Restamos a la 2ª fila el producto de la 1ª fila por 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-8 & b \end{pmatrix}$$

para que el rango sea 1 ha de ocurrir que la 2ª fila sea nula, es decir que:

$$\begin{cases} a-8=0 \Rightarrow a=8 \\ b=0 \end{cases}$$

4.- Calcula a y b para que el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ sea 1.

Resolución:
Sumamos a la 2ª fila el producto de la 1ª fila por 2 y a la 3ª fila la 1ª fila.

$$\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 3+2a \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

para que el rango sea 1 ha de ocurrir que la 2ª y 3ª fila sean nulas:

$3 + 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

$a + b = 0 \Rightarrow b = -a = \frac{3}{2}$

Es decir la solución es:

$a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{2}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución: rg(A) = 3

2.- Calcula a y b para que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & b \end{pmatrix}$ sea 1.

Solución: a =2, b = 0.

3.- Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Solución: rg(A) =2

4.- Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solución: rg(A) =3

5.- Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución: rg(A) =3

6.- Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

Solución: rg(A) = 2

1. 4.- INVERSA DE UNA MATRIZ

1.- Definición.

Matriz inversa A^{-1} de una matriz cuadrada dada, A, es aquella que al multiplicar por A, tanto por la derecha como por la izquierda da como resultado la matriz unidad del mismo orden: $A^{-1}.A = A.A^{-1}= I$. Una matriz cuadrada tendrá inversa cuando el rango coincida con el orden.

2.- Cálculo por el método de Gauss.

- Se añade a la derecha de la matriz A la matriz identidad del mismo orden I, formando la matriz $\left(A \mid I\right)$.
- Podremos realizar las siguientes transformaciones:
  - Permutar dos filas
  - Multiplicar o dividir la fila por un número
  - Sumar a una fila la combinación lineal de otras
- Cuando se obtenga en la izquierda la matriz identidad, es decir se forme la matriz $\left(I \mid A^{-1}\right)$ a la derecha quedará la matriz inversa buscada.

EJEMPLOS

1.- Calcula la matriz inversa de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

por el método de Gauss si fuera posible y comprueba que $A.A^{-1} = 1$

Resolución:

Utilizamos la matriz ampliada, que debemos convertir en la matriz unidad en su parte izquierda.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Restamos a la 3ª fila la 1ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 3ª fila la 2ª fila multiplicada por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Dividimos a la 3ª fila por 4.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 2/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

Restamos a la 2ª fila la 3ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 2/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 2/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

Restamos a la 1ª fila la 2ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/4 & -4/4 & 2/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 2/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 2/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

Y la matriz inversa puede expresarse como:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pudiendo comprobarse fácilmente que:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.- Averigua para qué valores de *a* la matriz A no tiene inversa. Calcula la matriz inversa de A para a = 1 si ello fuera posible.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Resolución:

- Utilizaremos el método de triangulación de Gauss para averiguar los valores que anularían la última fila. Intercambiamos 1ª y 3ª filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Sumamos a la 3ª fila la 1ª x(-1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la 2ª y 3ª columna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Sumamos a la 3ª fila la 2ª, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

La tercera fila sería nula si $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$.

- Es posible para a = 1. Calculamos la inversa por el método de Gauss utilizando la matriz ampliada obtenida añadiendo la matriz unidad en su parte derecha y que debemos convertir en otra matriz con la matriz unidad es su parte izquierda..

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para ello restamos a la 3ª fila la 1ª fila y

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 3ª fila la 2ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dividimos a la 3ª fila por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Restamos a la 2ª fila la 3ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1//2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Restamos a la 1ª fila la 2ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1//2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

La matriz inversa puede expresarse como:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Halla una matriz B sabiendo que su primera fila es (1 0) y que verifica.
A.B = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **siendo A =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$
)**Es B la inversa de A?**

Resolución:
Como A es una matriz de orden 2x3 y A.B es de orden 2x2, B ha de ser de orden 3x2, y como su primera fila es (1 0) ha de ser de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

cumpliendo la condición:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1+2a+2c & 2b+2d \\ 2+a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -1+2a+2c=1 \\ 2+a=0 \\ 2b+2d=0 \\ b=1 \end{cases}$$

Con soluciones a = -2, b = 1, c = 3, d = -1 luego:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Que no puede ser la inversa de A, puesto que A no es una matriz cuadrada y por lo tanto no es invertible.

4.- Una matriz cuadrada es ortogonal cuando su inversa coincide con su transpuesta. Calcula a y b para que sea ortogonal la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & a & 0 \\ b & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Si en la matriz coinciden la traspuesta y la inversa ha de ocurrir que $A.{}^tA = I$:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & a & 0 \\ b & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3/5 & b & 0 \\ a & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25+a^2 & 3/5b-3/5a & 0 \\ 3/5b-3/5a & 9/25+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término tendremos:

$$\frac{9}{25}+a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow a = \forall\frac{4}{5}$$

$$\frac{9}{25}+b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow b = \forall\frac{4}{5}$$

Como las otras dos ecuaciones son la misma y quedan:

$$\frac{3}{5}b-\frac{3}{5}a = 0 \Rightarrow b-a = 0 \Rightarrow a = b$$

y las soluciones son: $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{4}{5}$ y $a = -\frac{4}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$

5.- Sea A una matriz cuadrada que verifica la relación A^2-3A+2I=0 (donde I es la matriz identidad del mismo orden que A y 0 representa la matriz cero). Prueba que A tiene inversa y calcúlala.

Resolución:

La relación A^2 -3A +2**I** = 0 quedará como A^2 -3A = -2**I** y multiplicando escalarmente por $-\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{2}\left(-A^2+3A\right)$ = **I** (*)

que puede expresarse, obteniendo factor común, y tomando B = $\frac{1}{2}(-A+3I)$:

$\frac{1}{2}\left(-A+3I\right).A$ = **I** $\Rightarrow$ B.A = **I** [1]

Además, obteniendo factor común A por la derecha en la expresión (*):

$\frac{1}{2}A(-A+3I)$ = **I**

utilizando la propiedad conmutativa de los escalares por las matrices y tomando como B = $\frac{1}{2}(-A+3I)$:

$A.\left[\frac{1}{2}(-A+3I)\right]$ = **I** Ψ A.B = **I** [2]

Por [1] y [2] obtenemos que B es la inversa de A, luego existe la inversa de ésta siendo su valor:

$A^{-1}=\frac{1}{2}(-A+3I)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula por el método de reducción la inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Calcula por el método de reducción o de Gauss, la inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba el resultado multiplicándolo por la matriz dada.

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3.- Calcula por el método de reducción o de Gauss, la inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y comprueba el resultado multiplicándolo por la matriz dada.

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.- Calcula por el método de reducción o de Gauss, la inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

5.- Calcula por el método de Gauss la inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -9 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

6.- Calcula por el método de Gauss la inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.- Averigua para qué valores del parámetro a la matriz no tiene inversa. Calcula la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$ para a = 2 si ello es posible.

Solución: No tiene inversa para a $= -2-\sqrt{2}$ *, a* $= -2+\sqrt{2}$. $A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 14 & 6 & 2 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

8.- Averigua para qué valores de *a* la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$ no tiene inversa. Calcula la matriz inversa para a = 2 si es posible y comprueba que el producto de ambas es la matriz identidad.

Solución:
Tiene inversa cualquiera que sea el valor de a. Si a = 2:

$A^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 12 & 6 & -3 \\ -8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

1.6.- EJERCICIOS DEL TEMA

1.- De las siguientes matrices enuncia cuáles son diagonales, escalares y unidad

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución: A es unidad, C es escalar, B es diagonal

2.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula $S = A^t.A$.

Solución: $A^t.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comprueba que $(A+I)^2 = A^2+2A+I$

4.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$, determina los valores de x e y para los que la matriz $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ verifica la relación AB = BA.

Solución: $x = 1, y = 0$.

5.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, resuelve la igualdad matricial $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$

6.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ realiza las siguientes operaciones:

a) 5A, b) A – B, c) A x B

Solución: a) $\begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, *b)* $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, *c)* $\begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

7.- Encuentra todas las matrices simétricas de orden 2 que verifiquen $A^2 = I$

Solución: $A = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}$

8.- Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Comprueba que $(A+I)^2 = 0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula. Recordando que $(A+I)^2=0$, expresa A^2 y A^{-1} como combinación lineal de A e I.

Solución: $A^2 = -2A-I$, $A^{-1} = -A-2I$

9.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ halla los valores de a y b para que se verifique la ecuación $A^2+aA+bI =$, donde I es la matriz identidad.

Solución: $a = -1$, $b = -12$

10.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ determina otra matriz B tal que A + B = A.B

Solución: $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

11.- Determina los valores de a, b y c para que se verifique la igualdad

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Soluciones: a =-2, b = 2; c = 1, a = -2, b = -2; c = -1,
a = 2, b = 2; c =-1, a = 2, b = -2; c = 1

12.- Halla a, b c y de para que se verifique la igualdad:

$3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ 2c+a & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b+c \\ d-2 & 4 \end{pmatrix}$

Solución: a = 1, b = 2, c = 3, d = 4

13.- Encuentra números a y b de forma que la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = 2A$.

Solución: a = 1, b = 1

14.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz B tal que A.B = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b))Hay alguna matriz C tal que C.A = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Solución: a) a = 1, b = 3. b) No ya que C.A tiene dos columnas

15.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ comprueba que $A^2 = 2A-I$, usando la fórmula anterior, calcula A^4.

Solución: $A^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -167 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

16.- Demuestra que para una matriz cuadrada A cualquiera las matrices AA^t, A^tA y $A+A^t$ son matrices simétricas.

17.- Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que AB = A+I, siendo I la matriz identidad

Solución: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

18.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ obtén las matrices B tales que A.B =B.A. Determina que matriz de las anteriores verifica $B = A^{-1}$.

Solución: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$, $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

19.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, a) Halla la matriz $3A^tA - 2I$. b) Resuelve la igualdad matricial AX = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) $\begin{pmatrix} 100 & 39 \\ 39 & 13 \end{pmatrix}$, *b)* $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$

20.- Si A y B son las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ calcula $AB-B^2$

Solución:

$$AB-B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ -1 & -8 & -2 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

21.- Calcula la matriz $A^{250} + A^{20}$ sabiendo que la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{250} + A^{20} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 270 & 0 \end{pmatrix}$

22.- Halla $X^2 + Y^2$ las soluciones del sistema matricial siguiente:

X + Y = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ X-Y = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}$

23.- Calcula por inducción la potencia enésima de la matriz A = $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$

Solución: $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}a^n & 2^{n-1}a^n \\ 2^{n-1}a^n & 2^{n-1}a^n \end{pmatrix}$

24.- Calcula por inducción la potencia enésima de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

25.- Calcula por inducción la potencia enésima de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.- Calcula los valores de a para que el rango de la matriz A sea 1, siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix}$

Solución: a =3

27.- Calcula el rango de A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

Solución: rg(A) = 2

28.- Calcula el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución: rg(A) =2

29.- Calcula el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ en función de los valores de a:

Solución: Si a =4: rg(A) = 2, Si a ¹ 4: rg(A) =3.

30.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se llaman valores propios de dicha matriz a los valores de k tales que el determinante A - kI = 0. Halla los valores propios de A

Solución: 1,4,-1

31.- Prueba que A^2-A-2I = 0, siendo A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de otra forma.

Solución: $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

32.- Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica:

Solución: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

33.- ¿Qué relación deben guardar a y b para que la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ verifique la igualdad A^2 = A?

Solución: a = 1, b = 0 ó a = 0, b = 1. Conmutan todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

34.- Demuestra con un ejemplo que el producto de matrices no es conmutativo. ¿Qué matrices conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

35.- Sean A y B dos matrices del mismo orden que tienen inversa. Razona si su producto A.B también tiene inversa.
Solución: Sí existe inversa de la matriz producto A.B y ésta vale $B^{-1}.A^{-1}$.

36.- Dadas las matrices C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ determina si C.D tiene inversa.

Solución: $\begin{pmatrix} 0 & 2/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$

37.- Estudia si hay algún valor de a para el que la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & a & 3-2a \\ 1 & a+1 & a-5 \\ 3 & 3a+1 & 1-3a \end{pmatrix}$ tiene inversa

Solución: No lo hay

38.- Sabiendo que la matriz A verifica la relación A + 2$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema

A$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Solución: x = 3, y = -1

39.- Resuelve la ecuación matricial AX + B = C, siendo
A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: X = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1/2 & -5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

40.- De las matrices A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ se sabe que A.B = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
a))Tiene A inversa? Justifica la respuesta y si es afirmativa indica cuál es la inversa de A.
b))Es cierto que A.B = B.A en este caso?
Solución: a) No lo podemos afirmar, b) No lo podemos asegurar.

41.- Averigua como ha de ser una matriz X que cumpla X . $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. X

Solución: Matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

42.- Sea a un parámetro real y sea la matriz M(a) = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ halla los valores de a para los que M(a) tiene inversa.
Solución: No tiene inversa par a =-1, a = 1. b) a = 0.

TEMA 2

2.- DETERMINANTES

2. 1.- DETERMINANTES

1.- Determinante de orden 2

Dada una matriz cuadrada de orden dos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se llama determinante de A al número real:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

2.- Determinante de orden 2

Dada una matriz cuadrada de orden 3 su determinante será (Regla de Sarrus):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$

3.- Determinante de orden n

- **Menor** de orden r de una matriz al determinante formado por la intersección de r filas y de r columnas.

- **Menor complementario** (Δ_{ij}) del término a_{ij} de una matriz al determinante de la matriz resultante de eliminar la fila y la columna en la que este situado dicho término.

- **Adjunto** (A_{ij}) del elemento a_{ij} de una matriz al producto del menor complementario por (-1) elevado a la suma de la fila y la columna en la que este situado dicho término.

El determinante de la matriz A de orden n es igual a la suma de los producto de los términos de una fila o columna por sus adjuntos.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{2m} \end{vmatrix}$$

Los determinantes de orden n se suelen representar también expresando las filas o columnas que lo componen $|A|$ = [f_1, f_2,.., f_n] = [c_1, c_2,.., c_m]

4.- Propiedades de los determinantes.

- Si una fila o columna de la matriz es nula el determinante vale 0.
- Si permutamos dos filas o columnas de una matriz cambia el signo del determinante.
- Si dos filas o columnas de la matriz son iguales el determinante vale 0.
- Si se multiplican los elementos de una fila o columna por un número multiplicamos el determinante por dicho número.
- Si los elementos de una fila o columna se descomponen en sumandos, su determinante es igual a la suma de 2 determinantes que tiene todas las demás filas o columnas iguales y uno de los dos sumandos en la fila o columna en cuestión.
- Si a una fila o columna de una matriz se le suma otra paralela multiplicada por un número el determinante no varía.
- Si una fila o columna de la matriz es combinación lineal de otras paralelas a ella el determinante es nulo.
- El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de las matrices factores.
- El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.
- La suma de los producto de los términos de una fila o columna por los adjuntos de una fila o columna paralela a la dada es nula.

EJEMPLOS

1.- Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

Resolución:

Hacemos ceros en los elementos de la primer columna para poder desarrollar por ella, para ello restamos a la 4ª fila la 1ª x 6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -12 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la 1ª columna queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -12 \end{vmatrix}$$

Hacemos ceros en la 1ª columna. Sumamos a la 2 0 fila la primera. Sumamos a la 3ª fila la primera.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix}$$

desarrollamos por la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -13 \end{vmatrix} = 13$$

2.- Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{vmatrix}$$

Resolución:
Desarrollando el determinante utilizando el método de Sarrus queda:
$|A|$ = (-36+0-5) -(8+0-30) =-19

3.- Averigua el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$

Resolución:
Vamos a desarrollar por los elementos de la 2ª columna. Para ello a la 3ª fila se le suma la 1ª fila x (-2). A la 4ª fila se le suma la 3ª:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la 2ª columna se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

Desarrollaremos por la 1ª fila. Hacemos ceros en la fila sumando a la 1ª columna la 2ª c olumna x(-2) y sumamos a la 3ª columna la 2ª:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$

Obteniendo finalmente:

$$-\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = -(-55+3) = 52$$

4.- Averigua el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{16} & \mathbf{25} \\ \mathbf{8} & \mathbf{27} & \mathbf{64} & \mathbf{125} \end{vmatrix}$$

Resolución:
Vamos a desarrollar por los elementos de la 1ª fila. Para ello a la 2ª, 3ª y 4ª columnas se les suma la 1ªx(-1).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 21 \\ 8 & 19 & 56 & 117 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la 1ª fila se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 12 & 21 \\ 19 & 56 & 117 \end{vmatrix}$$

Desarrollaremos por la 1ª fila. Para ello hacemos ceros sum ando a la 2ª columna la 1ª x (-2) y a la 3ª columna la (1ª+2ª) x (-1):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 19 & 18 & 42 \end{vmatrix}$$

Obteniendo finalmente:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 18 & 42 \end{vmatrix} = 84-72 = 12$$

5.- Encuentra las transformaciones de filas o columnas que hay que hacer con el determinante adjunto para probar la igualdad justificando la respuesta.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{vmatrix} = \mathbf{(a+3)(a-1)^3}$$

Resolución:
Sumando a la primera columna las otras tres:

$$\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Como la 1ª columna está multiplicada por a+3 queda:

$$(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Restando la 1ª columna a las restantes:

$$(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los adjuntos de los elementos de la 1ª fila:

$$(a+3)\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los adjuntos de los elementos de la 1ª fila:

$$(a+3)(a-1)\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

6.- Prueba, sin desarrollar el determinante, que

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a+x} & \mathbf{a+2x} \\ \mathbf{b} & \mathbf{b+x} & \mathbf{b+2x} \\ \mathbf{c} & \mathbf{c+x} & \mathbf{c+2x} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Resolución:

Si restamos a la 2ª y 3ª columnas la 1ª:

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+2x \\ b & b+x & b+2x \\ c & c+x & c+2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & 2x \\ b & x & 2x \\ c & x & 2x \end{vmatrix}$$

Como la 3ª columna está multiplicada po r un número, sale fuera del determinante. Al ser la 2ª y 3ª columnas el determinante es nulo:

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+2x \\ b & b+x & b+2x \\ c & c+x & c+2x \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} a & x & x \\ b & x & x \\ c & x & x \end{vmatrix} = 0$$

7.- Averigua el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1+a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1+b} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1+c} \end{vmatrix}$$

Resolución:

Restando a las filas 2ª, 3ª y 4ª la primera fila obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

Que desarrollando por los elementos de la 1ª columna queda:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

Que desarrollando por los elementos de la 1ª columna queda:

$$a.\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

8.- Calcula el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1+a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1+b} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1+c} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1+d} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

)**Cuál sería la solución de la ecuación resultante de igualar a 0 dicho determinante para a = b = c = d?.**

Resolución:
Para resolverlo restamos de todas las columnas los elementos de la primera:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \\ 1+d & -d & -d & -d \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la 1ª fila :

$$\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ -d & -d & -d \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & c & 0 \\ 1+d & -d & -d \end{vmatrix}$$

Desarrollando por Sarrus en ambos casos queda:
A = bcd + acd + abd + abc + abcd

Si A = 0 y a = b = c = d, queda: $4a^3 + a^4 = 0$
con soluciones: $a^3 (4+ a) = 0$ | a = 0, a = -4

9.- Calcula el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{3} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{3} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$

Resolución:

Para hallar el valor sumamos a la primera fila las restantes:

$$\begin{vmatrix} 3+3x & 3+3x & 3+3x & 3+3x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

Sacamos factor común (3+ 3x) ya que aparece en todos los términos de la 1ª fila:

$$(3+3x).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

Restamos la primera columna de las demás:

$$(3+3x).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 3-x & 0 & 0 \\ x & 0 & 3-x & 0 \\ x & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la 1ª fila :

$$(3+3x).\begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$$

Desarrollando por Sarrus queda: A = $(3+3x).(3-x)^3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución: -5

2.- Calcula el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución: -22

3.- Calcula el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución: 9

4.- Aplica las propiedades de los determinantes para comprobar, sin desarrollo que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+c \\ 1 & b & b+c \\ 1 & c & 2c \end{vmatrix} = 0$$

5.- Averigua el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución: 52

6.- Averigua el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$$

Solución: 12

7.- Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Solución: a) 5, b)5.

8.- Halla dos soluciones de la ecuación siguiente sin desarrollar el determinante e indica la propiedad que aplicas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución: x = 1, x = -1.

9.- Calcula el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: -9

10.- Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} & 1 & & 1 & & 1+ \\ & 1 & & 1 & +x & \\ & 1 & 1 & x & 1 & \\ 1+ & & & 1 & 1 & \end{vmatrix}$$

Solución: x (4 + x)

2.2.-

1.- Definición

El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independiente. Como el rango por filas y por columnas es igual, basta considerar el menor número de las filas o columnas linealmente independientes.

2.- Cálculo

Para calcular el rango de una matriz:

- Buscamos un menor de orden 2 no nulo, si no existiese el rango de la matriz sería 0 o 1.
- Orlamos dicho menor con las sucesivas columnas de una misma fila obteniendo menores de orden 3. Si todos los menores fueran nulos descartamos la fila.
- Repetimos el paso anterior con las sucesivas filas.
- Si hemos encontrado un menor de orden 3 no nulo el rango es por lo menos 3.
- Repetimos el proceso anterior para menores de orden 4 y superiores, hasta alcanzar el de mayor orden no nulo, que nos dará el rango pedido.

EJEMPLOS

1.- Calcula el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

Resolución:

Como el rango es el número de filas o columnas linealmente independientes vamos a hallar le número de filas ya que sabemos que el número de columnas será el mismo.

Las dos primeras filas son independientes ya que existe el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Las tres primeras filas lo son ya que existe el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Las cuatro primeras filas no lo son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Las tres primeras y la 5ª si los son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$

Por lo tanto rg(A) = 4.

2.- Calcula el rango de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & 7 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

Resolución:
Empezamos por destacar un menor de orden 2 no nulo (esto se hace a ojo). Procuramos, también, que sea lo mas fácil posible. Esto nos garantiza que las dos primeras filas son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Veamos si la tercera depende linealmente de ellas o no. Para ello, añadimos los elementos -3 y -1 y calculamos los siguientes determinantes de orden 3.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -40 \neq 0$$

Lo que significa que el rango por lo menos vale 3.

Si cambiamos al 3ª por la 4ªcolumnas obtenemos una matriz del mismo rango.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 7 & -2 & 0 \\ 3 & 11 & 5 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

en la que el menor principal de orden 3 es distinto de cero.

Si orlamos con la siguiente fila y el resto de las columnas, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 & -2 \\ 3 & 11 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 11 & 5 & 18 \end{vmatrix} = -480 \neq 0$$

y como hay un menor de orden 4 distinto de cero, el rango será 4.

3.- Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{10} & \mathbf{5} & \mathbf{15} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

Resolución:

Como hay un menor de orden 3 distinto de 0 el rango es, al menos 3. Averigüemos si es 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -105$$

Orlamos las tres columnas del menor de orden 3 no nulo, con la cuarta fila y columnas.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & 5 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 15 & 8 & 6 \\ 2 & 15 & 8 & -1 \\ 1 & 15 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 8 & 6 \\ 15 & 8 & -1 \\ 15 & 8 & -15 \end{vmatrix} = 0$$

Orlamos las tres columnas del menor de orden 3 no nulo, con la cuarta fila y la quinta columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 10 & -15 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -15 & 22 \end{vmatrix} = 5.0 = 0$$

Como ambos menores de orden 4 son nulos podemos asegurar que la cuarta fila es combinación lineal de las otras tres y, por tanto, que no habrá ningún menor de orden 4 distinto de 0. El rango es 3.

4.- Calcula, según los valores de a, el rango de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{a} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$$

Resolución:

Entendemos por rango de una matriz el número de filas o columnas que son linealmente independientes. En nuestro caso observamos que la 2ª columna es el doble de la 1ª y la 3ª columna es el triple de la misma, por lo tanto para el cálculo del rango podemos prescindir de la 2ª y 3ª columnas, quedando:

$$\text{rg}(M) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

- Si a = 4 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ rg(M) =1.

- Si a $\neq$ 4 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rg(M) =2.

5.- Calcula el rango de la matriz

A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

Resolución:
Para calcular el rango de A observamos que:

- 3ª columna = -2ª columna.

- 5ª columna = -4ª columna.

- 4ª columna = 2ª columna – 1ª columna.

Por lo tanto rg(A)=2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3,) cómo puede variar el rango si quitamos una columna?,)si suprimimos una fila y una columna, podemos asegurar que el rango de la matriz resultante valdrá 2?
Solución: a) El rango vale 2, b) No

2.- a) Escribe una matriz de 3 filas y 2 columnas cuyo rango sea 1.
b) Se considera una matriz cuadrada de orden 3, si el rango es 3 y le quitamos una columna, demuestra que el rango de la nueva matriz es 2. Si el rango es 2 y le quitamos una columna,)podemos asegurar que el rango de la matriz resultante valdrá 2?
Solución:

a)Por ejemplo la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

b) No

3.- Calcula el rango de la matriz.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & 7 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

Solución: rg(A) = 4

4.- Calcula el rango de la matriz 4 x 5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Solución: rg(A) = 3

5.- Calcula el rango de la matriz formada por las filas u = (1,2,3), v = (3,4,5), w = (5,6,7) y z = (7,8,9)

Solución: rg(u, v, w, z) = 2

6.- Calcula el rango A, según los valores de a

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

$a \neq 1,\ a \neq -2 \Rightarrow rg(A) = 3,$

$a = -2 \Rightarrow rg(A) = 2,$

$a = 1 \Rightarrow rg(A) = 1$

7.- Discute, según los valores del parámetro **a,** el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a & a-1 & a \\ a+1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$a \neq -1,\ a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = 3$

$a = -1 \Rightarrow rg(A) = 1$

$a = 1 \Rightarrow rg(A) = 2$

8.- Halla el rango de la siguiente matriz según los valores de a y b:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solución: $b \neq 0$ y $b \neq 1 \Rightarrow rg(M) = 3$

$ab = 1 \Rightarrow rg(M) = 3$

$b = 0 \Rightarrow rg(M) = 3$

$b = 1$ y $a \neq 1 \Rightarrow rg(M) = 3$

$b = 1$ y $a = 1 \Rightarrow rg(M) = 2$

9.- Obtén el valor de a para que el rango de la matriz A sea igual a 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & a & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: a =-1

10.- Determina el valor de a para que el rango de la matriz A sea igual a 1:

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & 2 \\ 2 & 3 & a \\ 4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución: a = -2

2. 3.- INVERSA DE UNA MATRIZ

- **Matriz adjunta** de una matriz cuadrada A, adj(A), es la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento de la matriz por su adjunto.

- **Matriz inversa** de una dada es la traspuesta de la adjunta dividida por el determinante de la matriz dada:

  $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}({}^{t}A)$$

EJEMPLOS

1.- Determina los valores de λ para los que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & \text{ë} & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

no tiene inversa.

Resolución:

La matriz A no tiene inversa cuando su determinante sea nulo, veamos para que valores de λ ocurre:

$$\begin{vmatrix} 3 & l & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24-3\lambda-12-3 = 9-3\lambda = 0\ \Psi\ \lambda = 3$$

Luego A no tiene inversa para λ =3

2.-)Para qué valores de “a” la matriz A no tiene inversa.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Resolución:

Haremos el determinante igual a 0 para hallar los valores para los que la matriz no tiene inversa. Para ello haremos ceros en la 1ª columna, para ello sumamos a la 3ª fila la 1ª x(-1) y desarrollado por los elementos de la 1ª columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & a \end{vmatrix} = 2a = 0 \Rightarrow \underline{a = 0}$$

3.- Calcula la matriz inversa de A y comprueba que el producto de ambas es la matriz identidad.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Hallaremos en primer lugar el determinante ya que si este fuera 0 la matriz no tendría inversa. Usaremos para ello el transformar en ceros los elementos de la

3ª columna y el desarrollo por los elementos de ésta. Restamos a la 2ª fila la 3ª por 2 y desarrollamos por la 3ª columna.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Obtenemos la matriz de adjuntos es:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

La matriz traspuesta de los adjuntos será:

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

que coincide con la inversa ya que el determinante es 1.

4.- Halla para qué valores tiene inversa la matriz A. Halla la inversa de dicha matriz para a = 3, caso de que sea posible.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Resolución:

Para averiguar si tiene inversa o no la matriz debemos ver que el rango de dicha matriz (que ha de ser cuadrada) coincide con el orden, es decir es 3. Para ello calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a$$

que será de cero cuando 2a = 0 $\Rightarrow$ a = 0. Para valores de a $\neq$ 0 la matriz tendrá inversa.

Para a = 3 es posible hallar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

calculamos el determinante:

$|A| = 2.3 = 6$

A continuación calculamos en el 1er paso la matriz de menores

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

En el segundo paso obtenemos la matriz de adjuntos

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -3 \\ -2 & 6 & 0 \\ 3 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

En el tercer paso trasponemos

$$A_{ji} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 9 & 6 & -9 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En el cuarto paso dividimos por el determinante y ya tenemos la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 9 & 6 & -9 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5.- Dado x0 |, considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{cosx} & \mathbf{senx} \\ \mathbf{-senx} & \mathbf{cosx} \end{pmatrix}$$

a) Calcula A A^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A
b) Prueba que A tiene inversa y hállala.

Resolución:
a) Como la matriz traspuesta es:

$$A^t = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$$

El producto pedido es:

$$A.A^t = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x & -\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x \\ -\operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} x & \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para que tenga inversa ha de ocurrir que el determinante de la matriz ha de ser distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad 0$$

según el apartado anterior $A.A^t = I$, resulta que la traspuesta de A coincide con su inversa, es decir:

$$A^{-1} = A^t = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \\ \operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

6.- Considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

a) Calcula S = A^t.A.
b) Determina si S es invertible enunciando las propiedades que utilices.

Resolución:

a) $S = A^t.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para que una matriz sea invertible ha de ser una matriz cuadrada cuyo determinante correspondiente sea no nulo:

$|S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 0 , ya que la 2ª fila es la suma de 1ª y 3ª filas.

<u>S no es invertible</u>

7.-)Qué valores de "a" hacen que la matriz

A = $\begin{pmatrix} \mathbf{-a} & \mathbf{a-1} & \mathbf{a+1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2-a} & \mathbf{a+3} & \mathbf{a+7} \end{pmatrix}$

no tenga inversa? Razona la respuesta.

Resolución:
Para que una matriz A no tenga inversa, su determinante ha de ser nulo. Veamos para que valores de *a* sucede:

det(A)= $\begin{vmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{vmatrix}$

Restando a la 2ª columna del determinante la 1ª multiplicada por 2, y a la 3ª columna la 1ª multiplicada por 3:

$\begin{vmatrix} -a & 3a-1 & 4a+1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2-a & 3a-1 & 4a+1 \end{vmatrix}$

Desarrollando el determinante por la suma de los por los elementos de la 2ª fila multiplicados por sus adjuntos:

$- \begin{vmatrix} 3a-1 & 4a+1 \\ 3a-1 & 4a+1 \end{vmatrix} = 0$

ya que tiene dos filas iguales.

Como $|A|$ = 0 para cualquier valor de *a*, resulta que <u>A nunca tendrá inversa</u>.

8.-)Para qué valores de *a* la matriz

A = $\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-a} \end{pmatrix}$

no tiene inversa?. Calcula la matriz inversa de A utilizando determinantes para a = 1 si ello fuera posible y comprueba que A. A^{-1} = I

Resolución:

- Hallaremos el determinante ya que si este fuera 0 la matriz no tendría inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 4 & 0 & -a \end{vmatrix} = (-a^2 + 4a + 0) - (4 + 0 + 0) = -a5 + 4a - 4 = 0$$

  Resolviendo la ecuación obtenemos que <u>a = 2</u>. Por lo tanto la matriz tiene inversa para 5 ⊟{2}.

- Calculamos ahora la inversa para a = 1, es decir la inversa de la matriz cuyo determinante es A = -1+4-4 = -1

  Para hallar la matriz inversa obtenemos la matriz de adjuntos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 1 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  La matriz traspuesta de los adjuntos será:

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

  La matriz inversa será:

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

  Pudiendo comprobarse fácilmente que

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.- Averigua para qué valores de "a" la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

no tiene inversa. Calcula matriz inversa para a = 2 si es posible y comprueba que el producto de ambas es la matriz identidad.

Resolución:

- Hallamos en primer lugar el valor del determinante ya que si este fuera 0 la matriz no tendría inversa. Usaremos para ello el conseguir ceros en la 1ª fila y desarrollaremos por los elementos de ésta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Sumamos a la 3ª columna la 1ª

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & 4+a \end{vmatrix}$$

desarrollamos por los elementos de la 1ª fila.

$$\begin{vmatrix} a & 3 \\ 1 & 4+a \end{vmatrix} = a(4 + a)-3$$

Igualamos a cero del determinante y resolvemos la ecuación:

a5+ 4a-3 = 0 $\Rightarrow$ a = $-2 \pm \sqrt{7}$

Luego A no tiene inversa para dicho valor.

- Calculamos ahora la inversa para a = 2, es decir la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 9.$$

Para hallar la matriz inversa obtenemos la matriz de adjuntos:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -8 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz traspuesta de los adjuntos será:

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 6 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto la inversa será:

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 6 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Puede comprobarse fácilmente que :

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 6 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.- Dada la matriz M(a)

$$\mathbf{M(a)} = \begin{pmatrix} \mathbf{2-a} & \mathbf{a-1} \\ \mathbf{2(1-a)} & \mathbf{2a-1} \end{pmatrix}$$

siendo a un parámetro
a) Calcula el producto M(2).M(3).
b) Calcula la matriz inversa de M(2).
c) Halla para qué valores de a se verifica que el determinante de la matriz M(a) es nulo.

Resolución:
a) Calculamos M(2) sustituyendo a por 2:

$$M(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

de la misma forma calculamos M(3):

$$M(3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

efectuamos el producto:

$$M(2).M(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$$

b) Comprobamos que M(2) tiene inversa, calculando su determinante:

$$M(2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

como M(2) $\neq 0$ existe matriz inversa, que hallamos a continuación:

$$[M(2)]^{-1} = \frac{1}{|M(2)|}\mathrm{Adj}[M(2)^t]$$

Como la traspuesta de A es:

$$M(2)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz de adjuntos:

$$\mathrm{Adj}[M(2)^t] = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

la inversa, será:

$$[M(2)]^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Calculamos M(a)

$$M(a) = \begin{vmatrix} 2-a & a-1 \\ 2(1-a) & 2a-1 \end{vmatrix} = (2-a)(2a-1)-2(a-1)(1-a) = a$$

Para que el determinante de M(a) sea nulo ha de ocurrir que a = 0.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 9 & 6 & -9 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.- Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Calcula la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5.- Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

6.- Averigua para qué valores del parámetro "a" la matriz no tiene inversa. Calculad la matriz inversa de A para a = 2 si ello es posible, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Solución: $a = -\frac{1}{2}$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

7.- Averigua para qué valores de *a* la matriz no tiene inversa. Calcula matriz inversa para a = 1 si es posible y comprueba que el producto de ambas es la matriz identidad.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solución: a = 2,

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.- Calcula la inversa de la matriz cuando exista.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a & 0 & a+1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: a ¹ 2

$$A^{-1} = \frac{1}{2-a} \begin{pmatrix} 0 & -3 & a+1 \\ 2-a & 3a & -a^2-a \\ 0 & 2 & -a \end{pmatrix}$$

9.- Averigua para qué valores de *a* la matriz A no tiene inversa. Calcula matriz inversa para a = 2 si es posible y comprueba que el producto de ambas es la matriz identidad.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

A tiene inversa cualquiera que sea el valor de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 12 & 6 & -3 \\ -8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

10.- Averigua para qué valores del parámetro *"a"* la matriz A no tiene inversa. Calcula matriz inversa para a = 1 si es posible y comprueba que el producto de ambas es la matriz identidad.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 4 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

Solución: a = 2,

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

2.4.- ACTIVIDADES DEL TEMA

1.- Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: 42

2.- Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución: 36

3.- Halla el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Solución: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

4.- Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1-b & 2b+1 & 2b+2 \\ b & b & 0 \\ 2 & b+1 & b-1 \end{vmatrix}$$

Solución: $-b(b^2-3b+2)$

5.- Averigua el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

Solución: 4a+1

6.- Averigua el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

Solución: abc

7.- Resuelve la ecuación

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0.$$

Solución: x = 0, x = -1,

8.- Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución: x = 1

9.- Resuelve la ecuación $|A - xI| = 0$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, I la matriz identidad de orden 3 y x0 | la incógnita.

Solución: x = 1, x = 0, x = 4.

10.- Calcula el valor de *a* para que el siguiente determinante valga -1

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: a = 3.

11.- Calcula el valor de a para que el siguiente determinante valga -1:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: a = 3

12.- Demuestra la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & c^3 & d^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

13.- Sea A una matriz cuadrada tal que $A^3 = I$.)Cuánto vale $|A|$? Si es $A \neq I$.)Cuánto vale $|A|$?

Solución: Si $A^3 = I$ Þ $|A|$ =1. Si $A^n = I$ Þ $|A|$ =1 si n impar, $|A|$ = "1 si n par.

14.- Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución: -295

15.- Una matriz cuadrada A verifica la relación $A^2 = A$. Demuestra que entonces $|A| = 0$ ó $|A| = 1$.

16.- Halla el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Solución: $(x + 1)^4$

17.- Supongamos que c_1, c_2, c_3 y c_4 son las cuatro columnas de una matriz cuadrada A cuyo determinante vale 7. Obtén razonadamente:
a) El determinante de la matriz 3A.
b) El determinante de la matriz A^{-1}.
c) El determinante de la matriz cuyas columnas son c_1+c_3, c_2+2c_3, c_3+3c_4, y c_4
Solución: a) $\det(3A) = 3^4.7 = 567$. b) $\det(A^{-1}) = 1/7$. c) $\det(c_1+c_3, c_2+2c_3, c_3+3c_4, c_4) = 7$

18.- Dada la matriz $M= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -2 & á & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ determina los valores de α para los que no tiene inversa

Solución: Para $\alpha = -7$. *A no tendrá inversa.*

19.- Averigua para qué valores de *a* la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ no tiene inversa. Calcula matriz inversa para a=2 si es posible y comprueba que el producto de ambas es la matriz identidad.

Solución: $a = 0$, $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

20.- Calcula el rango de $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2a \end{pmatrix}$, según los valores de a

Solución: Si $a \neq 0$, $a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = 3$. Si $a = 0$ ó $a = 1 \Rightarrow rg(A) = 2$

21.- Calcula el rango de $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$, según los valores de a

Solución: Si $a \neq 0$, $a \neq -3 \Rightarrow rg(A) = 3$. Si $a = -3 \Rightarrow rg(A) = 2$. Si $a = 0 \Rightarrow rg(A) = 1$

22.- Calcula el rango de la matriz A, según los valores de a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solución: Si $a = 1 \Rightarrow rg(A) = 1$. Si $a = -1 \Rightarrow rg(A) = 2$. Si $a \neq 1, a \neq -1 \Rightarrow rg(A) = 3$

23.- Resuelve la ecuación matricial XA =B + C, donde:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

Solución: $(B+C)A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&2\\1&1&2\\2&-2&4\end{pmatrix}$

24.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$, estudia si existe una matriz $X=\begin{pmatrix}a&c&a\\b&d&c\\c&a&b\\d&b&d\end{pmatrix}$ de modo que A.X = I (I es la matriz identidad 3x3).

Solución: No existe

25.- Demuestra que si A y B son matrices invertibles, se cumple $(A.B)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. Supuesto que exista A^{-1},)se cumple que $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$?,)y que $(A^3)^{-1}=(A^{-1})^3$?

Solución: Sí, Sí

26.- Para una matriz cuadrada A, si A es invertible, con det(A)=5)Cuánto vale $\det(A^{-1})$?.

Solución: $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{5}$

27.- Sea A una matriz mxn.)Existe otra matriz B tal que AB sea una matriz fila?.

Solución: No.

28.- Estudia para qué valores de *a* la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\2&1&a+1\\3&-2&a-4\end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa.

Solución: $a\neq 3,\ A^{-1}=\dfrac{1}{9-3a}\begin{pmatrix}3a-2&-3a+4&1\\a+11&-2a-4&a-1\\7&5&-1\end{pmatrix}$

29.-Sea A la matriz $A=\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}$. Comprueba que se verifica $A^2-2A+I=0$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Usando la igualdad anterior, calcula razonadamente A^{-1} y A^4.

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&4&-2\\-2&3&-1\\4&-4&3\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}17&-16&8\\8&-7&4\\-16&16&-7\end{pmatrix}$

30.- Sin desarrollar el determinante, demuestra que $\begin{vmatrix}a+2b&a&a+b\\a+b&a+2b&a\\a&a+b&a+2b\end{vmatrix}=9b^2(a+b)$.

31.- Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula el determinante de A.C; ¿tiene inversa A.C?.

Solución: $|A.C|$ = 0; no tiene inversa

TEMA 3

3.- SISTEMAS DE ECUACIONES

3.1.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1.- Definiciones

- Una **ecuación lineal** es una ecuación en la que todas las incógnitas son de primer grado.

- Dos ecuaciones son **equivalentes** cuando tiene la misma solución. Para obtener una ecuación equivalente a una dada podemos sumar o restar la misma expresión en ambos miembros de la ecuación, o bien multiplicarlas o dividirlas por el mismo número.

- Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones con incógnitas de primer grado de las cuales queremos obtener una solución común. Serán equivalentes dos sistemas cuando tiene la misma solución.

- Un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar como un conjunto de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  Siendo:
  - $\mathbf{a_{ij}}$ los coeficientes del sistema
  - $\mathbf{b_i}$ los términos independientes
  - $\mathbf{x_j}$ las incógnitas del sistema.

- Una **solución del sistema** es un conjunto de valores de las incógnitas, s_j, que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.

- Un sistema es **homogéneo** si todos los términos independientes son nulos.

2.- Expresión matricial.

Otra forma de expresar el sistema es en notación matricial como A.X = B, es decir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Por lo tanto resolver el sistema, es hallar una matriz A^{-1} tal que: $X = A^{-1}.B$

3.- Clasificación de un sistema

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener o no solución. Según las soluciones será:

- **Incompatible***:* Si no existe solución
- **Compatible determinado***: S*i la solución es única
- **Compatible indeterminado***:* Si existen infinitas soluciones.

EJEMPLOS

1.- Averigua si los sistemas siguientes son lineales:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x^2 + 3y = 12 \\ -4x - 2y^3 = -10 \end{cases}$

Resolución:

- Sí lo es el sistema a) ya que en ambas ecuaciones las incógnitas son de primer grado.

- No lo es el sistema b) ya que en la primera ecuación existe el término $3x^2$ que es de segundo grado y en la segunda existe el término $-2y^3$ que es de tercer grado.

2.- Averigua si los sistemas siguientes son equivalentes:

$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ **(I)**

$\begin{cases} 3x + 3y = 12 \\ -4x - 2y = -10 \end{cases}$ **(II)**

Resolución:
Sí lo son ya que la primera ecuación del sistema (I) multiplicada por 3 se transforma en la primera ecuación del sistema (II). la segunda ecuación del sistema (I) multiplicada por -2 se transforma en la segunda ecuación del sistema (II).

3.- Pon en forma matricial el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Resolución:
Expresado matricialmente queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.- Pon en la forma normal el sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolución:
Operando en las matrices queda el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

5.- Mezclando tres productos, digamos X, Y y Z, debemos obtener 10 kg de pienso que contenga 19 unidades de hidratos de carbono y 12 unidades de grasa. Sabiendo que cada kilo del producto X contiene una unidad de hidratos de carbono y dos unidades de grasa, cada kilo del producto Y contiene dos unidades de hidratos de carbono y una unidad de grasa, y cada kilo del producto Z contiene cuatro unidades de hidratos de carbono y nada de grasa,)cuántos kilos de cada producto debemos poner?

Resolución:
Si realizamos una tabla con estos datos tendremos:

	Producto X	Producto Y	Producto Z	Totales
Hidratos Carbono	1	2	4	19
Grasa	2	1	0	12

y llamamos:
x al número de kilos del producto X
y al número de kilos del producto Y
z al número de kilos del producto Z

Obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ x+2y+4z=19 \\ 2x+y \quad =12 \end{array}\right\}$$

que resolvemos obteniendo un sistema triangular equivalente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ y+3z=\ 9 \\ -y-2z=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ y+3z=\ 9 \\ z=\ 1 \end{array}\right\}$$

Quedan las ecuaciones:
$y + 3 = 9 \Rightarrow y = 6$
$x + 6+1 = 10 \Rightarrow x = 3$

Luego utilizaremos:
3 Kg de producto X
6 Kg de producto Y
1 Kg de producto Z

6.- Dos marcas de detergente, *Blancol y Límpez,* se disputan el mercado de una cierta región. A comienzos de año ambas lanzan sendas campañas de publicidad con objeto de captar clientes. A lo largo de la campaña, *Blancol* logra atraer al 20% de los clientes que tenía *Límpez* a comienzos del año. A su vez, *Límpez* consigue captar el 30% de los clientes que tenía *Blancol* a comienzas del año. Si al final de las campañas la marca *Límpez* tiene el 55% del mercado,)qué porcentaje tenía al comienzo?

Resolución:
Sean:
X el número de clientes iniciales de Blancol al comienzo del año.
Y el número de clientes iniciales de Límpez al comienzo del año.

Representamos el problema en el siguiente esquema:

	Situación inicial	Final de campaña
BLANCOL	X	X + 0,2Y-0,3X
LIMPEZ	Y	Y-0,2Y+0,3X

Evidentemente x + y es el número total de clientes iniciales y finales. Al final de la campaña tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+0{,}2\,y-0{,}3\,x=0{,}7\,x+0{,}2\,y=0{,}45(x+y) \\ y-0{,}2\,y+0{,}3\,x=0{,}8\,y+0{,}3\,x=0{,}55(x+y) \end{array}\right\}$$

Siendo ambas ecuaciones equivalentes.

De la 2ª ecuación obtenemos:
0,3x +0,8y = 0,55x +0,55y $\Rightarrow$ 30x +80y -55x -55y =0

obtenemos de la primera:
0,7x +0,2y = 0,45x +0,45y $\Rightarrow$ 70x +20y -45x -45y =0 $\Rightarrow$ 25x-25y =0 $\Rightarrow$ x = y

Al inicio de la campaña tenían igual número de clientes con porcentaje del 50%.

7.- En una cierta cafetería, los ocupantes de una mesa abonaron 355 Ptas. por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de otra mesa pagaron 655 Ptas. por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.
a))Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?
b) Con los datos que se dan,)puedes calcular cuánto vale un café? Justifica la respuesta.

Resolución:
Si llamamos:
x al precio de un café
y al precio de una tostada
z al precio de un refresco

tendremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,x+y+2\,z=355 \\ 4\,x+3\,y+3\,z=655 \end{array}\right\} \text{(I)}$$

a) Hemos de calcular el importe, I, de dos cafés y tres tostadas:
I = 2x+ 3y
para calcularlo vemos si es posible expresar I como combinación lineal de las ecuaciones del sistema anterior, es decir si es posible la expresión:
2x+ 3y = α(2x+ y+ 2z) +β(4x+ 3y+ 3z)

reordenando en función de los coeficientes de x, y, z:
2x+ 3y = (2α+ 4β)x+(α+3β)y + (2α+ 3β)z

igualando coeficientes obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2=2á\ +4â \\ 3=á\ +3â \\ 0=2á\ +3â \end{array}\right\}$$

Sistema con solución $\alpha = -3$, $\beta = 2$ y teniendo en cuenta el sistema (I):
$I = 355\alpha + 655\beta = 355(-3) + 655.2 \Rightarrow I = 245$ pta.

b) Con los datos que nos dan , *no es posible calcular el precio de un café*, ya que obtenemos un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, es decir un sistema compatible indeterminado, y por tanto con infinitas soluciones.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Indica qué ecuaciones de las siguientes son lineales.)Por qué?.
a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$
b) $\sqrt{3x} + 2x - 2y + 3 = 0$
c) $2x - 2y + 3 = 0$
d) $\sqrt{3}\, y + 3x = 0$
Solución: c) y d).

2.- Averigua si los sistemas siguientes son equivalentes:
a) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ -x + 2z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x + y + z = -4 \\ x + y - z = 3 \\ -x + 2z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y + z = -4 \\ y - z = 3 \\ -x + 2z = 1 \end{cases}$
Solución: a) Sí, b) No.

3.- Indica cuáles de las transformaciones siguientes son válidas para transformar un sistema en otro equivalente:
a) Sustituir todas las ecuaciones por la resultante de sumar todas ellas.
b) Sustituir las dos primeras ecuaciones por la resultante de sumarlas.
c) Sustituir la primera ecuación por la resultante de sumarla a la segunda.
d) Sustituir la primera ecuación por la resultante de multiplicarla por 2.
e) Sustituir la segunda ecuación por la resultante de multiplicar la primera por 2.
Solución:
Son válidas c) y d).

4.- Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuyas soluciones sean enteras y halla otros dos sistemas equivalentes a él.

5.- Escribe un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuyas soluciones sean enteras y halla otros tres sistemas equivalentes a él.

6.- Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas. Ponga un ejemplo en los casos en que sean falsas:
a) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es siempre compatible.
b) Un sistema, de dos ecuaciones con tres incógnitas, compatible ha de ser indeterminado.
c) Para que un sistema sea incompatible ha de tener distinto número de ecuaciones que de incógnitas.
Solución:
a) Falsa, b) Cierta, c) Falsa.

7.- Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pon un ejemplo en los casos de falsedad:
a) Un sistema de cuatro ecuaciones con dos incógnitas es siempre incompatible.
b) Un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas y compatible ha de ser indeterminado.

c) Para que un sistema sea incompatible ha de tener distinto número de ecuaciones que de incógnitas.
Solución:
a) Falsa, b) Cierta, c) Falsa.

8.- Si tenemos un sistema compatible indeterminado con dos ecuaciones lineales con dos incógnitas)se puede conseguir un sistema compatible determinado añadiendo una tercera ecuación?
Solución: Sí.

9.- Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que sea incompatible y comprueba la incompatibilidad.
Solución:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

10.- Expresa en forma matricial el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

11.- Expresa en la forma normal el sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

12.- La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas es igual a la suma de las decenas más el doble de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras el número disminuye en 297 unidades. Calcular dicho número.
Solución: N = 421

13.- La suma de las edades de un padre y sus dos hijos es de 73 años en el momento actual. Dentro de 10 años la edad del padre será el doble de la del hijo menor. Hace 12 años la edad del hijo mayor era el doble de la edad de su hermano Hallar la edad de cada uno.
Solución: 15, 18 años los hijos; 40 años, el padre.

14.- Un señor acertó cinco números en la lotería primitiva, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a su hijos que si averiguaban los otros tres se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era diez unidades menor que el tercero, y la suma de los otros tres era 24.)Cuáles eran los tres números que faltan?.
Solución: 4, 9 y 11

15.- En las fiestas de un determinado lugar había tres espectáculos A, B y C cada uno con un precio distinto. Un chico fue dos veces a A, una vez a B y una vez a C gastándose 1300 pts; otro asistió tres veces a y una vez a C y se gastó 1800 pts y un tercero entró una vez a cada espectáculo lo que le costó 800 Ptas.)Cuánto valía la entrada a cada uno de ellos?.
Solución: A = 500 pts, B = 0 pts y C = 300 pts

3.2.- CLASIFICACIÓN DE UN SISTEMA

1.- Definición

Dado un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \qquad \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se pueden formar:

- **Matriz del sistema, A,** con los coeficientes de las incógnitas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

- **Matriz ampliada, A*,** con los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Clasificar un sistema consiste en averiguar que tipo de soluciones tiene el sistema mediante el estudio de la matriz de coeficientes del sistema y ampliada.

2.- Teorema de Rouché

El **Teorema de Rouché-Frobenius** se utiliza para averiguar si un sistema es compatible (tiene o no solución). Su enunciado es el siguiente:
"La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sea compatible es que el rango(A) =rango(A*)".

El teorema permite discutir y clasificar un sistema sin necesidad de resolver el sistema:

- Si rg(A) = rg(A*) = n, el sistema es compatible determinado (SCD).
- Si rg(A) = rg(A*) < n, el sistema es compatible indeterminado (SCI).
- Si rg(A) ≠ rg(A*), el sistema es incompatible, no tiene solución (SI).

3.- Sistemas homogéneos

Un sistema es **linealmente homogéneo** cuando todos los términos independientes son nulos. Son siempre sistemas compatibles (tienen solución), teniendo como mínimo la solución trivial o impropia, es decir $x_1 = 0, \dots, x_2 = 0$.
Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius, podemos afirmar que:

- Si rg(A) = rg(A*) = n, el sistema es compatible determinado y su solución es la trivial.
- Si rg(A) = rg(A*) < n, el sistema es compatible indeterminado y admite infinitas soluciones.

Por lo tanto si $|A| = 0$ el sistema admite soluciones distintas de la trivial, en caso contrario, únicamente la trivial.

EJEMPLOS

1.-Estudia la compatibilidad y número de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x+2y+z=1} \\ \mathbf{2x+y+2z=2} \\ \mathbf{3x+3y+3z=3} \end{cases}$$

Resolución:
La matriz del sistema y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible ya que rg(A) =2 y rg(A*) = 2 e indeterminado ya que el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas.

2.- Estudia la compatibilidad y número de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x+2y+z=1} \\ \mathbf{2x+y+2z=2} \\ \mathbf{3x+3y+3z=4} \end{cases}$$

Resolución:
La matriz del sistema y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible ya que rg(A) =2 y rg(A') = 3.

3.- Estudia la compatibilidad y número de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{3x+5y+z=2} \\ \mathbf{5x+3y+z=2} \\ \mathbf{x+5y+3z=2} \end{cases}$$

Resolución:
El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36$$

El sistema es compatible determinado ya que rg(A) = rg(A*) = 3.

4.- Estudia la compatibilidad y número de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{3x+5y+z=0} \\ \mathbf{5x+3y+z=0} \\ \mathbf{x+5y+3z=0} \end{cases}$$

Resolución:

Es un sistema homogéneo y por lo tanto será un sistema compatible. Como determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$$

El sistema es compatible determinado con solución trivial.

5.- Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del parámetro a:

$$\begin{cases} \mathbf{x + ay - z = 1} \\ \mathbf{2x + y - az = 2} \\ \mathbf{x - y - z = a - 1} \end{cases}$$

Resolución:

La matriz del sistema y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

El rg(A) es al menos 2 ya que el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow |A| = -(a^2-a-2)$ que será nulo para a = 2 ó a = -1.

Tenemos los siguientes casos:

- $a \neq 2$ y $a \neq -1$
  rg(A) = rg(A*) = 3. El sistema es compatible determinado.

- a = -1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

  rg(A) =2 y rg(A*) = 3. El sistema es incompatible

- a = 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  rg(A) = rg(A*) = 2. El sistema es compatible indeterminado.

6.- Discute, según los valores de a, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{ax + y + z = 1} \\ \mathbf{x + ay + z = 1} \\ \mathbf{x + y + az = 1} \end{cases}$$

Resolución:

Hallemos el valor del determinante de A

A = $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ = a^3-3a+2= $(a-1)^2$.(a+2)

- Si a = 1, quedan las matrices:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rg(A) = 1, rg(A*)=1, ya que las tres filas son iguales. Tenemos un sistema de 1 ecuación con 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado

- Si a = -2, quedan las matrices:

A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ A* = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

rg(A) = 2, ya que el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ 0. Por otro lado rg(A*)=3, ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Tenemos un sistema incompatible.

- Si a ≠ -2 y a ≠1, rg(A) = rg(A*) =3. Tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, el sistema es compatible determinado.

7.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{ax + y + z = a} \\ \mathbf{x + ay + z = 1} \\ \mathbf{x + y + az = 1} \end{array}\right\}$$

Resolución:
El determinante de la matriz de coeficientes es:

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ = a^3-3a+2 =$(a-1)^2$(a+2)

- Si a ≠ 1 y a ≠ -2 es sistema compatible determinado, pues: rg(A) = rg(A*) = 3.

- Si a = 1, las tres ecuaciones coinciden:
  x + y + z = 1
  Es un sistema compatible indeterminado.

- Si a = -2, queda un sistema compatible indeterminado

8.- Discute, según los valores de a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x - y + az = 5 \\ 3x + y + z = -1 \\ x \quad + 2z = 3 \\ 2y - z = -2 \end{array}\right\}$$

Resolución:
Formamos las matrices A y A*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -5 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como A* es una matriz cuadrada, calculamos su determinante:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a & -5 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 18(-2 - a)$$

- Si $a \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0$, rg(A*) 4 y rg(A) < 4, luego el sistema es incompatible.
- Si $a = -2 \Rightarrow |A| = 0$ y como el menor:

  $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

  rg(A) = rg(A*) = 3, el sistema es compatible determinado.

9.- Considera el sistema dado por las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ ax + 2y + bz = 4 \\ ax + by + az = 4 \end{array}\right.$$

Discútelo según los valores de a y b.

Resolución:
Para estudiar el sistema tenemos las matrices del sistema y ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ a & 2 & b & 4 \\ a & b & a & 4 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & b \\ a & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2-a & b-a \\ a & b-a & 0 \end{vmatrix} = -(b - a)^2$$

a) Si $a \neq b \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = rg(A') =3 y, por el Teorema de Rouché, el sistema tendría solución única (SCD).
b) Si a = b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ a & 2 & a & 4 \\ a & a & a & 4 \end{pmatrix}$$

- Si a = b = 2 $\Rightarrow$ rg(A) =1, rg(B) =2 pues $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. El sistema es incompatible

- Si a = b = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(B) = 2. El sistema es compatible indeterminado.

- Si a = b $\neq \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ $\Rightarrow$ rg(A) = 2, rg(B) =3. El sistema es incompatible

10.- Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{a^2} \end{pmatrix}$$

determina para qué valores de a es compatible.

Resolución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes. Su determinante es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3-3a+2 = (a-1)^2(a+2)$$

- Si a05 -{1,-2}, rg(A) = rg(A*) = 3, y por el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado.
- Si a = 1, rg(A) = rg(A*) = 1, el sistema es compatible determinado.
- Si a = -2, rg(A) = 2, rg(A*) = 3, el sistema es incompatible.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.-Estudia la compatibilidad y número de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Solución: SCI homogéneo, Infinitas soluciones distintas de la trivial.

2.- Estudia la compatibilidad y número de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

Solución: Sistema incompatible.

3.- Estudia la compatibilidad y número de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ x + 5y + 3z = 2 \end{cases}$$

Solución: Sistema compatible determinado, solución única.

4.- Estudia la compatibilidad y número de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y + z = 1 \\ 5x + 3y + z = 1 \\ 8x + 8y + 2z = 2 \end{cases}$$

Solución: Sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones.

5.- Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del parámetro a:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ay - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Solución: $a \neq -8$, *SCD,* $a = -8$ *SCI*

6.- Discute, en función de **a** la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = a + 2 \\ x - ay + z = 1 \\ ax + y + z = 3 \end{cases}$$

Solución: $a \neq 1$, *SCD;* $a = 1$, *SCI.*

7.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones discute las soluciones según los diversos valores del parámetro *a*, utilizando el teorema de Rouché-Frobenius.

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ (2 - a)x + (2a - 2)y = a - 1 \end{cases}$$

Solución: $a \neq 2$, *SCD;* $a = 2$, *SI.*

8.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones discute las soluciones según los diversos valores del parámetro *a*, utilizando el teorema de Rouché-Frobenius.

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \end{cases}$$

Solución: $a \neq 1$ *y* $a \neq -2$ *SCD,* $a = 1$ *SI, Si* $a = -2$ *SCI.*

9.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones discute las soluciones según los diversos valores del parámetro *a*, utilizando el teorema de Rouché-Frobenius.

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = b \\ x + y + z = 5 \\ 4x - y + az = -10 \end{cases}$$

Solución: $a \neq -8$ *SCD,* $a = -8$, $b \neq 0$ *SI, Si* $a = -8$, $b = 0$ *SCI.*

10.- Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3a \end{cases}$$

Solución: $a \neq 2$ *incompatible,* $a = 2$ *SCD.*

3.3.- MÉTODO DE CRAMER

1.- Definición

El método de Cramer permite obtener la solución de un sistema de ecuaciones expresado en forma matricial. A.X = B. La solución se obtiene mediante el producto matricial $X = A^{-1}.B$

Sólo es aplicable cuando el rango del sistema es igual al número de ecuaciones.

2.- Cálculo de soluciones

Cada solución será igual al cociente entre el determinante del sistema donde se ha cambiado la columna correspondiente por la columna de términos independientes y el determinante del sistema. Es decir:

$$x_i = \frac{A_i}{|A|}$$

3.- Soluciones paramétricas

Si el número de ecuaciones es menor que el rango del sistema se toman las incógnitas restantes como parámetros y se resuelve el sistema en función de éstas.

EJEMPLOS

1.- Resuelve, por el método de Cramer, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{x - 2y = 5} \\ \mathbf{x + y = 7} \end{cases}$$

Resolución:

Calculamos el valor del determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Como rg(A) = rg(A') = 2, el sistema es compatible determinado y se puede resolver aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{A_x}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{19}{3}$$

$$y = \frac{A_y}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2}{3}$$

Que geométricamente es el punto: $P = \left(\frac{19}{3}, \frac{2}{3}\right)$

2.- Resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 5y + z = 2} \\ \mathbf{5x + 3y + z = 2} \\ \mathbf{x + 5y + 3z = 2} \end{cases}$$

Resolución:
Calculamos el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$$

Como el determinante de A es no nulo, el sistema es compatible determinado, con solución única que obtenemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{A_x}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-36} = \frac{-8}{-36} = \frac{2}{9}$$

$$y = \frac{A_y}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-36} = \frac{-8}{-36} = \frac{2}{9}$$

$$z = \frac{A_z}{|A|} = = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{-36} = \frac{-8}{-36} = \frac{2}{9}$$

Que geométricamente es el punto:

$$P = \left(\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

4.- Resuelve, aplicando el método de Cramer, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{3x - 2y + z = 2} \\ \mathbf{2x + 5y - 3z = 15} \\ \mathbf{11x - y \quad = 21} \end{cases}$$

Resolución:

Como existe un menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y el determinante es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

El rango(A) = 2.

El rango de A* lo calculamos mediante el determinante formado por las columnas 1ª, 3ª y 4ª.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 15 \\ 11 & 0 & 21 \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto, rg(A') = 2.

Ahora podemos prescindir de la segunda ecuación y pasar la y al segundo miembro (en este caso concreto podíamos haberlo hecho con cualquier ecuación y cualquier incógnita). Queda el sistema:

$$\begin{cases} 3x+z = 2+2y \\ 11x = 21+y \end{cases}$$

Con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = -11.$$

Con soluciones:

$$x = \frac{A_x}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2+2y & 1 \\ 21+y & 0 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{21+y}{-11} = \frac{21+y}{11}$$

$$z = \frac{A_z}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2+2y \\ 11 & 21+y \end{vmatrix}}{-11} = \frac{41-19y}{-11} = \frac{19y-41}{11}$$

Tomando, y = λ, queda la solución :

$$\left(\frac{21+ë}{11},\ ë,\ \frac{19ë-41}{11}\right)$$

5.- Aplica la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x - y + 3z = 1} \\ \mathbf{3x - y + 2z = 3} \\ \mathbf{-2y + 7z = 10} \end{cases}$$

Resolución:

Calculemos los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3.$$

Como rg(a) = 2 < rg(A*), el sistema es incompatible. No tiene solución.

6.- Resuelve el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x - y + z - 2t = 2} \\ \mathbf{2x + y - z - t = 1} \\ \mathbf{x - 4y + 4z - 5t = 5} \\ \mathbf{x + 5y - 5z + 4t = -4} \end{cases}$$

Resolución:

La matriz del sistema y ampliadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -4 & -5 & 5 \\ 1 & 5 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Para calcular el rango de A observamos que la tercera columna es proporcional a la segunda (3ª c = (-1).2ª c) y que la cuarta también es combinación lineal de otras dos(4ª c = 2ª c – 1ª c). Por lo tanto, rg(A)= 2.

Para calcular el rango de A* observamos que la última columna es proporcional a la cuarta (5ª c = (-1).4ª c). Por lo tanto, también rg(A*) = 2.

Obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - y = 2 - z + 2t \\ 2x + y = 1 + z + t \end{cases}$$

Siendo los determinantes

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_x = \begin{vmatrix} 2 - z + 2t & -1 \\ 1 + z + t & 1 \end{vmatrix} = 3+3t$$

$$A_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 - z + 2t \\ 2 & 1 + z + t \end{vmatrix} = -3+5z-3t$$

Es decir:

$$x = \frac{3+3t}{3} = 1+t$$

$$y = \frac{-3+5z-3t}{3}$$

La solución general, tomando z = λ y t = μ, es:

$$\begin{cases} x = 1 + \text{ì} \\ y = \dfrac{-3 + 5\text{ë} - 3\text{ì}}{3} \\ z = \text{ë} \\ t = \text{ì} \end{cases}$$

7.- Discute el sistema siguiente según los valores del parámetro "a" y calcula la solución para a = -1.

$$\begin{cases} \mathbf{ax + y + z = a} \\ \mathbf{x + ay + z = a + 2} \\ \mathbf{x + y + az = -2(a+1)} \end{cases}$$

Resolución:
Formamos las matrices del sistema y ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & a & -2(a+1) \end{pmatrix}$$

Hallamos el valor del determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3-3a+2 = (a-1)^2(a+2)$$

Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius obtenemos que:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado rg(A) =rg(A*) =3.
- Si a = 1 el sistema es incompatible ya que rg(A) =1 y rg(A*) =2.
- Si a = -2 el sistema es compatible indeterminado ya que rg(A)= =rg(A*)=2.

Para a = -1 el sistema es compatible determinado y lo resolvemos utilizando el método de Cramer. El determinante es:
$|A| = a^3-3a+2=(-1)^3-3(-1)+2=4$

Las soluciones son:

$$x = \frac{A_X}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{A_y}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{A_z}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Determinando el punto
$P = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

8.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro "a" y resuélvelo cuando sea posible.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{ax + y + z = a} \\ \mathbf{x + ay + z = 1} \\ \mathbf{x + y + az = 1} \end{aligned}\right\}$$

Resolución:
El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3-3a+2 =(a-1)^2(a+2)$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado.

Hallamos su solución utilizando la Regla de Cramer. Siendo las soluciones:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2.(a+2)} = \frac{(a-1)^2(a+2)}{(a-1)^2(a+2)} = 1$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)^2.(a+2)} = \frac{0}{(a-1)^2(a+2)} = 0$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2.(a+2)} = \frac{0}{(a-1)^2(a+2)} = 0.$$

Es decir, cualquiera que sea el valor de $a \notin \{-2, 1\}$ la solución es (1, 0, 0)

- Si a = 1, las tres ecuaciones coinciden:
  $x + y + z = 1$

  Luego es un sistema compatible indeterminado.

- Si a = -2, el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, queda un sistema compatible indeterminado ya que $|A| = 0$, así como los menores [c_1, c_2, c_4] y [c_2, c_3, c_4] que resolvemos por el método de Cramer. Prescindimos de la tercera ecuación y pasamos la z al tercer miembro. Queda el sistema:

  $$\left.\begin{array}{r} -2x + y = -2 - z \\ x - 2y = 1 - z \end{array}\right\}$$

  Con determinante

  $$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

  Con soluciones:

  $$x = \frac{A_x}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2-z & 1 \\ 1-z & -2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3+z}{3} = 1 + z$$

  $$y = \frac{A_y}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2-z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z}{3} = z$$

  Tomando, $z = \lambda$, queda la solución:
  $(1+\lambda, \lambda, \lambda)$, $\lambda \in R$

9.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones encuentra e interpreta geométricamente las soluciones según los diversos valores del parámetro "a", utilizando el teorema de Rouché-Frobenius.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + \quad y + z = 1} \\ \mathbf{x - \quad 2y + z = 1} \\ \mathbf{(2-a)x + (2a-2)y \quad = a - 1} \end{array}\right.$$

Resolución:

Mediante el método de Cramer estudiamos primero el valor del determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2-a & 2a-2 & 0 \end{vmatrix} = 2(2\text{-}a)$$

- Evidentemente en el caso $|A| =$ 2(2-a) = 0 $\Rightarrow$ a $\neq$ 2 el sistema es compatible determinado ya que rg(A) = 3 y rg(A') = 3 a lo sumo. La solución será:

$$x = \frac{A_x}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ a-1 & 2a-2 & 0 \end{vmatrix}}{2-a} = \frac{a-1}{2-a}$$

$$y = \frac{A_y}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2-a & a-1 & 0 \end{vmatrix}}{2-a} = 0$$

$$z = \frac{A_z}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2-a & 2a-2 & a-1 \end{vmatrix}}{2-a} = \frac{3-2a}{2-a}$$

  es decir la solución es el punto genérico:

$$\left(\frac{a-1}{2-a},\ 0,\ \frac{3-2a}{2-a}\right)$$

- En el caso de que a = 2 , $|A| =$ 2(2-2) = 0, por lo tanto al ser el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,\ \text{rg}(A) = 2.$$

  La matriz ampliada es:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  cuyo rango es tres ya que por ejemplo el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

  luego al ser rg(A) < rg(A') el sistema es incompatible.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\frac{18}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

2.- Resuelve por el método de Cramer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y \quad = 9 \end{cases}$$

Solución: x =7 , y = 2 , z =-5

3.- Resuelve aplicando el método de Cramer, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = 7 \\ 2x - y + 15z = 3 \\ x - 8y - 21z = 11 \end{cases}$$

Solución: No es posible, ya que es incompatible

4.- Resuelve, aplicando el método de Cramer, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = 15 \\ 11x - y \quad = 21 \end{cases}$$

Solución: $x = \dfrac{21 + l}{11}$, $y = l$, $z = \dfrac{19l - 41}{11}$

5.- Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x - y + z - 2t = 2 \\ 2x + y - z - t = 1 \\ x - 4y + 4z - 5t = 5 \\ x + 5y - 5z + 4t = -4 \end{cases}$$

Solución: (1+F, 1+l+F, l, F,)

6.- Calcula "a" para que el siguiente sistema se pueda resolver por Cramer y resuélvelo:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 8z = a \\ ax - 5y + z = 7 \\ ay - z = -2 \end{cases}$$

Solución:

$$x = \frac{-a^2 - 51a + 60}{-8a^2 - 7a + 15},\ y = \frac{a^2 + 16a - 15}{-8a^2 - 7a + 15},\ z = \frac{a^2 - 2 + 30}{-8a^2 - 7a + 15}.$$

7.- Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea posible.

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= a \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Si a ¹ 1 y a ¹ -2, SCD(1,0,0),

Si a = 1: x + y + z = 1, a = 2, (1 + l, l, l)

3.4.- MÉTODO DE GAUSS

1.- Definición

El método de Gauss de resolución de sistemas de ecuaciones consiste en transformar un sistema en otro sistema escalonado equivalente. Por comodidad adoptamos una forma matricial para la representación del sistema. Los elementos de la matriz serán los coeficientes de las ecuaciones y, separados por una línea vertical, la columna de los términos independientes.

Para conseguir una matriz triangular se pueden utilizar las siguientes transformaciones:

Son válidas las siguientes transformaciones:

- Permutar dos filas, para intercambiar ecuaciones.
- Permutar dos columnas para cambiar el orden de las incógnitas.
- Multiplicar o dividir una fila o columna por un número distinto de cero.
- Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.
- Sumar a una fila la combinación lineal de otras.

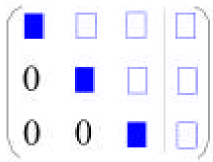
2.- Clasificación de sistemas

Si suponemos que # significa un número distinto de 0 y $*$ significa un número cualquiera obtenemos mediante las transformaciones anteriores tres tipos de sistemas:

- **Compatible y determinado**

  Hay tantas ecuaciones válidas como incógnitas. De forma escalonada se van obteniendo sucesivamente las soluciones. Tiene solución única.

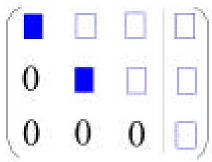
  Su esquema es el de la figura adjunta.



- **Compatible indeterminado**

  Hay menos ecuaciones válidas que incógnitas, las incógnitas sobrantes se pasan al segundo miembro y las demás se dan en función de ellas. Tiene infinitas soluciones.

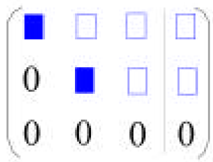
  Su esquema es el de la figura adjunta.



- **Incompatible**

  Alguna de las filas está formado por ceros, salvo el correspondiente a los términos independientes, se ha llegado a una igualdad imposible.

  Su esquema es el de la figura adjunta.



EJEMPLOS

1.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$$

Resolución:
Obtenemos la matriz ampliada del sistema que es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Situamos el pivote cambiando la 3ª columna por la 1ª y la 1ª fila por la 3ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 20 fila la 1ª x (-1). A la 3ª fila la 1ª x (-2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -7 & -3 \\ 0 & -2 & -7 & -9 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 3ª fila la 2ª x (-1).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Por lo tanto obtenemos un sistema incompatible ya que claramente $0 \neq -6$.

2.- Resuelve por el Método de Gauss el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x - 5y + 3z = 4} \\ \mathbf{x - 2y + z = 3} \\ \mathbf{5x + y + 7z = 11} \end{array}\right.$$

Resolución:
Obtenemos la matriz de coeficientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right)$$

Cambiamos 1ª y 2ª fila para obtener un pivote sencillo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right)$$

Restamos a la 2ª fila la 1ª x2 y a la 3ª la 1ª x 5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 3ª fila la 2ª x 11.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right)$$

Queda por lo tanto el sistema compatible determinado

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -y + z = -2 \\ 13z = -26 \end{cases}$$

Es un sistema compatible determinado con solución (5,0,-2)

3.- Resuelve por el método de Gauss el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x - 3y + 7z = 10} \\ \mathbf{5x - y + z = 8} \\ \mathbf{x + 4y - 10z = -11} \end{cases}$$

Resolución:

Ponemos el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 5 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & -10 & -11 \end{array}\right)$$

Restamos a la 2ª fila la 1ª x 5 y a la 3ª la 1ª.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{array}\right)$$

Después intercambiamos 2ª y 3ª filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \\ 0 & 14 & -34 & -42 \end{array}\right)$$

Restamos a la 3ª fila la 2ª x 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Anulamos la 3ª fila

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10 \\ 0 & 7 & -17 & -21 \end{array}\right)$$

Queda el sistema:

$$\begin{cases} x - 3y = 10 - 7z \\ 7y = -21 + 17z \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado, que tomando z = 7λ tiene solución: (1+ 2λ, -3 + 17λ, 7λ).

4.- Discute la solución el siguiente sistema según los valores del parámetro a. Resuelve para el caso de que a = 1.

$$\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 1} \\ \mathbf{x + 2y + 2z = 1} \\ \mathbf{x + (a + 2)y + 2az = -8} \end{cases}$$

Resolución:

- Obtenemos la matriz del sistema que es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & 2a & -8 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 2ª fila la 1ª x (-1) y a la 3ª fila la 1ª x (-1).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 2a-1 & -9 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 3ª fila la 2ª x [-(a + 1)].

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & -9 \end{array}\right) \text{(I)}$$

La última fila es $\left(0 \quad 0 \quad a-2 \mid -9\right)$. Este sistema será compatible determinado salvo para el caso en que a-2 = 0 (a = 2) la fila sería $\left(0 \quad 0 \quad 0 \mid -9\right)$, quedándonos un sistema incompatible.

- Para a = 1, obtenemos la siguiente matriz sustituyendo el valor en (I)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{array}\right)$$

Con solución única: (1, -9, 9)

5.- Resuelve por el método de Gauss según los valores del parámetro a e interpreta geométricamente la solución del siguiente sistema de ecuaciones, caso de que no sea incompatible:

$$\begin{cases} \mathbf{5x - 11y + 9z = a} \\ \mathbf{x - 3y + 5z = 2} \\ \mathbf{2x - 4y + 2z = 1} \end{cases}$$

Resolución:

Obtenemos la matriz ampliada del sistema que es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -11 & 9 & a \\ 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Permutamos la 1ª y 2ª filas en para colocar como pivote el número 1. Cambiamos la 1ª y 3ª filas para colocar la a en la 3ª fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & a \end{array}\right)$$

Sumamos a la 2ª fila la 1ª x (-2). A la 3ª fila la 1ª x (-5)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 4 & -16 & a-10 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 3ª fila la 2ª x (-2).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array}\right)$$

La 3ª ecuación es de la forma $\left(0 \quad 0 \quad 0 \mid a-4\right)$ por lo tanto sólo será un sistema compatible en el caso de el término independiente sea 0, es decir que a - 4 ≠ 0. Luego:

- Si a ≠ 4 el sistema no tiene solución y es incompatible. Discutiríamos las posibles soluciones 2 a 2, pero no lo haremos ya que no lo pide le problema.

- Si a = 4 el sistema es compatible indeterminado (dos ecuaciones y tres incógnitas) cuya matriz ampliada es la siguiente:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \end{array}\right)$$

  Tomando z como parámetro y representándolo por λ obtenemos el sistema equivalente:

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2-5\lambda \\ 0 & 2 & -3+8\lambda \end{array}\right)$$

  Con lo cual el sistema queda como

  $$\begin{cases} x-3y = 2-5\lambda \\ 2y = -3+8\lambda \end{cases}$$

  con soluciones:

  y = $\dfrac{-3+8\lambda}{2}$

  x = $3y-5\lambda+2 = \dfrac{14\lambda-5}{2}$

  Que corresponde a la recta cuyo punto genérico es:

  $$\left(\frac{14\lambda-5}{2}, \frac{24\lambda-9}{2}, \lambda\right)$$

6.- Discute el siguiente sistema para los distintos valores de a.

$$\begin{cases} \mathbf{x + y + az = 1} \\ \mathbf{ax + (a-1)y + z = a} \\ \mathbf{x + y + z = a + 1} \end{cases}$$

Resolución:
Ponemos el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ a & a-1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 2ª fila la 1ª x (-a) y a la 3ª fila la 1ª x (-1).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a \end{array}\right)$$

- Si a = 1, la última fila es $(0 \quad 0 \quad 0 \mid 1)$, el sistema es incompatible.

- Si a ≠ 1, el sistema es compatible, determinado, y su solución es:
$$\left(\frac{a^3 - a^2 - 2a+1}{1-a},\ a^2 + a,\ \frac{a}{1-a}\right)$$

7.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro "a".

$$\begin{cases} \mathbf{x + y + z = a} \\ \mathbf{x + (1 + a)y + z = 2a} \\ \mathbf{x + y + (a + 1)z = 0} \end{cases}$$

Resolución:
Resolvemos por el método de Gauss. Su matriz de coeficientes es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 1 & 2a \\ 1 & 1 & a+1 & 0 \end{array}\right)$$

restamos a la 2ª y 3ª filas la 1ª .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & a & -a \end{array}\right)$$

- Si a ≠ 0, el sistema es compatible determinado y su solución es:
$$\begin{cases} z = -1 \\ y = 1 \\ x = a - y - z = a \end{cases}$$

  La interpretación geométrica de la solución es el punto P = (a,1,-1) donde se cortan los tres planos

- Si a = 0, el sistema es compatible indeterminado con un único plano ya que la 2ª y 3ª ec uaciones se anulan.
  x + y + z = 0 Ψ x = - y -z = -λ - μ

  donde hemos tomado z = λ, y = μ como parámetros.

  La interpretación geométrica de la solución es el plano de ecuación:
  x + y + z = 0

8.- Resuelve por el método de Gauss según los valores del parámetro a y halla la solución del siguiente sistema de ecuaciones para el caso de que sea compatible determinado:

$$\begin{cases} x + \quad y + a^2 z = 1 \\ ax + (a-1)y + z = a \\ x + \quad y + az = a + 1 \end{cases}$$

Resolución:
Obtenemos la matriz ampliada del sistema que es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a^2 & 1 \\ a & a-1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a+1 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 2ª fila la 1ª x (-a) y la 3ª fila la 1ª x (-1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a^2 & 1 \\ 0 & -1 & 1-a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a-a^2 & a \end{array}\right)$$

Es decir, será:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a^2 & 1 \\ 0 & -1 & 1-a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a(1-a) & a \end{array}\right)$$

Discutamos los posibles casos, para la última fila:

- Si a = 0 queda $\left(0 \quad 0 \quad 0 \mid 0\right)$ luego es un sistema compatible indeterminado.
- Si a = 1 queda $\left(0 \quad 0 \quad 0 \mid 1\right)$ luego es un sistema incompatible

9.- Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores del parámetro "a". Halla la solución para el caso a = 0

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + 2y + az = a^2 - 3 \end{cases}$$

Resolución:
Obtenemos la matriz del sistema que es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & a^2-3 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 3ª fila la 1ª x (-1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & a^2-4 \end{array}\right) \text{(I)}$$

Sumamos a la 3ª fila la 2ª x (-1).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & a^2-4 \end{array}\right)$$

Por lo tanto obtenemos como última fila $\left(0 \quad 0 \quad a-2 \mid a^2-4\right)$.

- El sistema será compatible determinado salvo para el caso en que a = 2 ya que la última fila sería $\left(0 \quad 0 \quad 0 \mid 0\right)$ quedándonos un sistema compatible indeterminado.

- Para a = 0, obtenemos la siguiente matriz triangular sustituyendo el valor en (1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Obtenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{r} -2z=-4 \\ y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} z=2 \\ y=-z=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$$

con solución (1, -2, 2)

10.- Dado el sistema de ecuaciones discute las soluciones según los diversos valores del parámetro “a”. Resuelve el sistema en el caso a =2.

$$\left\{\begin{array}{r} \mathbf{x+y+z=3} \\ \mathbf{2y+2z=a-8} \\ \mathbf{2x+y+z=a-2} \end{array}\right.$$

Resolución:
Ponemos el sistema en forma matricial para aplicar el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & a-8 \\ 2 & 1 & 1 & a-2 \end{array}\right)$$

Restamos a la 3ª fila la 1ª fila multiplicada por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & a-8 \\ 0 & -1 & -1 & a-8 \end{array}\right)$$

Cambiamos la 2ª y 3ª filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & a-8 \\ 0 & 2 & 2 & a-8 \end{array}\right)$$

Sumamos a la 3ª fila la 2ª multipl icada por 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & a-8 \\ 0 & 0 & 0 & 3a-24 \end{array}\right)$$

Queda un sistema escalonado cuya última fila es $\left(0 \quad 0 \quad 0 \mid 3a-24\right)$

- Si a $\neq$ 8 es un sistema incompatible.

- Si a = 8, queda la última fila $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \mid 0\end{pmatrix}$, es un sistema compatible indeterminado.

- Para el caso de que a = 2 como a ≠ 8 el sistema no tendrá solución, ya que es incompatible.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

Solución: (0,0,0)

2.- Resuelve el sistema de ecuaciones, utilizando el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-4 \\ x-2y+z=-3 \\ 2x+z=2 \end{cases}$$

Solución: (1,2,0)

3.- Resuelve el sistema de ecuaciones, utilizando el método de Gauss:

$$\begin{cases} 7x-y-5z=-10 \\ x+y=3 \\ x+2y+z=8 \end{cases}$$

Solución: (1,2,3)

4.- Resuelve el sistema de ecuaciones, utilizando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 4x+6y+8z=2 \\ 7x-4y-z=-11 \end{cases}$$

Solución: (-1,1,0)

5.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 3x+y-z=15 \\ x+y-z=7 \\ 2x-y=6 \end{cases}$$

Solución: (4,2,-1)

6.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ -2x+3y+z=-1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$$

Solución: (1,0,1)

7.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} 2x-5y+4z=3 \\ x-2y+z=5 \\ x-4y+6z=10 \end{cases}$$

Solución: (76, 45,19)

3.5.- EJERCICIOS DEL TEMA

1.- Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pon un ejemplo si es falsa:
(a) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es siempre compatible.
(b) Un sistema, de dos ecuaciones con tres incógnitas, compatible ha de ser indeterminado.
(c) Para que un sistema sea incompatible ha de tener distinto número de ecuaciones que de incógnitas.
Solución: a) Falsa, b) Cierta, c) Falsa.

2.- Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pon un ejemplo si son falsas:
(a) Un sistema de cuatro ecuaciones con dos incógnitas es siempre incompatible.
(b) Un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas y compatible ha de ser indeterminado.
(c) Para que un sistema sea incompatible ha de tener distinto número de ecuaciones que de incógnitas.
Solución: a) Falsa, b) Cierta, c) Falsa.

3.- Propón razonadamente tres sistemas de ecuaciones de orden 3x3 no homogéneos que sean respectivamente compatible determinado, compatible indeterminado, incompatible.

4.-Sean S y S' dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que sólo difieren en los términos independientes. Si S tiene infinitas soluciones)puede S' tener solución única?.)Por qué?.
Solución: No puede.

5.- Sean S y S' dos sistemas distintos de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes.
a) Justifica con un ejemplo que S puede ser compatible y S' incompatible.
b) Si los dos sistemas S y S' son compatibles,)puede S tener solución única y S' tener infinitas soluciones? Razona la respuesta.

Solución: a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 2x\quad +2z=4 \end{array}\right\}$ *y* $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 2x\quad +2z=0 \end{array}\right\}$*, b) No puede ocurrir.*

6.- Dado el sistema $\left\{\begin{array}{r} ax-y=1 \\ x-ay=2a-1 \end{array}\right.$ halla a para que:
a) No tenga solución.
b) Tenga infinitas soluciones.
c) Tenga solución única.
d) Tenga una solución en la que x = 3.

Solución: a) a = -1, b) a = 1, c) $a \notin \{-1,1\}$*, d) a =* $-\frac{4}{3}$

7.- Resuelve y clasifica el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=-2 \\ 2x-4y+z=-4 \\ 3x+y+z=1 \end{array}\right.$$

Cambia la tercera ecuación para que el sistema sea incompatible.
Solución: (0,1,0)

8.- Escribe, cuando sea posible, sistemas de ecuaciones que respondan a las características siguientes:
a) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones.
b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.
c) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que no tenga ninguna solución.
d) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.
Razona, en cada caso, tu respuesta.

9.- Considera el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

a) Añade una ecuación lineal al sistema anterior para que el sistema resultante sea incompatible.
b) Si añadimos al sistema dado la ecuación mx + y- z =-1 determina para qué valores del parámetro m el sistema resultante es compatible indeterminado y resuélvelo.

Solución: a) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 4y - 2z = -3 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$, *b) m = -1,* $\begin{cases} x = 7 - 6\lambda \\ y = 6 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, *con* $\lambda \in \mathbb{R}$

10.- Juan compró 4 butacas de patio y 6 de palco y pagó 4698 pesetas; Salvador abonó 2820 pesetas por 5 butacas de patio y 2 de palco y Manuel 5124 pesetas por 2 butacas de patio y 8 de palco. ¿Cuánto valen 10 butacas de patio y 10 de palco?
Solución: patio = 342, palco = 555, total = 8970.

11.- Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 638400 pts. El original costaba 1200 pts., pero también ha vendido copias, presuntamente defectuosas, con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias vendidas fue de la mitad del de originales, calcular a cuántas de las copias se les aplicó el descuento del 30%.
Solución: 120 copias

12.- Si una persona invierte el 40% de sus ahorros en acciones del tipo A y el resto en acciones del tipo B, el interés medio resultante es del 5%, mientras que si realiza la inversión al revés (es decir coloca el 40% en B y el resto en A), el interés medio resultante es del 6%.)Qué interés proporcionan las acciones del tipo A y cuál las del B?)Cuál sería el interés medio resultante si se invirtiera la misma cantidad en los dos tipos de acciones?
Solución: a = 8, b = 3, i. m.= 5,5

13.- Una empresa cinematográfica dispone de tres cines C_1, C_2 y C_3. Cierto día, en cada uno de ellos, proyecta tres películas, P_1, P_2 y P_3. El número de asistentes cada una de ellas se indica en la siguiente tabla

	P_1	P_2	P_3
C_1	200	200	300
C_2	100	200	300
C_3	200	200	100

Sabiendo que los ingreso obtenidos en ese día en C_1, C_2 y C_3, fueron de 150.000, 140.000 y 90.000 Ptas., respectivamente. calcular el precio de la entrada para cada una de las tres películas.
Solución: x = 100, y = 200, z = 300.

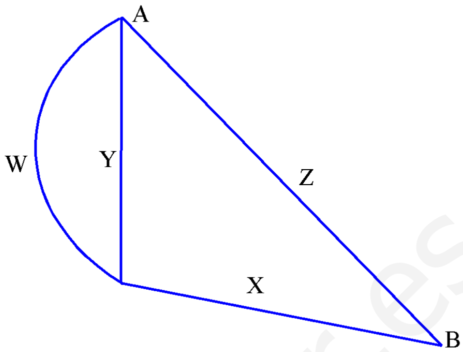
14.- Una ganadera da a su ganado una mezcla de dos tipos de piensos A y B. Un kilo del pienso A proporciona a una res el 6% de sus necesidades de proteínas y el 14% de sus necesidades de carbohidratos. Un kilo del pienso B contiene el 35% del requerimiento diario de proteínas y el 15% del de carbohidratos. Si la ganadera desea que su ganado tenga cubiertas, pero sin excedentes, sus necesidades diarias de proteínas y carbohidratos,)cuántos kilos diarios de cada tipo de pienso deberá proporcionar a cada res?
Solución: 5 Kg. de pienso A, 2 Kg. de pienso B.

15.- Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. la fábrica abastece a tres establecimientos - digamos A, B y C- que demandan toda su producción. En una determinada semana el establecimiento A solicitó tantas unidades como B y C juntos y, por otro lado, B solicitó un 20% más que las suma de la mitad de lo que pidió A más la tercera parte de lo que pidió C.)Cuántas unidades solicitó cada establecimiento de dicha semana?
Solución: 21 unidades solicitó A, 15 unidades solicitó B, 6 unidades solicitó C

16.- Una tienda vende una clase de calcetines a 1.200 Ptas. el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40%

también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 597.600 Ptas. y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total,)a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40 %?
Solución: 180 pares con 30% descuento, 120 pares con 40% descuento

17.- Por la abertura A del mecanismo de tubos de la figura se introducen 50 bolas que se deslizan hasta salir por B. sabemos que por el tubo W han pasado 10 bolas
a) Justifica si es posible hallar el número de bolas que pasa exactamente por cada uno de los tubos X, Y y Z.
b) Supongamos que podemos controlar el número de bolas que pasan por el tubo Y. Escribe las expresiones que determinan el número de bolas que pasan por los tubos X y Z en función de las que pasan por Y.
c) Se sabe un dato nuevo: por Y circulan 3 veces más bolas que por Z,)cuántas circulan por X, Y y Z?.



Solución:
a) No es posible, el sistema formado nunca podrá ser compatible determinado
b) z = 40-y, x = 10 + y. c) x = 30, y = 30, z = 10.

18.- En una tienda de alimentación se ha hecho una oferta de tomates, yogures y botes de sal. Una señora compró dos botes de tomate, cuatro yogures y un paquete de sal, gastándose 200 pta. Otra compró un bote de tomate dos yogures y devolvió un paquete de sal que no estaba en buen estado pagando en total 70 pts. La última compró tres yogures y devolvió dos paquetes de sal por un precio de 20 pts.) En qué consistió la oferta?.
Solución: tomate 50, yogures 20, sal 20.

19.- El testamento de un padre contiene las siguientes disposiciones: "La parte de mi hijo mayor será la media de los otros dos más 3.000 dólares; la parte de mi segundo hijo será exactamente la media de las partes de los otros dos; la parte del más joven será la media de los otros dos menos 3.000 dólares". Halla, mediante el método de Gauss, cuánto dinero corresponde a cada hijo.
Solución: X, X + 2000, X + 4000

20.- Dos niños están jugando a las canicas y un tercero les pregunta cuántas tienen. Uno de ellos contesta las que tengo en le bolsillo más el doble de las que tiene él suman 10; pero si a las que yo tengo les retas las suyas quedan 4.)Es esto posible?)Le estaban tomando el pelo al niño?)Por qué?.
Solución: Sí. No. Uno tiene 6 y el otro 2.

21.- Una ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas aun precio de 100, 120 y 150 pts./kg., respectivamente. El importe total de la compra fueron 1160 pts. El peso total de la misma 9kg y además compró 1kg más de naranjas que de manzanas.
a) Plantea un sistema de ecuaciones para determinar la cantidad comprada de cada producto.
b) Resuelve el problema.
Solución:

a) $\left\{\begin{array}{l} 100x+120y+150z=1160 \\ x+y+z=9 \\ z=y+1 \end{array}\right.$, b) *x = 2, y = 3, z = 4*

.
22.- Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{array}\right.$$

Solución: $a \neq -8$*, SCD(0,0,0), a = -8 SCI*

23.-)Qué valores tiene que tomar a, b y c para que sea compatible el sistema?.

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+z=b \\ x+y+z=c \end{cases}$$

Solución: a = b = c.

24.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *a*.

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$$

Solución: Si a Ï{1,-2}, SCD, Si a ¹ 1,SCI., Si a ¹ -2,SI.

25.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *a*.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases}$$

Solución: Si a ¹ -8, SCD con solución trivial. Si a = -8 SCI

26.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *a*.

$$\begin{cases} 3x+10y+4z=0 \\ ax+y-z=0 \\ x-5y-3z=0 \end{cases}$$

Solución:

Si a ¹ $\frac{19}{5}$*, SCD,* *a =* $\frac{19}{5}$*, SCI*

27.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro "*a*".

$$\begin{cases} 5x-11y+9z=a \\ x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \end{cases}$$

Solución: Si a ¹ 4, SI. Si a = 4, SCI

28.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro "a".

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+(1+a)y+z=2a \\ x+y+(a+1)z=a \end{cases}$$

Solución: Si a¹ 0 SCD. Si a = 0, SCI

29.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *a*.

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x-2y+z=1 \\ 3x+4y-2z=-3 \end{cases}$$

Solución: Para cualquier valor del parámetro" a" el sistema es SCD.

30.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones discute su solución según los diversos valores del parámetro a, utilizando el teorema de Rouché-Frobenius.

$$\begin{cases} x+z=1 \\ x-2y+z=1 \\ (2-a)x+(2a-2)y=a-1 \end{cases}$$

Solución: Si a ¹ 2 sistema compatible determinado, Si a = 2 sistema incompatible.

31.- Discute la solución el siguiente sistema según los valores del parámetro a.

$$\begin{cases} x+ \quad y+ \quad z = 1 \\ x+ \quad 2y+ 2z = 1 \\ x+(a+2)y+2az = -8 \end{cases}$$

Solución: a ¹ 2 SCD, a = 2 SI.

32.- Discute la solución el siguiente sistema según los valores del parámetro a.

$$\begin{cases} x + ay + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ ax + y + z = 4 \end{cases}$$

Solución: a ¹1 y a ¹3 SCD, a = 1 SCI, Si a = 3 SI.

33.- Discute la solución el siguiente sistema según los valores del parámetro a.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ ax - y - z = a-1 \\ 3x - 2az = a-1 \end{cases}$$

Solución: a Ï {-2, 0}, SCD. Si a = 0 SI. Si a = -2, SI.

33.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones discute las soluciones según los diversos valores del parámetro *a*, utilizando el teorema de Rouché-Frobenius.

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = a \\ x - y + az = 2 \end{cases}$$

Solución: a ¹ 1 y a ¹ -1 SCD, a = 1 SI, Si a = 1 SI.

34.- Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k & 3 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Discute el sistema según los valores de k

Solución: Si k ¹1 y k ¹ 2 SCD,

- *Si k =1 SI*
- *Si k = 2 SCI*

35.- Aplica la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y + z = 8 \\ x - y + z = 6 \\ 3x + 4y - z = 3 \end{cases}$$

Sustituye la tercera ecuación por otra que haga que el sistema sea compatible indeterminado.

Solución: (3, -1, 2). Para que sea SCI sustituimos la 3ª por la suma de las 1ª y 2ª ecuaciones..

36.- Aplica la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} -x+2y-3z = -2 \\ 2x-3y+4z = 3 \\ x-y+z = 1 \end{cases}$$

Cambia una de las ecuaciones para que el sistema sea incompatible.

Solución: (l,2l-1,l).

Para que sea incompatible sustituimos la 3ª ecuación por la 1ª con otro término independiente.

37.- Aplica la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} x-y+3z=1 \\ 3x-y+2z=3 \\ -2y+7z=10 \end{cases}$$

Solución: incompatible.

38.- Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x-2y+3z+t=1 \\ -x+2y-z+2t=0 \\ -2y-4z-t=2 \\ x-5y+z-2t=0 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\frac{23}{10}, 0, -\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right)$$

39.- Resuelve el sistema de ecuaciones, utilizando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 3x-y=5 \end{cases}$$

Solución: (2,1)

40.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} x-2y=-3 \\ -2x+3y+z=4 \\ 2x+y-5z=4 \end{cases}$$

Solución: $(1+2\lambda, 2+\lambda, \lambda)$

41.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

Solución: (0, 0, 0)

42.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} x+3y-z=-5 \\ 2x-y+5z=7 \\ x+10y-8z=9 \end{cases}$$

Solución: Incompatible

43.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 3x+y-z=4 \\ x+2y=5 \\ 5x+5y-z=14 \end{cases}$$

Solución: $\left(\frac{3+2\text{ë}}{5}, \frac{11-\text{ë}}{5}, \text{ë}\right)$

44.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} x+y+z+u=6 \\ x-y+z-u=-1 \\ 3x-y+3z-u=3 \\ 7x-5y+7z-5u=-1 \end{cases}$$

Solución: Incompatible

45.- Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 2y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

a) Clasifica dicho sistema.
b) Interprétalo geométricamente, indicando la posición relativa de cada par de rectas.
Solución:
a) El sistema es incompatible.
b) Geométricamente el sistema está formado por tres rectas que no tiene ningún punto común tal como se ve en la figura.

46.- Discute por el método de Gauss, en función de "**a**", el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = a + 2 \\ x - ay + z = 1 \\ ax + y + z = 3 \end{cases}$$

Solución: a Ï{-1,1} SCD, a = -1,1 SCI

47.- Discute y resuelve por el método de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *a*.

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + (1 + a)y + z = 2a \\ x + y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

Solución: Si a¹ 0, (a,1,-1). Si a = 0 x = -l-m.

48.- Discute por el método de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *a*.

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 0 \\ ay + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Resuélvelo para a = -1.
Solución:

SCD, "a Î R; $\left(\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{1}{8}\right)$

49.- Discute por el método de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *a*.

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ ax + (1 - a)y + (1 - a)z = a^2 \\ ax + y + az = 2a^2 \end{cases}$$

Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado
Solución:
a ¹ 0 y a ¹1 sistema es compatible determinado.
- Si a =0, sistema compatible indeterminado.
- Si a =1, sistema incompatible.

50.- Resuelve por el método de Gauss el sistema de ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ x + 2y = 5 \\ 5x + 5y - z = 14 \end{cases}$$

Solución: $\left(\frac{3 + 2ë}{5}, \frac{11 - ë}{5}, ë\right)$

EJERCICIOS DE ANÁLISIS

DERIVADAS E INTEGRALES

MATEMÁTICAS II LOGSE

Antonio López García
Angeles Juárez Martín
Juan Fernández Maese

Índice Temático

TEMA 1

1.- DERIVACIÓN DE FUNCIONES

1.1.- DERIVADA EN UN PUNTO

1.- Definición

Se llama derivada de la función f en un punto x = a, f '(a), al siguiente límite, si es que existe:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Las derivadas laterales son obtenidas al tomar los límites anteriores a izquierda o derecha.

- Derivada por la izquierda:
  $$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
- Derivada por la derecha:
  $$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Existirá derivada en un punto cuando existan ambas derivadas laterales y coincidan sus valores.

EJEMPLOS

1.- Halla la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x_o = 1$ aplicando la definición de la derivada.

Resolución:
Hallamos derivada aplicando la fórmula y resolviendo la indeterminación:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

2.- Halla la derivada de $y = \sqrt{x}$ en $x_o = 1$, aplicando la definición de la derivada.

Resolución:
Aplicando la fórmula y resolviendo la indeterminación:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}$$

3.- Halla la derivada de la función $f(x) = e^{3x}$ en $x_o = 0$, aplicando la definición de la derivada.

Resolución:
Aplicando la fórmula y como e^x-1 y x son infinitésimos equivalentes:

f '(0) = $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$

f ' (0) = $\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 0$

4.- Estudia la derivabilidad de y = $|x|$ en $x_o = 0$

Resolución:
Como g(x) = $|x| = \begin{cases} -x \text{ si } x<0 \\ x \text{ si } x\geq 0\end{cases}$ continua en $\mathbb{R}$ pero no derivable ya que en x = 0:

g'(0^-) = $\lim_{h\to 0^-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0}(-1) = -1$

g'(0^+) = $\lim_{h\to 0^+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula la derivada de $y = 3x^3 + x$ en $x_o = 3$ utilizando la definición.
Solución: y'(3) = 82

2.- Calcula la derivada de $3 - x^2$ en $x_o = 3$ utilizando la definición.
Solución: y'(3) = -6

3.- Calcula por la definición de derivada f '(0) siendo f(x)= $e^{2x}+1$.
Solución: f '(0) = 2

4.- Demuestra, utilizando la definición, que la derivada de f(x) = $\frac{1}{x^3}$ en $x_o = 2$ es f '(2) = $-\frac{3}{16}$

5.- Demuestra, utilizando la definición que la derivada de f(x) = $\sqrt{x-2}$ en $x_o = 6$ es f '(6) = $\frac{1}{4}$

6.- Demuestra, utilizando la definición, que $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$ siendo f(x) = $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

7.- Demuestra, utilizando la definición, que $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ siendo f(x) = x.cos x.

8.- Comprueba, aplicando la definición, que f '(x_o = 0) = 0 si f(x) = x^2.

9.- Comprueba, aplicando la definición, que f '($x_o = \pi$) = 2 si f(x) = sen(2x).

10.- ¿Es la función y = $|x-1|$ derivable en x = 1?
Solución: No, ya que las derivadas laterales son distintas.

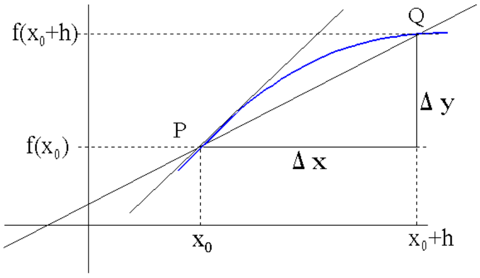
11.- Estudia la derivabilidad de y = $|x-3|$ en x = 3.
Solución: No es derivable en x = 3, ya que las derivadas laterales son distintas.

12.- Estudia la derivabilidad de y = $|x^2-4|$ en x = -2.
Solución: No es derivable en x=-2.

1.2.- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

1.- Recta tangente

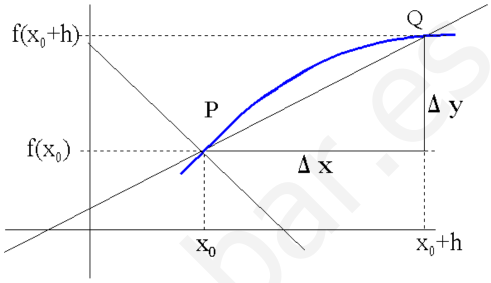
La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.
La ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ en forma punto-pendiente será:
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$



2.- Recta normal

La ecuación de la recta normal a la curva en un punto en forma punto-pendiente será:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$



EJEMPLOS

1.- Escribe las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = xe^x$ en $x_0 = 0$.

Resolución:
Utilizando la definición, hallamos la derivada de la función en $x_0 = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{he^h - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{he^h}{h} = \lim_{h\to 0} e^h = 1$$

La recta tangente tiene de ecuación $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$, sustituyendo valores:
$y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$

La ecuación de la recta normal será $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, sustituyendo:

$y - 0 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x$

2.- Escribe las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $x_0 = 0$.

Resolución:
La ecuación de la recta tangente la damos en forma punto-pendiente.

- Hallamos los valores de $f'(0)$ utilizando la definición y aplicando que h y $e^h - 1$ son infinitésimos equivalentes:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h + e^{-h}}{2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2h} + 1 - 2e^h}{2he^h} = \lim_{h\to 0}\frac{(e^h - 1)^2}{2he^h}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{2he^h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{2e^h} = 0$$

- Hallamos el valor de la función en el punto $x_0 = 0$:

$$f(0) = \frac{1+1}{2} = 1$$

- Sustituimos valores en la ecuación:
  y -1 = 0(x - 0) $\Rightarrow$ y = 1 es la recta tangente

- La ecuación de la recta normal será x = 0, ya que pasa por $x_0 = 0$ y forma un ángulo de 90° con la horizontal.

3.- Calcula los puntos de la curva y = $x^3+9x^2-9x+15$ en los que la tangente es paralela a la recta y = 12x+3.

Resolución:
Como y' = 12, al ser la derivada la pendiente de la recta tangente en el punto:
f '(x) = $3x^2+18x-9 \Rightarrow$ f '(c) = 12

Sustituyendo valore en x = c:
$3c^2+18c-9 = 12 \Rightarrow 3c^2+18c-21 = 0 \Rightarrow c^2+6c-7 = 0$

Ecuación con soluciones:
c = $\dfrac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2} \Rightarrow c_1 = -1,\ c_2 = 7$

Los puntos pedidos son (, 16) y (-7, 176)

4.- Halla los puntos de la gráfica de la función definida por f(x) = $2x^4-x^2+x$ en los que la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Resolución:
Como la bisectriz del primer cuadrante tiene de ecuación y = x su pendiente vale m = 1. Se trata de obtener los puntos en los que la derivada vale 1:
f '(x) = $8x^3-2x+1 = 1 \Rightarrow 8x^3-2x = 0 \Rightarrow 2x(4x^2-1) = 0$

Con soluciones:

$$\begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Luego los puntos pedidos son: A = (0,0), B = $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{8}\right)$, C = $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{8}\right)$

5.- Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por f(x) = $\dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$. Sea P el punto de corte de la gráfica de f con su asíntota. Determina la recta tangente a la gráfica de f en el punto P.

Resolución:

- Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x}{x^2+1} = \infty$ no tiene asíntota horizontal.

  La asíntota oblicua será de la forma y = mx + n, siendo:

  m = $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x}{x^3+x} = 1$

  n = $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^3+2x}{x^2+1} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

Luego la asíntota de la que nos hablan es y =x

Calculemos el punto P de corte de la gráfica con su asíntota:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^3+2x}{x^2+1} \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^3+2x}{x^2+1}=x \Rightarrow x^3+2x = x^3+x \Rightarrow x = 0.$$

De donde se deduce que y = 0

- La recta tangente a la gráfica de f en el punto P será la recta que pasa por P = (0, 0) y tiene de pendiente la derivada de f en el punto de abscisa x=0:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2)(x^2+1)-(x^3+2x)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

La pendiente será m = f'(0) = 2, luego la recta tangente a y = f(x) en el punto P = (0, 0) será: y = 2x

---

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x_o = 0$.
Solución: y = 0

2.- Halla las rectas tangente y normal a $y = \frac{1}{x}$ en $x_o = 1$.
Solución: Tangente: y = -x+2. Normal: y = x

3.- Halla las rectas tangente y normal a $y = \sqrt{x}$ en $x_o = 1$.
Solución: Tangente: $y = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. *Normal: y = -2x+3*

4.- Halla la recta tangente a la función $f(x) = e^{3x}$ en $x_o = 0$.
Solución: y = 1.

5.- Halla las rectas tangente y normal a la gráfica de la función y = sen(2x) en $x_o = \pi$.
Solución: Tangente: $y = 2x-2\pi$. *Normal:* $y = -\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}$

6.- Escribe las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2$ en $x_0 = 1$.
Solución: recta tangente, y = 2x-1; recta normal, $y = -\frac{x}{2} + 2$.

7.- Halla el punto de la curva $y = \ln(2-x^2)$ en el que la tangente tiene de pendiente 2. Halla la ecuación de dicha tangente.
Solución: 2x – y + 2 = 0

8.- Halla los puntos de la curva $y = 3x^2-5x+12$ en los que la tangente a ésta pasan por el punto (0,0). Halla las ecuaciones de dichas tangentes.
Solución: Los puntos son (-2,34), (2,14). Las ecuaciones son: y = -17x, y = 7x

9.- Halla todas las posibles rectas tangentes a la curva $y = x^4$ que pasan por el punto (2, 0) (ten en cuenta que este punto no está en la curva).
Solución: $y = 0$, $y = \frac{2048}{27}x - \frac{4096}{27}$

1.3.- FUNCIÓN DERIVADA

1.- Concepto de función derivada

Si una función es derivable en todos los puntos de un intervalo (a, b) es posible definir una nueva función f '(x) que se llama función derivada tal que:
$(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow f'(x)$

El dominio de definición de la función derivada está formado por los puntos de donde ésta es derivable $D(f') = \{x \in D(f) \,/\, \exists f'(x)\}$

2.- Derivadas sucesivas

A partir de la definición anterior se pueden definir la derivada segunda, tercera, etc.. (que se denotan con f'', f''',..) como la función derivada de la derivada primera, segunda, ...

EJEMPLOS

1.- Halla la función derivada de f(x) = x^2 aplicando la definición.

Resolución:
Utilizando la definición de derivada, desarrollando y simplificando:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

2.- Halla la derivada de y = $\sqrt{x}$ aplicando la definición.

Resolución:
Aplicando la definición, multiplicando por el conjugado del numerador:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

operando en el numerador y tomando valores del límite:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3.- Halla las derivadas sucesivas de f(x) = x^3.

Resolución:

- Derivada primera:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) = 3x^2$$

- Segunda derivada:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}$$

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6x+3h) = 6x$$

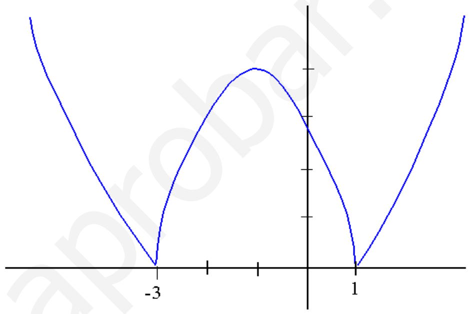
- Tercera derivada:

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6(x+h)-6x}{h}$$

Desarrollando y simplificando la expresión obtenida:

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{6xh+6h-6x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6xh}{h} = \lim_{h\to 0}(6x) = 6.$$

3.- En la figura adjunta se representa la gráfica de una función f : ℝ → ℝ. Estudia la derivabilidad de f.



Resolución:
Será derivable f en los puntos que tenga derivada. Como en los puntos x = -3 y x =1 existen derivadas laterales distintas (puntos angulosos) no será derivable, luego lo es en ℝ-{-3,1}.

EJERCICIOS PROPUESTOS

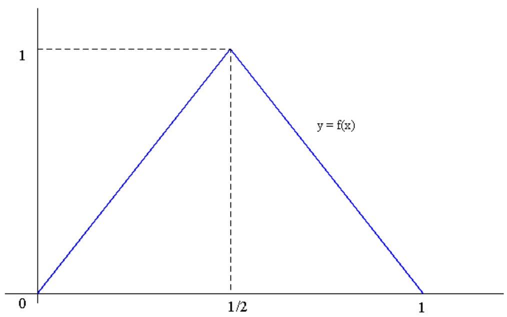
1.- Dibuja una función que sea continua y derivable en x =3, otra que sea continua y no derivable en x = 3, y otra que no sea continua en el punto x = 3.

2.- Halla la derivada de y = sen x, aplicando la definición.
Solución: f '(x) = cos x

3.- Halla la derivada de $y = \frac{1}{x}$ aplicando la definición.

Solución: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

4.- En la figura adjunta se representa la gráfica de una función f : [0,1] → ℝ. Estudia la derivabilidad de f.
Solución: (0,1/2)∪(1/2,1)



5.- Halla la función derivada de $f(x) = x^3$.
Solución: $f'(x) = 3x^2$

6.- Halla la función derivada de f(x) = Lx.
Solución: $f'(x) = \frac{1}{x}$

7.- Halla las derivadas sucesivas de $f(x) = e^x$.
Solución: $f^{(n}(x) = e^x$

1.4.- CALCULO DE DERIVADAS

1.- Operaciones con derivadas

- **Suma de funciones:** es la suma de las funciones derivadas: [f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)

- **Producto de un número por una función:** es el producto del número por la derivada de la función: [a.f(x)]' = a.f'(x)

- **Producto de dos funciones:** es el producto de la derivada de la primera por la segunda función sin derivar más el producto de la primera función por la derivada de la segunda: [f(x).g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x).g'(x).

- **Cociente de dos funciones**: es el producto de la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el producto del numerador por la derivada del denominador y dividida toda la expresión por el denominador al cuadrado:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x)\ \ f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

- **Regla de la cadena:** La derivada de la composición de dos funciones f y g es el producto de la derivada de f por la derivada de g: [f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)

2.- Reglas de derivación

Función	Derivada	Regla de la cadena
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y' = nf(x)^{n-1}\ f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y' = e^{f(x)}f'(x)$
$y = Lx$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$	$y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$
y = sen x	y' = cos x	y' = cos f(x).f'(x)
y = cos x	y' = - sen x	y' = - sen f(x).f'(x)
y = tg x	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
y = ctg x	$y' = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$	$y' = -\dfrac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)}$
y = arc sen x	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
y = arc cosx	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
y = arc tg x	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

3.- Funciones potenciales-exponenciales

Las funciones potenciales exponenciales son de la forma $y = f(x)^{g(x)}$. Para derivarlas se toman logaritmos en ambos miembros de la ecuación y se deriva la expresión obtenida:

$$Ly = g(x).L[f(x)] \Rightarrow \frac{y'}{y} = g'(x)\,L[f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

La derivada se obtiene despejando y sustituyendo el valor de y:

$$y' = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\,L[f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

4.- Derivación implícita

Si la expresión de una función no tiene una relación explícita entre las variables x e y, se deriva directamente en esa relación implícita aplicando la regla de la cadena.

EJEMPLOS

1.- Halla la función derivada de

a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ **b)** $g(x) = 2.Lx$ **c)** $h(x) = x^2.\text{sen } x$ **d)** $i(x) = \frac{x^2}{\text{sen}x}$

Resolución:

a) Aplicando la regla de derivación de una suma:

$$f'(x) = 2x.\frac{1}{x} + x^2.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - 1 = 1$$

b) Aplicando la regla de derivación del producto de un número por una función:

$$g'(x) = 2.\frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

c) Aplicando la regla de derivación de un producto:

$h'(x) = 2x.\text{ sen } x + x^2.\cos x$

d) Aplicando la regla de derivación de un cociente:

$$i'(x) = \frac{2x.\text{sen}x - x^2.\cos x}{\text{sen}^2 x}$$

2.- Halla la función derivada de $h(x) = \text{sen}(x^2)$

Resolución:

Como $h(x) = f[g(x)]$ con $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = x^2$ aplicando la regla de la cadena:

$h'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x) = \cos(x^2).2x$

3.- Deriva, simplificando la derivada obtenida, la función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Resolución:

Derivamos aplicando las reglas de derivación de exponenciales y cocientes.

$$y' = \frac{(e^x - e^{-x}).(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}).(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

Desarrollando el numerador y denominador:

$$y' = \frac{(e^{2x} + e^{-2x} - 2) - (e^{2x} + e^{-2x} + 2)}{e^{2x} + e^{-2x} - 2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{e^{2x} + e^{-2x} - 2} = -\frac{4}{e^{2x} + e^{-2x} - 2}$$

4.- Deriva, simplificando la función derivada obtenida f(x) = $\mathbf{L\sqrt{\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}}}$

Resolución:

$$f(x) = L\sqrt{\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}} = \frac{1}{2}\left[L\,(1+tg\,x) - L\,(1+tg\,x)\right]$$

derivamos aplicando las reglas de derivación de logaritmos.

$$y' = \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{1+tg\,x}.\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{1-tg\,x}\,\frac{-1}{\cos^2 x}\right]$$

Hallando común denominador y sumando las fracciones obtenidas:

$$y' = \frac{1}{2}.\left[\frac{1+tg\,x+1-tgx}{\cos^2 x.(1-tg^2 x)}\right] = \frac{1}{2}.\left[\frac{2}{\cos^2 x.(1-tg^2 x)}\right]$$

Como tg x = $\frac{sen\,x}{\cos x}$ y $\cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x$:, sustituyendo y simplificando queda:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x\left(1 - \frac{sen^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{1}{\cos^2 x\left(\frac{\cos^2 x - sen^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{1}{\cos^2 x - sen^2 x} = \frac{1}{\cos 2x}$$

5.- Halla la derivada de y = $\mathbf{x^{e^x}}$

Resolución:

Como es una función potencial-exponencial usamos la derivación logarítmica:

Ly = e^x. Lx

Derivando ambos miembros, despejando y sustituyendo:

$$\frac{y'}{y} = e^x.L(x) + e^x.\frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^{e^x}\left[e^x.L(x) + e^x.\frac{1}{x}\right]$$

6.- Deriva, simplificando al máximo y = (sen x) $^{\mathbf{cosx}}$

Resolución:

Como es una función potencial-exponencial usamos la derivación logarítmica:

Ly = cosx L(sen x)

Derivando ambos miembros, despejando y sustituyendo:

$$\frac{y'}{y} = senx\,L(senx) + \frac{(cosx)^2}{senx} \Rightarrow y' = (senx)^{cosx}\left[senxL(senx) + \frac{cosx^2}{senx}\right]$$

7.- Deriva implícitamente $x^2 + y^2 + 2xy = 0$

Resolución:
Derivamos con respecto a x, en ambos miembros:
$2x + 2y.y' + 2y + 2xy' = 0$

Despejamos de forma que queden en el primer miembro los términos con y':
$2y.y' - 2xy' = -2x -2y$

Sacamos y' factor común y despejamos:
$y'(2y - 2x) = -2x -2y \Rightarrow y' = -\dfrac{2x+2y}{2y-2x} = -\dfrac{x+y}{y-x}$

8.- Deriva implícitamente $xy^2 = x$ arc sen y

Resolución:
Derivamos con respecto a x, en ambos miembros:
$y^2 + 2xyy' = \text{arc sen } y + x\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}y'$

Despejamos en el primer miembro los términos con y':
$2xy.y' - x\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}y' = \text{arc sen } y - y^2$

Sacamos y' factor común y despejamos:
$y'.\left[2xy - \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}\right] = \text{arc sen } y - y^2 \Rightarrow y' = \dfrac{\text{arcsen} y - y^2}{2xy - \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
a) $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ b) $g(x) = \sqrt{\text{tg } x}$ c) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Solución: a) $f'(x) = \dfrac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$, *b)* $g'(x) = \dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{tg\, x}}$, *c)* $h'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

2.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
a) $f(x) = \text{ctg}^{-\frac{1}{2}} x$ b) $g(x) = L(\cos x)$ c) $h(x) = L(x^2 + 1)$

Solución: a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{ctg^3 x}} . \dfrac{1}{sen^2 x}$ *b)* $g'(x) = -tg\, x$, *c)* $h'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

3.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
a) $f(x) = e^{e^{e^x}}$ b) $g(x) = (\cos x)^{Lx^2}$

Solución: a) $f'(x) = e^{e^{e^x}} . e^{e^x} . e^x$, *b)* $g'(x) = (\cos x)^{Lx^2}\left[\dfrac{2L(\cos x)}{x} - L(x^2)\text{tg} x\right]$

4.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{tg} x . \sec x$, b) $g(x) = \sqrt{e^{\operatorname{tg}(x+1)^x}}$

Solución: a) $f'(x) = \dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}$, *b)* $g'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{e^{\operatorname{tg}(x+1)^x}}\,\operatorname{tg}(x+1)^x\left[L[\operatorname{tg}(x+1)^x] + x\dfrac{1}{\cos^2(x+1)}\right]$

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

5.- $f(x) = \sqrt{3x^3} - \sqrt[3]{x}$

Solución: $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{3x}}{2} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

6.- $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{e^{1-x}} . \cos\sqrt{e^{1-x}}$

Solución: $f'(x) = -\dfrac{\sqrt{e^{1-x}}}{2}\left[\operatorname{sen}\sqrt{e^{1-x}} + \cos\sqrt{e^{1-x}}\right]$

7.- $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2x^3}$

Solución: $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{2x^4}$

8.- $xy + \cos(y) = 0$

Solución: $y' = \dfrac{-y}{x - \operatorname{sen} y}$

9.- $y. \cos(x) + \cos(y) = 0$

Solución: $y' = \dfrac{y \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} y}$

10.- $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Solución: $y' = \dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

11.- $y = L\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

Solución: $y' = \dfrac{1}{1-x^2}$

12.- $f(x) = L\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

Solución: $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

13.- $f(x) = L[L(\sec x)]$

Solución:

$f'(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{L\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)}$

1.5.- ACTIVIDADES DEL TEMA

1.- Estudia la derivabilidad de y = $|x+1|+|x^2-1|$ en x = 1.
Solución: No es derivable en x=1

2.- Estudia la derivabilidad de la función f(x) = $|x|e^x$ en x = 0.
Solución: No es derivable.

3.- Representa y estudia la derivabilidad de f(x) = $|x^2-9|$ en x = 0 y x = 3.
Solución: Es derivable en x = 0. No lo es en x = 3.

4.- Se considera la función f definida por f(x) = $|x^2-4x+3|$. Demuestra que es continua pero no derivable en $x_o = 3$.

5.- Halla el punto de la curva y = L(2-x^2) en el que la tangente tiene de pendiente 2. Halla la ecuación de dicha tangente.
Solución: x = -1, y = 2x + 2

6.- Halla los puntos de la curva y = $3x^2$-5x+12 en los que la tangente a ésta pasan por el punto P = (0, 0). Hallar la ecuación de dichas tangentes.
Solución: x = -2, x = 2.

7.- Calcula los puntos de la curva y= $x^3+9x^2-9x+15$ en los que la tangente es paralela a la recta y = 12x + 3.
Solución: x = -7, x = 1.

8.- Busca las tangentes en los puntos de inflexión de las curva y = $3x^2-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Solución: y = -2x-1, y= 14x-17.

9.- Halla las rectas tangente y normal a la gráfica de f(x) = x^3-6x^2+8x en el punto x = 2.
Solución: y=-4x+8, y= $\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}$.

10.- Prueba que y = -x es tangente a la gráfica de f(x) = $x^3 - 6x^2 + 8x$. Halla el punto de tangencia y estudia si la recta corta a la curva en algún otro punto.
Solución: El punto de tangencia es x= 3. El punto de corte es x=0.

11.- ¿En qué punto P_0 de la gráfica de la función f(x) = x^2-6x+1 la tangente es paralela a la bisectriz del tercer cuadrante? Representa la función y = f(x) y la tangente a f en el punto P_0.
Solución: y = 6x-35

Calcula las derivadas de las siguientes funciones, simplificando lo más posible
12.- f(x) = cosx. L(x^2)
Solución: f'(x) = $-\text{senx}.L(x^2)+\text{cosx}.\dfrac{2}{x}$

13.- f(x) = sen x .cos (2x)
Solución: f'(x) = cosx. cos (2x) - 2senx.sen(2x)

14.- f(x) = $(\text{arctgx})^x$.
Solución: f'(x) = $(\text{arctgx})^x\left[\text{arctgx}+\dfrac{x}{1+x^2}\right]$

15.- f(x) = x^{e^x}

Solución: f'(x) = $x^{e^x} \cdot \left[e^x L(x) + e^x \frac{1}{x} \right]$

16.- f(x) = L(tg x)

Solución: f'(x) = $\frac{1}{\text{senx.cosx}}$

17.- f(x) = $\text{arc tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución: f'(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

18.- f(x) = $L \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Solución: f'(x) = $\frac{\text{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\cos x}$

19.- f(x) = $\text{arc ctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución: f'(x) = $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

20.- f(x) = $\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$

Solución: f'(x) = $\frac{-2e^{-2x+2}(2x+1)}{(e^{2x} - e^{-2x})^2}$

21.- Deriva implícitamente $xy^2 = x$ arc sen y

Solución: f'(x) = $\frac{\text{arcseny} - y^2}{2xy - \frac{x}{\sqrt{1-Y^2}}}$

22.- Supuesto que y es función de x, calcula y' de la siguiente expresión:
Lx = yx – sen x + y^2

Solución: y' = $\frac{\frac{1}{x} + \cos x - y}{x - 2y}$

23.- Halla la derivada quinta de f(x) = a sen(bx)
Solución: $y^{(5} = ab^5 \cos(bx)$

24.- Halla la derivada de 3^er^ orden de f(x) = $L\left(\frac{x-4}{x+4}\right)$

Solución: $y''' = \frac{16(3x^2+16)}{(x^2-16)^3}$

25.- Halla la derivada enésima de f(x) = e^{ax}
Solución: $y^{(n} = a^n.e^{ax}$

TEMA 2

2.- APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

2.1.- CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Una función es derivable en un intervalo si es continua, ya que es condición necesaria pero no suficiente para ser derivable en un punto ser continua en dicho punto. Toda función f derivable y con derivada finita en un punto, es continua en ese punto.

Como las funciones que estudiamos suelen estar definidas a trozos mediante ramas con distintas expresiones debemos obtener los puntos de solapamiento y en ellos las derivadas laterales. Si ambas son iguales la función tiene derivada en dicho punto y en caso contrario no lo tiene.

EJEMPLOS

1.- De una función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sabe que es derivable. También se sabe que $\lim\limits_{t\to\infty} f\left(\frac{t+1}{t}\right)$ = 3. Halla f(1) justificando la respuesta.

Resolución:
Si la función f es derivable es continua luego se cumple por las propiedades de convergencia de los límites que:

$\lim\limits_{t\to\infty} f\left(\frac{t+1}{t}\right) = f\left(\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t+1}{t}\right)$ = f(1) = 3.

2.- Estudia la derivabilidad de la función f(x) = $\frac{|x|}{1+x}$ sabiendo que no es continua en x = -1.

Resolución:
Dando valores a la función $|x|$ queda:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x<0,\ x \neq -1 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

puede ser derivable si es continua, no lo es en x = -1. Para x ≠ -1 y x ≠ 0:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = -\dfrac{1}{(1+x)^2},\ x<0,\ x \neq 1 \\ \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2},\ x \geq 0 \end{cases}$$

En el punto de solapamiento x = 0, tenemos:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{h}{1+h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{1+h} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{1+h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+h} = 1$$

Como las derivadas laterales son distintas no es derivable en x = 0. Es derivable en $\mathbb{R}$ -{-1, 0}.

3.- Se considera la función f: $[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x-2|+\sqrt{x-1}$. Calcula, de forma razonada, su función derivada.

Resolución:

Expresamos f como función definida a trozos. Como $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x>2 \\ 2-x & \text{si } x\leq 2 \end{cases}$ y teniendo en cuenta que la función f está definida en $[1, +\infty)$ nos queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x+\sqrt{x-1} & \text{si } 1\leq x\leq 2 \\ x-2+\sqrt{x-1} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Como la función $h(x) = |x-2|$ no es derivable en el punto de solapamiento x =2, y = f(x) tampoco será derivable en x = 2:

$$h'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-2-0}{x-2} = \lim_{x\to 2} (1) = 1$$

$$h'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x-0}{x-2} = \lim_{x\to 2} (-1) = -1$$

La función derivada, como suma de funciones derivables, es derivable en $[1,2)\cup(2,+\infty)$.

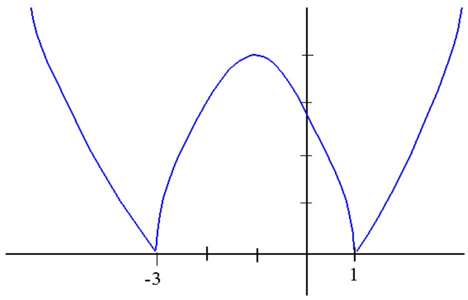
$$f(x) = \begin{cases} -1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 1<x<2 \\ 1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

4.- Dada la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left|x^2+2x-3\right|$ razona en qué *puntos* f es derivable y en cuáles no lo es.

Resolución:

La función se puede descomponer como $f(x) = \left|x^2+2x-3\right| = |(x+3)(x-1)|$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-3 & \text{si } x<-3 \\ -x^2-2x+3 & \text{si } -3\leq x\leq 1 \\ x^2+2x-3 & \text{si } x>1 \end{cases}$$



Como f(x) es una función definida a trozos, donde cada uno de ellos es una función polinómica, f es continua y derivable en $\mathbb{R}$-{-3, 1}.

Estudiamos la continuidad en los puntos de solapamiento:

- En x = -3, f(-3) = 0

  $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} (-x^2-2x+3) = 0$

  $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} (x^2+2x-3)$

- En x = 1, f(1) = 0

  $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} (-x^2-2x+3) = 0$

  $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (x^2+2x-3) = 0$

La función f es continua en $\mathbb{R}$.

Estudiamos la derivabilidad en los puntos de solapamiento:

- En x = 1 no es derivable:

f '(1$^-$) = $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-(x+3)(x-1)-0}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} [-(x+3)]$ =-4

f '(1$^+$) = $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(x+3)(x-1)-0}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+3)$ =4

- En x = -3 no es derivable:

f '(-3$^-$) = $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{(x+3)(x-1)-0}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} (x-1)$ =-4

f '(-3$^+$) $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-(x+3)(x-1)-0}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} [-(x-1)]$ = 4

La función es derivable en $\mathbb{R}$-{-3, 1}, tal como se veía en la figura.

5.- Sea la función f(x) = $\begin{cases} \mathbf{x^3 - x} & \mathbf{si} \ \ \mathbf{x \le 0} \\ \mathbf{ax + b} & \mathbf{si} \ \ \mathbf{x > 0} \end{cases}$

Calcula *a* y *b* para que f sea continua y derivable.

Resolución:

- Como es una función definida a trozos y ambas son polinómicas, es continua, salvo a lo sumo en x = 0 (punto de solapamiento). Para que allí sea continua ha de ocurrir que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ = f(0):

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x^3 - x)$ = 0.

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (ax+b)$ = b.

  Igualando ambas obtenemos que: b = 0.

  La función es:

  f(x) = $\begin{cases} x^3 - x, \ x \le 0 \\ ax, \ x > 0 \end{cases}$

- Su derivada es

  f '(x) = $\begin{cases} 3x^2 - 1, \ x < 0 \\ a, x > 0 \end{cases}$

  que puede no ser derivable en x = 0 (punto de solapamiento). Para que sea derivable ha de ocurrir f'(0$^-$) = f'(0$^+$):

  f'(0$^-$) = $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(h^3-h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h^2-1)$ =-1

  f'(0$^-$) = $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{ah-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} a$ =a

  Igualando ambas obtenemos que: a = 1

  Los valores buscados son a = -1 y b = 0.

6.- Dada la función f(x) = $\begin{cases} \mathbf{3 - ax^2} & \mathbf{si} \ \ \mathbf{x \le 1} \\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{ax}} & \mathbf{si} \ \ \mathbf{x > 1} \end{cases}$

a) ¿Para qué valores del parámetro a es continua?
b) ¿Para qué valores del parámetro a es derivable?

Resolución:

a) Al ser una función definida a trozos en R, siendo ambas continuas, será una función continua, salvo quizás en el punto de solapamiento $x_0 = 1$:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(3-ax^2) = 3-a = f(1)$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{ax} = \frac{2}{a}$

Para que sea continua $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, es decir:

$3-a = \frac{2}{a} \Rightarrow a^2-3a+2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2.$

b) Al ser una función definida a trozos en R, ambas derivables, será una función derivable salvo quizás en el punto de solapamiento $x_0 = 1$:

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(3-ax^2)-(3-a)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-a(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-a(x-1)(x+1)}{x-1} = -2a$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{2}{ax}-\frac{2}{a}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{2}{a}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{2}{a}(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{2}{ax} = -\frac{2}{a}$$

Para que sea derivable se debe cumplir que $f'(1^-) = f'(1^+)$, es decir:

$-2a = -\frac{2}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = -1, a = 1.$

Con a = -1 no es derivable ya que no es continua, sólo es derivable si a = 1.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- De las siguientes afirmaciones, ¿cuáles DEBEN ser ciertas, PUEDEN ser ciertas en algunas ocasiones o NUNCA son ciertas? Justifica las respuestas; en el caso de una respuesta "PUEDE" da un ejemplo en el que la correspondiente afirmación sí es cierta y otro en el que no es cierta.

a) Si $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$ y f es continua entonces f (0) = 1.

b) Si $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 3$ entonces f'(0) = 3.

Solución: a) Nunca, b) Debe.

2.- Sea la función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x\le 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

a) Determina c para que f sea continua.

b) Determina b para que f sea derivable.

Solución: a) c = 1, b) b = $-\frac{1}{2}$

3.- Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3-x & \text{si } x\le 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Calcula el valor de los parámetros a y b para que f sea continua y derivable.

Solución: b = 0, a = -1.

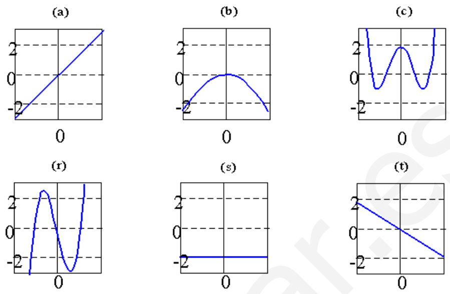
4.- Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x<-1 \\ ax+b & \text{si } -1\le x<0 \\ 3x^2+2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

Calcula el valor de a y b para que f sea continua. Para dichos valores, estudia si es derivable.
Solución: Continua si a =2, b = 2. No es derivable en x = 0.

5.- Representa una función que sea continua y no derivable en un conjunto infinito de puntos.

6.- Las gráficas (a), (b) y (c) corresponden, respectivamente, a tres funciones derivables f, g y h ¿Podrían representar las gráficas (r), (s) o (t) a las gráficas de f', g' o h' (no necesariamente en ese orden). Justifica la respuesta en cada caso
Solución: Únicamente (t) es derivada de (b).



7.- Estudia la derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2 \text{ si } x<0 \\ 0 \text{ si } 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x\ge 1 \end{cases}$$

Solución: Derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$

8.- Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x<0 \\ x^2+1 \text{ si } 0\le x\le 1 \\ x+1 \text{ si } x>1 \end{cases}$$

Solución: Continua en $\mathbb{R}$. *y derivable en* $\mathbb{R}$ *-{1}.*

9.- Se sabe que una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & \text{si } x<1, \\ cx, & \text{si } 1\le x. \end{cases}$$

es derivable en su dominio y que en los puntos x=0 y x=4 toma el mismo valor. Halla a, b y c.

Solución: $a=-\dfrac{7}{4}$, $b=1$, $c=\dfrac{1}{4}$

10.- Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=|x|e^x$
Solución: Derivable en $\mathbb{R}$ *-{0}*

11.- Se sabe que la función $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2, & \text{si } 0\le x\le 2, \\ c+\sqrt{x-1}, & \text{si } 2\le x\le 5. \end{cases}$$

es derivable en el intervalo (0,5) y verifica f(0) = f(5). ¿Cuánto valen a, b y c?

Solución: $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=-2$

12.- Dados tres números reales a, b y c, sea f la función real definida por

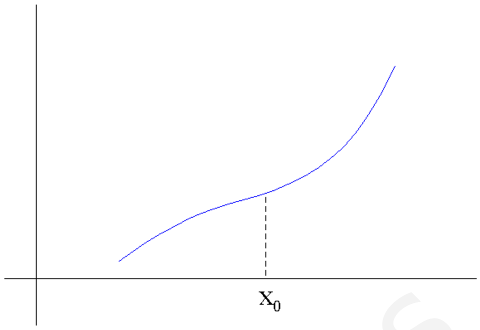
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le c \\ ax+b & \text{si } x>c \end{cases}$$

Determina a y b en función de c para que f sea derivable en c.
Solución: $a=2c$, $b=-c^2$

2.2.- MONOTONÍA

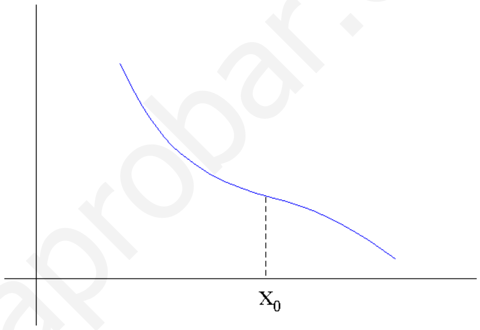
1.- Función creciente

- Una función es creciente si:
  $x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0)$.
- Si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) > 0$ entonces f es creciente en x_0.
- Si una función es derivable en (a, b) y f ' es positiva en (a, b) entonces f es creciente en (a, b)



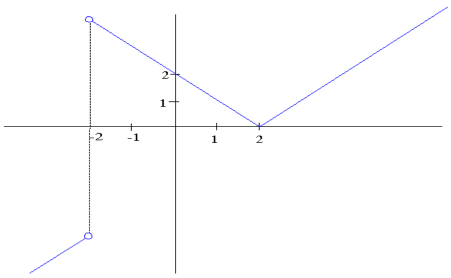
2.- Función decreciente

- Una función es decreciente si:
  $x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0)$.
- Si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) < 0$ entonces f es decreciente en x_0.
- Si una función es derivable en (a, b) y f' es negativa en (a, b) entonces f es decreciente en (a, b)



EJEMPLOS

1.- Determina las regiones de crecimiento y decrecimiento de la función f dada por la figura adjunta.



Resolución:
Tal como se observa en la figura:
- f es creciente en $(-2, 1)\cup(7, 9)$
- f es decreciente en $(-\infty, -2)\cup(2,\infty)$

2.- Prueba que para x>0 la función $f(x) = (1+x)\mathrm{arctg}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + 4$ es creciente.

Resolución:
Hallamos la derivada de la función, aplicando las reglas de derivación de productos, sumas y la función arc tg(x):

$$y' = \mathrm{arctg}\sqrt{x} + (1+x).\frac{1}{1+\sqrt{x}^2}.\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \mathrm{arctg}\sqrt{x}$$

Como f ' es positiva si x > 0 queda demostrado el enunciado.

3.- ¿Donde es creciente la función y = tg x?

Resolución:

Derivando obtenemos $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$, como la derivada es siempre positiva f es siempre creciente.

4.- Determina las regiones de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{3}{x} - x$ (x $\neq$ 0).

Resolución:

Estudiamos el signo de la primera derivada: $f'(x) = -\frac{3}{x^2} - 1 = -\frac{x^2+3}{x^2}$

Como f '(x) es siempre negativa (x ≠ 0), la función f(x) será decreciente en todo su dominio, es decir f(x) es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- La función f es decreciente en el punto a y derivable en él. a) ¿Puede ser f '(a) > 0?. b) ¿Puede ser f '(a) = 0?
Solución: a) No, b)Sí

2.- Se define la función f en el intervalo [0,2] mediante el convenio $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 1 \\ 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ averigua dónde es creciente y dónde decreciente.
Solución: Es una función constante

3.- Averigua si es creciente o decreciente la función $f(x) = x + \frac{x^2}{5}$ en x = 0.

Solución: Creciente.

4.- Averigua si es creciente o decreciente la función $f(x) = \frac{5-x}{x^2+2}$ en x = 1.

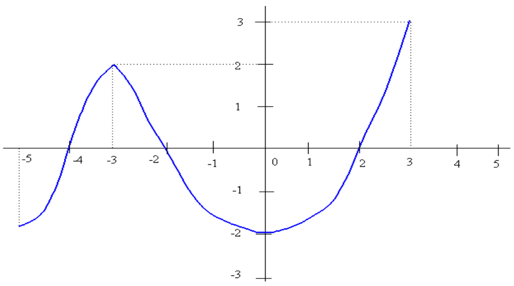
Solución: Decreciente

5.- Halla los puntos para los cuales la función $y = x^2-3x-4$ es: a) creciente b) decreciente.

Solución: Creciente en $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, *decreciente en* $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

6.- Estudia para qué valores de x está definida la función f(x)=L[(x-1)(x-2)] y en qué valores es creciente o decreciente.
Solución: Está definida en $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
Es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(2, \infty)$.

7.- De una función $f : [-5,5] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que la gráfica de su función derivada f ' es la adjunta:
Determina de forma razonada los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Solución: Crecimiento en $(-4, -2) \cup (2, 3)$ y decrecimiento en $(-5, -4) \cup (-2, 2)$.



8.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{si } x < 0; \\ ax+b, & \text{si } 0 \leq x \leq 3; \\ x-5, & \text{si } 3 < x. \end{cases}$

a) Halla a y b. b) ¿Es f decreciente en el intervalo [-1,1]?

Solución: a) a = $-\frac{1}{3}$ y b = 1. b) Sí.

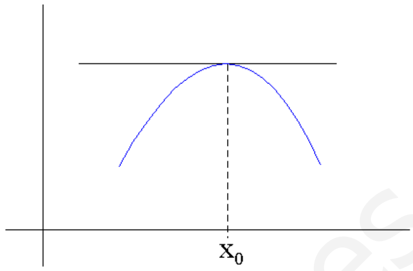
2.3.- PUNTOS CRÍTICOS

1.- Máximos relativos

Una función presenta un máximo relativo en $x = x_0$ si existe un entorno de x_0, $E(x_0, r)$, tal que para todo valor perteneciente a ese entorno se verifica $f(x) < f(x_0)$

Para decidir si existe un máximo en un punto podemos aplicar los siguientes criterios:

- Aplicación directa de la definición.
- Si $f'(x_0) = 0$, siendo $f'>0$ a la izquierda del punto y $f' < 0$ a la derecha.
- Si existen f' y f'' en x_0 y se cumple simultáneamente que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0)< 0$.

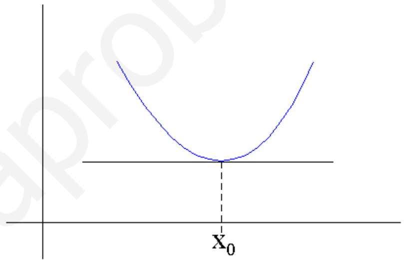


2.- Mínimos relativos

Una función presenta un mínimo relativo en $x=x_0$ si existe un entorno de x_0, $E(x_0, r)$, tal que para todo valor perteneciente a ese entorno se verifica $f(x) > f(x_0)$

Para decidir si existe un mínimo en un punto podemos aplicar los siguientes criterios:

- Aplicación directa de la definición.
- Si $f'(x_0) = 0$, siendo $f'<0$ a la izquierda del punto y $f'>0$ a la derecha.
- Si existen f' y f'' en x_0 y se cumple simultáneamente que $f'(x_0) =0$ y $f''(x_0)>0$.



EJEMPLOS

1.- Halla *a*, *b*, *c* y *d* de manera que la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un mínimo relativo en x = 0 siendo f(0) = 0, y un máximo relativo en x = 2 siendo f(2) = 2.

Resolución:
Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ su derivada es:
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

- Como $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

- Como tiene un mínimo relativo en x = 0:
  $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = ax^3+bx^2$

- Si f tiene un máximo relativo en x = 2, tendremos que f(2) = 2.
  $f(2) = 2 \Rightarrow a.2^3+b.2^2 = 2 \Rightarrow 8a +4b = 2 \Rightarrow 4a + 2b = 1$

- Si f tiene un máximo relativo en x = 2, tendremos que f'(2) = 0.
  $f'(2) = 0 \Rightarrow 3a.2^2+2b.2 = 0 \Rightarrow 12a +4b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0$

  Obtenemos el sistema:
  $$\begin{cases} 4a+2b=1 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}$$

Es decir la función pedida es: $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2$

2.- Halla el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos de h(x) = $\left(\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{Lx}}\right)$

Resolución:

- El dominio de definición es: D(h) = $(0, 1)\cup(1, +\infty)$
- La derivada es: h'(x) = $\dfrac{Lx-1}{[Lx]^2}$

Como el denominador es positivo, el signo de h'(x) será el de Lx-1
Lx - 1 = 0 $\Rightarrow$ Lx = 1 $\Rightarrow$ x = e

Como y = Lx - 1 es continua y únicamente se anula en x = e, su signo será constante en (0, e) y en (e, $+\infty$):

h'(e^2) = $\dfrac{2-1}{4} = \dfrac{1}{4} > 0$

h'(e^{-1}) = $\dfrac{-1-1}{(-1)^2} = -2 < 0$

Luego:

- La función h(x) es creciente en (e,+ ∞), pues h' > 0
- La función h(x) es decreciente en $(0,1)\cup(1,e)$, pues h' < 0
- Hay un mínimo relativo en x_0 = e $\Rightarrow$ P(e, e), ya que h'(e) = 0 y la derivada pasa de negativa a positiva en x = e.

3.- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento así como los extremos relativos y absolutos de la función f dada por f(x) = $\mathbf{x\sqrt{4-x^2}}$ en el intervalo cerrado en el que está definida.

Resolución:

Calculemos el intervalo de definición de y = f(x). Para ello descomponemos el radicando en factores, sabiendo que debe ser mayor o igual que cero:
$4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$

que es positivo o nulo en [-2, 2], luego está definida en dicho intervalo.

- Crecimiento y decrecimiento:

  f '(x) = $\sqrt{4-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

  es creciente para f '(x) >0. Se anula en:
  $4-2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

  puntos que dividen al intervalo de definición en las regiones:
  $[-2, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 2]$.

  Hallamos el signo de la derivada en cada uno de ellos, obteniendo que:
  Creciente en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y decreciente en $[-2, -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}, 2]$

- Máximos y mínimos.
  Nos fijamos en la condición de crecimiento y decrecimiento en un entorno de estos. Han de estar situados en x = $\pm\sqrt{2}$.

- Mínimo relativo:

En x = $-\sqrt{2}$ la función pasa de decreciente a creciente luego existe un mínimo relativo, con valor

f($-\sqrt{2}$) = $-\sqrt{2}\sqrt{4-2}$ = -2, es decir: m = ($-\sqrt{2}$, -2)

- Máximo relativo:

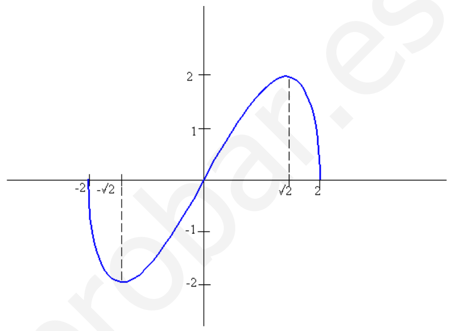
En x = $\sqrt{2}$ la función pasa de creciente a decreciente luego existe un máximo relativo, cuyo valor es f($\sqrt{2}$) = $\sqrt{2}\sqrt{4-2}$ = 2, es decir: M = ($\sqrt{2}$, 2)

Para saber si son máximos y mínimos absolutos debo hallar los valores de la función en los extremos del intervalo:

- f(-2) = $-2\sqrt{4-(-2)^2}$ = 0

- f(2) = $2\sqrt{4-(-2)^2}$ = 0

Los máximos y mínimos relativos hallados antes son también máximos y mínimos absolutos, tal como se ve en la figura, siendo x = -2 un máximo relativo y x = 2 un mínimo relativo, tal como se observa en la gráfica.



4.- Dada la función f(x) = $\dfrac{e^{-x}}{(x+1)}$, halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

Resolución:

Para ver los intervalos de crecimiento y decrecimiento tenemos que estudiar la derivada:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)^2 - [e^{-x}.2(x+1)]}{(x-1)^4} = \frac{-e^{-x}[(x+1)^2 + 2(x+1)]}{(x-1)^4} = \frac{-e^{-x}(x+1)[(x+1)+2]}{(x-1)^4}$$

es decir:

f '(x) = $-e^{x}$.(x+1)(x+3)

queda:

x + 1 = 0 ⇒ x = -1, que no pertenece al dominio.

x + 3 = 0 ⇒ x = -3.

- En $\left(-3, \dfrac{e^3}{4}\right)$ hay un mínimo porque pasa de decreciente a creciente.
- f(x) es creciente en (-3, -1).
- f(x) es decreciente en (-∞, -3)∪(-1,∞)

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x) = x^4e^x. Calcula también sus máximos y mínimos relativos.

Solución: Crecimiento (0,4), Decrecimiento (-∞,0)∪(4,∞).

Máximo $\left(4, \dfrac{256}{e^4}\right)$, *Mínimo(0,0)*

2.- La función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tiene un valor mínimo de 3 para x = 2. Halla p y q.
Solución: p = -3, q = 7.

3.-Determina si la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ posee puntos donde alcance valores máximos o mínimos locales, y, en caso afirmativo, calcúlalos.
Solución: Máximo en M = (0, 1). Mínimos en $m_1 = (-1, 0)$ y $m_2 = (1, 0)$.

4 .- Halla a, b, c, d, en la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un máximo en el punto (0, 4) y un mínimo en el (2, 0).
Solución: a = 1, b = -3, c = 0, d = 4.

5.- La función valor absoluto ¿Presenta un mínimo absoluto en algún punto? ¿En qué puntos es derivable?
Solución: En x = 0. En todos salvo en x = 0.

6.- Halla los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$$

Solución:

$$Máximo\left(-2, \frac{10}{3}\right), Mínimo\left(1, -\frac{7}{6}\right)$$

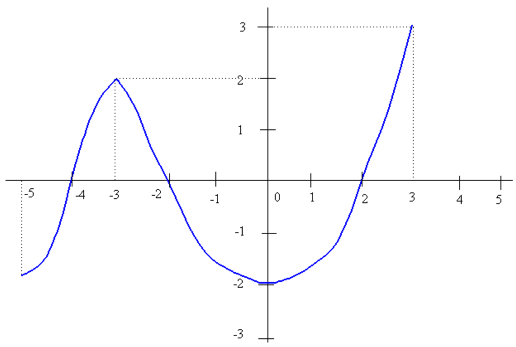
7.- Halla los extremos relativos de las función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+4}$
Solución: Existe máximo en (-9, -16) y mínimo en (0,0)

8.- Dada la función $y=Ax^3+Bx$, hallar A y B para que tenga un mínimo en el punto (2, -48)
Solución: A = 3, B = -36

9.- Halla los máximos y mínimos de $y = x^3$
Solución: No hay ni máximo, ni mínimo

10.- La curva dada por $y = x^2 + ax + b$ pasa por el punto P = (-2, 1) y alcanza un extremo relativo en x = -3. Halla a y b.
Solución: a = -6, b = -15.

12.- De una función $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que la gráfica de su función derivada f' es la siguiente
Di cuáles son los puntos críticos de f y determina de forma razonada si en cada uno de ellos la función f alcanza un máximo o un mínimo relativo.
Solución: x = -4 (mínimo), x= -2 (máximo), x= 2 (mínimo).



13- Sea f: [-1,3] $\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por
$f(x) = |x^2 - 4|$
Dibuja la gráfica de f indicando los puntos en los que f alcanza sus extremos absolutos. Especifica el valor del mínimo absoluto y del máximo absoluto de f.

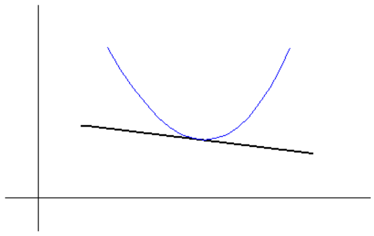
5.- De la función polinómica f se sabe que su función derivada tiene como representación gráfica la recta de ecuación 3x-2y+1 = 0. ¿Tiene f algún extremo local? Si la respuesta es afirmativa, indica si se trata de un máximo o de un mínimo y en qué valor de x se alcanza.

Solución: En x = $-\dfrac{1}{3}$*, luego hay un mínimo relativo.*

2.4.- CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

1.- Concavidad

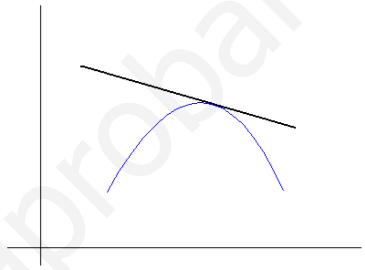
Una función es cóncava en un intervalo si la gráfica de la función queda por encima de la recta tangente en cada uno de los puntos:
$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$



Para decidir si una función es cóncava en un intervalo podemos aplicar el criterio de la 2ª derivada:
$f''(x_0) > 0$.

2.- Convexidad

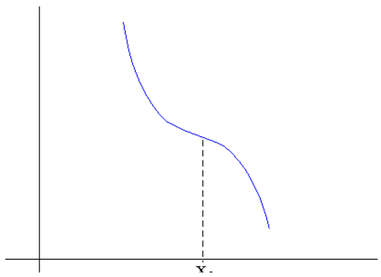
Una función es convexa en un intervalo si la gráfica de la función queda por debajo de la recta tangente en cada uno de los puntos:
$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$



Para decidir si una función es convexa en un intervalo podemos aplicar el criterio de la 2ª derivada:
$f''(x_0) < 0$.

3.- Punto de inflexión

Una función tiene un punto de inflexión en $x = x_0$ si en dicho punto la función pasa de cóncava a convexa o viceversa.



Si una función tiene puntos de inflexión entonces su derivada segunda se anula en dicho punto.

Para decidir si existe un punto de inflexión en un punto podemos aplicar:

- Criterio de la 2ª derivada: El signo de f'' cambia de izquierda a derecha del punto.
- Criterio de la 3ª derivada: $f''' \neq 0$ en dicho punto.

EJEMPLOS

1.- ¿Qué relación ha de existir entre *a* y *b* para que la función
$f(x) = ax^2 + e^{-bx}$

tenga un punto de inflexión en x = 0?

Resolución:
hallemos la primera y segunda derivadas de f:
$f'(x) = 2ax-be^{-bx}$
$f''(x) = 2a+b^2e^{-bx}$

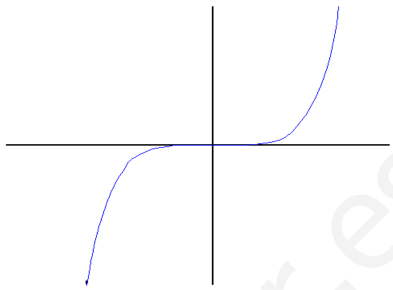
Para que f tenga un punto de inflexión en x=0 debe ocurrir que $f''(0) = 0$
$2a+b^2e^{-b0} = 0 \Rightarrow 2a+b^2 = 0$

La relación buscada es $b^2 = -2a$

2.- Estudia la concavidad o convexidad de $f(x) = x^5$

Resolución:
Hallemos las derivadas de f:
$f'(x) = 5x^4$
$f''(x) = 20x^3$

- Si x< 0, f''(x)<0, f(x) es cóncava en $(-\infty, 0)$.
- Si x >0, f''(x)>0, f(x) es convexa en $(0, \infty)$.
- En x = 0, f''(0) = 0 y como la derivada segunda cambia de signo a ambos lados podemos asegurar que hay un punto de inflexión.



3.- Halla b, c y d en la función $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$ para que tenga un punto de inflexión de abscisa x = 3, pase por el punto P = (1, 0) y alcance un mínimo en x = 1.

Resolución:
Las derivadas serán:
$f'(x) = 3x^2+2bx+c$
$f''(x) = 6x+2b$

- Si en x =3 tenemos un punto de inflexión:
  $f''(3) = 6.3+2b = 0 \Rightarrow 18+2b = 0 \Rightarrow b = -9$

  La función y la derivada son:
  $f(x) = x^3-9x^2+cx+d$
  $f'(x) = 3x^2-18x+c$
- Como en x=1 tiene un mínimo su derivada primera ha de anularse:
  $f'(1) = 3-18+c = 0 \Rightarrow 15+c = 0 \Rightarrow c = 15$
- Como pasa por P = (1, 0), este punto verificará la ecuación:
  $1+b+c+d = 0 \Rightarrow 1+9+15+d = 0 \Rightarrow 7+d = 0 \Rightarrow d = -7$

La función pedida será:
$f(x) = x^3-9x^2+15x-7$

4.- Determina los números reales m y n para los que la función $f: (0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{m}{\sqrt{x}} + n\sqrt{x}$$

tiene en el punto (1, 4) un punto de inflexión.

Resolución:
Como la función pasa por el punto P(1,4) se verifica que f(1)= 4. Para que dicho punto sea un punto de inflexión, ha de verificarse que f''(1) = 0.

Efectuemos la 1ª y 2ª derivadas:

$f'(x) = -\dfrac{m}{2\sqrt{x^3}} + \dfrac{n}{2\sqrt{x}}$

$f''(x) = \dfrac{3m}{4\sqrt{x^5}} - \dfrac{n}{4\sqrt{x^3}}$

Sustituyendo valores en para x = 1 tendremos:

$f''(1) = \dfrac{3m}{4} - \dfrac{n}{4} = 0 \Rightarrow 3m - n = 0 \Rightarrow 3m = n$

$f(1) = m + n = 4 \Rightarrow 4m = 4 \Rightarrow m = 1$

$1 + n = 4 \Rightarrow n = 3$

Luego la solución buscada es:
m = 1, n = 3.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función:
$f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 12x + 2$
Solución: Cóncava en $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$. Convexa en $(-1,3)$. Puntos de inflexión: $(-1,32)$ y $(3, -96)$.

2.- Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $f(x) = xe^x$
Solución: Cóncava en $(-2,\infty)$. Convexa en $(-\infty,-2)$. Punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

3.- Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Solución: Cóncava en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$. *Convexa en* $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Puntos de inflexión en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$ *y* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$

4.- Halla a para que la gráfica de la función $f(x) = x^4 + ax^3 - 12x^2 - 25x + 6$ tenga un punto de inflexión en x = -2. ¿Tiene más puntos de inflexión para dicho valor?
Solución: a = 2. Sí, x = 1.

5.- Demuestra que (a, b) es un punto de inflexión de la función $y = (x - a)^3 + b$.

6.- Calcula los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $y = x^4 - 2x^2$.
Solución: Máximo en M = (0, 0). Mínimos en $m_1 = (-1, -1)$ y $m_2 = (1, -1)$.
Puntos inflexión en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{5}{9}\right)$ *y* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{5}{9}\right)$

7.- Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 6x^2 + 4$ en su punto de inflexión.
Solución: y = -6x + 6.

8.- Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de $f(x)= Ln(x^2+1)$
Solución: Cóncava en $(-1,1)$. Convexa en $(-\infty,-1)\cup(1, \infty)$. P. I. en $(-1, Ln2)$ y $(1, Ln2)$.

2.5.- OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

En los problemas de optimización se trata de, dada una función en un intervalo, averiguar donde toma el valor máximo o mínimo, sujeta a unas condiciones de ligadura dadas por el enunciado del problema. Para resolverlos se sigue el siguiente esquema:

- A partir de los datos obtenidos de la realidad se construye una función que hay que optimizar.
- Si las variables de la función son 2 o más se utilizan las condiciones del problema para expresar la función anterior como función de una variable.
- Se maximiza o minimiza (según sea) la función.
- Se rechazan los resultados que no respondan a la realidad del problema y, a partir de las calculadas, se obtienen todas las variables del problema.

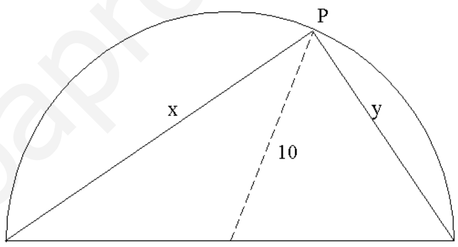
EJEMPLOS

1.- Averigua como han de ser los lados del triángulo de área máxima inscrito en una semicircunferencia de radio 10 unidades.

Resolución:

Tomamos como x e y los catetos del triángulo. El triángulo es rectángulo ya que abarca un diámetro de la circunferencia, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$x^2 + y^2 = 100$



Despejando obtenemos y = f(x):

$y = \sqrt{100-x^2} \Rightarrow A = x.y = x.\sqrt{100-x^2}$

Para maximizar el área tomamos la 1ª derivada y la anulamos :

$A'(x) = \sqrt{100-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = 0 \Rightarrow 100 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$

Como en un entorno de $x = 5\sqrt{2}$, el signo de A’ es positivo a la izquierda y negativo a la derecha, es un máximo. La solución negativa se descarta.

Los lados del triángulo rectángulo son $x = 5\sqrt{2}$, $y = 5\sqrt{2}$, es decir se trata de un triángulo isósceles.

2.- De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2) encuentra la que determina con los ejes coordenados y en el primer cuadrante un triángulo de área mínima y el valor de dicha área.

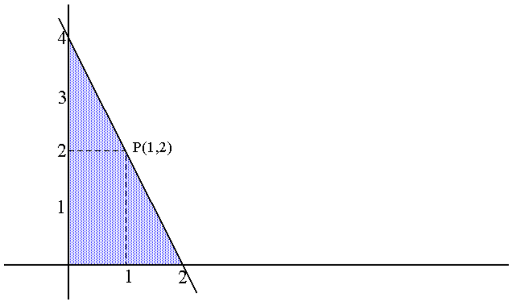
Resolución:

Las rectas que pasan por el punto (1,2) tienen de ecuación en forma punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, es decir, $y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow y = 2 + m(x - 1)$

Corta a los ejes de coordenadas en:

- $x = 0 \Rightarrow y = 2-m$, es decir el punto:
  $B = (0, b) = (0, 2-m)$

- $y = 0 \Rightarrow -2=m(x-1)$, es decir el punto:
  $A = (a,0) = \left(\frac{m-2}{m}, 0\right)$



Como deseamos minimizar el área del triángulo formado por la recta y los ejes de coordenadas, se trata de minimizar la superficie rayada de la figura.

Al ser el triángulo rectángulo, la base y altura coinciden con los catetos a y b, de dimensiones son $\frac{m-2}{m}$ y 2-m respectivamente, siendo superficie:

$$S = \frac{1}{2}.\frac{m-2}{m}.(2-m) = \frac{-m^2+4m-4}{2m}$$

Para minimizar hallamos el valor de m que anula la primera derivada de S:

$$S' = \frac{(-2m^2+4)(2m)-(-m^2+4m-4)2}{4m^2} = \frac{4-m^2}{2m^2} = 0 \Rightarrow 4 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$$

Para hallar la solución válida calculamos la segunda derivada y sustituimos los valores de m para ver en cual de ellos S'' es positiva):

$$S'' = \frac{-2m.2m^2-(4-m^2).4m}{4m^4} = \frac{-4m^2-16m+4m^2}{4m^4} = -\frac{4}{m^3}$$

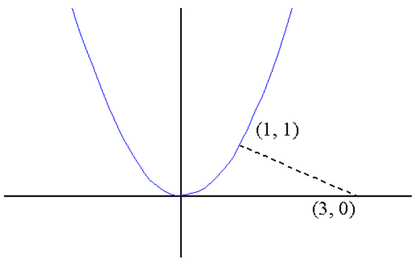
$S''(2) = -\frac{4}{2^3} < 0$, $S''(-2) = -\frac{4}{(-2)^3} > 0$, m = -2 es un mínimo.

La superficie buscada es: $S(-2) = \frac{-(-2)^2+4.(-2)-4}{2.(-2)} = 4$

3.- Determina el punto de la curva cuya ecuación es $y = x^2$ que está más cerca del punto A = (3,0)

Resolución:

Sea Q el punto buscado, como Q ha de pertenecer a la curva, habrá de verificar su ecuación, es decir: $Q = (x, x^2)$



La distancia entre los puntos P y Q vendrá dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x-3)^2+(x^2-0)^2} =$$
$$= \sqrt{x^2-6x+9+x^4} = \sqrt{x^4+x^2-6x+9}$$

Como dicha distancia ha de ser mínima, d'(P, Q) =0:

$$d'(P, Q) = \frac{4x^3+2x-6}{2\sqrt{x^4+x^2-6x+9}} = \frac{2x^3+x-3}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}} = 0 \Rightarrow 2x^3+x-3 = 0$$

obteniendo como única solución real x=1, que es un mínimo ya que:

$$d''(P, Q) = \frac{x^2(2x^4+3x^2-24x+54)}{\sqrt{(x^4+x^2-6x+9)^3}}$$

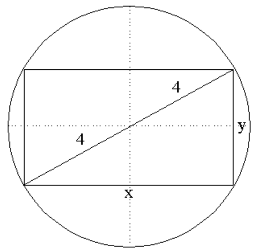
$$d''(1) = \frac{7\sqrt{5}}{5} > 0$$

Por lo tanto el punto buscado es Q = (1,1)

4.- En una circunferencia de radio 4 se inscribe un rectángulo, (mira la figura). ¿Cuáles son las dimensiones del que tiene mayor área?

Resolución:

Tomamos como valor de la base x y como altura y. El área del rectángulo es el producto de base por altura A = x.y.



Teniendo en cuenta que base y altura son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el diámetro de la circunferencia:

y= $\sqrt{8^2-x^2}=\sqrt{64-x^2} \Rightarrow$ A = $x\sqrt{64-x^2}$

Como queremos que el área sea máxima:

$A' = \sqrt{64-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{64-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{64-x^2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{64-x^2}} \Rightarrow 64-2x^2=0 \Rightarrow x^2 = 32$

x = $4\sqrt{2}$, y = $\sqrt{64-32} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Desechamos el valor negativo por tratarse de longitudes. Como:

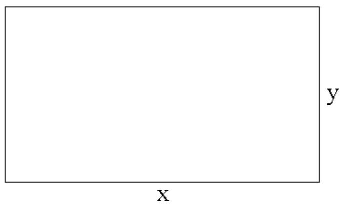
$A'' = -\dfrac{3x}{\sqrt{64-x^2}} - \dfrac{x^3}{\sqrt{(64-x^2)^3}} \Rightarrow A''(4\sqrt{2}) = -4$

es un máximo, resultando un cuadrado de $4\sqrt{2}$ unidades de lado.

5.- ¿Cómo hay que doblar un trozo de alambre de 4 metros de longitud para que forme un rectángulo cuya área sea lo más grande posible?

Resolución:

Tomamos en el rectángulo como valor de la base x y como altura y. Sabemos que el perímetro del rectángulo es la suma de los valores de sus lados 4 =2x +2y.



El área del rectángulo es A = x.y. De la ecuación del perímetro despejamos y:

y = $\dfrac{4-2x}{2}$ = 2-x $\Rightarrow$ A(x) = x(2-x) = 2x-x^2

Como queremos que el área sea lo mayor posible, la derivada A' ha de ser nula, es decir:

A' = 2-2x = 0 $\Rightarrow$ x = 1 m; y = 2-x = 2-1 = 1 m

A'' = -2 $\Rightarrow$ A''(1) = -2 <0, efectivamente es un máximo

El alambre habrá que doblarlo formando un cuadrado de 1 metro de lado.

8.- Sabemos que la temperatura en el interior de una cámara frigorífica viene dada por la expresión *f (t) = at²* + *bt* + c donde *t* representa las horas transcurridas desde que fue conectada a la red eléctrica y *a*, *b y c* son constantes reales. Al conectarla, y por efecto del calor del motor, la temperatura interior asciende y alcanza su máximo a los tres cuartos de hora. A partir de ese momento comienza a descender y transcurrida una hora desde su conexión alcanza los cero grados centígrados. A las dos horas de su conexión la temperatura es de -3°C. A partir de estos datos, determina razonadamente los valores de *a, b y c*.

Resolución:

- Transcurrida una hora desde su conexión la temperatura es de 0°C:
  $f(1) = a.1^2 + b.1 + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$

- A las dos horas desde su conexión la temperatura es de -3°C:
  $f(2) = a.2^2 + b.2 + c = -3 \Rightarrow 4a + 2b + c = -3$

- A los tres cuartos de hora desde su conexión la temperatura alcanza su máximo y al ser una función continua y derivable su derivada es nula:
  $f'(t) = 2at + b \Rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow f' = 2a.\frac{3}{4} + b = 0 \Rightarrow \frac{3a}{2} + b = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$

Tenemos el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = -3 \\ 3a + 2b \quad = 0 \end{cases}$$

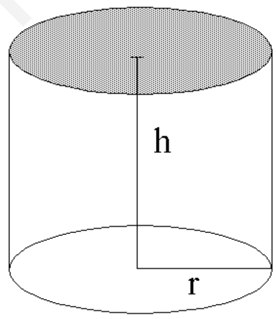
Con soluciones: $a = -2$, $b = 3$, $c = -1$

10.- Se quiere construir un depósito cilíndrico abierto de 3 m^3 de capacidad. La chapa para hacer la base cuesta 300 ptas. el m^2 y la chapa para la pared lateral cuesta 100 ptas. el m^2. Calcula las dimensiones más económicas.

Resolución:

Se trata de minimizar el coste:

$P = 300.\pi r^2 + 100.2\pi rh$



con la restricción dada por el volumen del cilindro. Como dicho volumen es:

$V = \pi r^2 h = 3 \Rightarrow h = \frac{3}{\pi r^2}$

Luego:

$P = 300.\pi r^2 + 100.2\pi r.\frac{3}{\pi r^2} = 300.\pi r^2 + \frac{600}{r}$

Debemos igualar la primera derivada a cero:

$P' = 600.\pi r - \frac{600}{r^2} = 0 \Rightarrow 600.\pi r = \frac{600}{r^2} \Rightarrow 600.\pi r^3 = 600 \Rightarrow \pi r^3 = 1$

con solución:

$r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ m $\Rightarrow h = \dfrac{3}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ m

Comprobemos que para esas dimensiones tenemos un precio mínimo:

$P''(r) = 600\pi + \frac{1200}{r^3}$

$P''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right) = 600\pi + \frac{1200}{1/\pi} = 600\pi + 1200\pi = 1800\pi > 0$

luego para estos valores de r y h el precio es mínimo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Se quiere construir un marco de madera rectangular para una ventana de 8 m^2 de superficie. Sabiendo que el trozo horizontal del marco cuesta 100 ptas. el metro y el vertical 1500 ptas., calcula las dimensiones que es necesario dar al marco para que el coste sea mínimo. Calcula también el valor del marco.

Solución: x= $\sqrt{120}$ *m, y =* $\frac{8}{\sqrt{120}}$ *m. Coste = 100.* $\sqrt{120}$ + $\frac{8}{\sqrt{120}}$ *.1500.*

2.- Halla dos números cuya suma sea 20 y su producto el mayor posible.
Solución: x=10, y=10

3.- Los barriles que se emplean para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica. Averiguar cuáles serán las dimensiones de un barril de 160 litros de capacidad para que la cantidad de chapa empleada en su construcción sea mínima.
Solución: r=5, h=2.

4.- Se quiere construir el marco de una ventana cuyo hueco es de 1 m^2. El coste del marco es de 125 pta/m para la altura de la ventana y de 80 pta/m por cada metro de anchura. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la ventana para que el marco sea lo más económico posible?.

Solución: anchura: $\frac{4}{5}$ *m., altura:* $\frac{5}{4}$ *m.*

5.- Se quiere construir una cerca de tela metálica en una finca rectangular, uno de cuyos lados es una pared de piedra. Si el área de la finca es de 1.200 m^2, calcula las dimensiones que debe tener para que el costo sea mínimo sabiendo que un metro lineal de tela metálica vale 2.500 ptas.
Solución:
x= $10\sqrt{6}$ *m, y=* $20\sqrt{6}$ *m (lado paralelos a la pared).*

6.- Un deposito abierto de chapa y base cuadrada, debe tener capacidad para 13.500 litros. ¿Cuáles han de ser sus dimensiones para que se precise la menor cantidad de chapa?
Solución: l = 30dm, h = 15dm.

7.- Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular. Si dispone de 20 metros de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la mayor superficie posible?.
Solución: r = 5m.

8.- Descompón el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.
Solución: x = 15, y = 10.

9.- Halla el radio de la base y la altura de un cilindro inscrito en una esfera de radio R si el volumen del cilindro es máximo.

Solución: h = $\frac{R}{\sqrt{3}}$ *, r =* $\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

12.- En el curso académico Octubre de 1995-Septiembre de 1996 expresamos el tiempo t en días, correspondiendo t = 0 al día 1 de Octubre de 1995, el número de horas dedicadas al estudio por un estudiante hasta el 30 de Mayo sigue la ley N(t) = $\frac{2}{(91)^2}t^2 - \frac{4}{91}t + 3$. Sabiendo que Febrero de 1996 ha tenido 29 días, se pide:

a) ¿A qué fecha corresponde el día del curso en el que menos ha estudiado y cuántas horas estudió dicho día?

b) ¿En qué fecha de 1996 el número de horas de estudio es igual al de horas de estudio del primer día del curso?

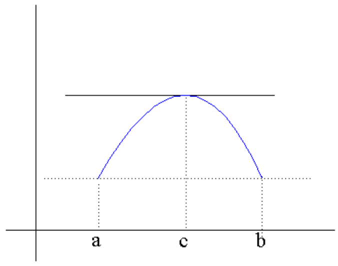
Solución: a) t = 91, 31 de Diciembre de 1995. b) 31 de Marzo de 1996.

2.6.- TEOREMAS DE CALCULO DIFERENCIAL

1.- Teorema de Rolle

Si f una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), tal que f(a) =f(b) entonces existe un punto $c \in (a, b)$ para el que cumple que f '(c) = 0

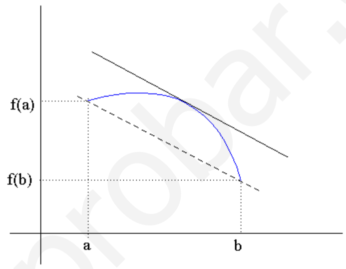
Gráficamente existe algún punto c comprendido entre a y b tal que la tangente a la gráfica de f en ese punto es paralela al eje de abscisas.



2.- Teorema del valor medio de Lagrange

Si f es continua en [a, b] y derivable en (a, b) existe un punto c, que pertenece al intervalo (a, b), tal que: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Gráficamente existe algún punto c, situado entre a y b, tal que la tangente en ese punto c es paralela a la cuerda que une los extremos.



3.- Teorema de Cauchy

Sean f y g funciones continuas en [a, b], derivables en (a, b), g(b) ≠ g(a) y g'(c) ≠ 0, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ en el cual se cumple que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

EJEMPLOS

1.- ¿Es posible asegurar que la función $f(x) = sen(x^2) + x^2$ es tal que su derivada se anula en algún punto del intervalo [-1,1]?

Resolución

Veamos si cumple las condiciones de dicho teorema en el intervalo dado.

- Es continua en [-1,1] es puesto que es suma de funciones continuas
- Es derivable en (-1,1) puesto que es suma de funciones derivables.
- Como f(-1) = sen(1) +1 y f(1) = sen(1) +1 ⇒ f(-1) = f(1).

Se cumple la tesis del teorema, existe $c \in (-1,1)$ tal que f '(c) = 0.

2.- Demuestra que la ecuación $x^3+6x^2+15x-23 = 0$ no puede tener mas que una raíz real.

Resolución

Como la derivada es $f'(x) = 3x^2+12x+15$ se anula en:

$3x^2+12x+15 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{-36}}{6} \notin \mathbb{R}$, la derivada de f no se anula nunca.

Si f tuviese más de una raíz, a y b, aplicando el teorema de Rolle al intervalo [a, b], como f es continua en [a, b] y derivable en (a, b) por ser polinómica y f(a) = f(b) = 0 se cumpliría la tesis, f ' se anularía en algún punto entre a y b, en contra del resultado anterior, por lo tanto f a lo sumo se anula en un punto.

3.- Calcula a, b y c para que la función

f(x) = $\begin{cases} \mathbf{x^2+ax+b \text{ si } x<2} \\ \mathbf{cx+1 \text{ si } x\geq 2} \end{cases}$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo (0,4). ¿En qué punto se cumple la tesis?.

Resolución

- La función ha de ser continua en el intervalo [0,4]. Como f está definida mediante funciones polinómicas, debemos averiguar la continuidad en x=2: $(2)^2$ +a(2)+b = c(2)+1 $\Rightarrow$ 4+2a+b = 2c+1

- La función derivada es f '(x) = $\begin{cases} 2x+a & x<2 \\ c & x>2 \end{cases}$ que está definida mediante funciones polinómicas, para que sea derivable en x =2 ha de ocurrir que:

  $f'(2^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{[(2+h)^2+a(2+h)+b]-(2c+1)}{h} =$

  $= \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2+(a+4)h+(4+2a+b)-(2c+1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}[h+(a+4)] = a+4$

  $f'(2^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{[c(2+h)+1]-(2c+1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{ch}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} c = c$

  Como ha de ser derivable en x = 2, $f'(-2^+) = f'(2^-)$: a+4 = c

- Si f(0) = f(4): b = 4c+1

Resolviendo el sistema

$\begin{cases} 4+2a+b=2c+1 \\ \quad a+4 \;=c \\ \qquad b\;=\;4c+1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ a = -3, b = 5, c = 1

siendo la función y su derivada:

f(x) = $\begin{cases} x^2-3x+5 \text{ si } x<2 \\ x+1 \text{ si } x\geq 2 \end{cases}$ f '(x) = $\begin{cases} 2x-3 \text{ si } 0\leq x<2 \\ 1 \text{ si } 2\leq x\leq 4 \end{cases}$

El punto intermedio, c, que verifique f '(c) = 0 pertenecer al intervalo [0, 2]:

2c-3 = 0 $\Rightarrow$ c = $\dfrac{3}{2} \in (0, 4) \subset (0, 4)$

4.- Aplica el teorema del valor medio, si es posible, a la función f(x) = $\mathbf{x^2}$–3x+2 en [-2, -1]. Calcula el valor donde se cumple la tesis.

Resolución:

- Es posible aplicarlo puesto que.
  a) f sea continua en [-2, -1], lo es ya que es una función polinómica.
  b) f sea derivable en (-2, -1), lo es ya que es una función polinómica.

- Como la derivada es f '(x) = 2x-3, f(-1)=6 y f(-2) = 12:

  f `(c) = 2c-3 = $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{6-12}{-1-(-2)} = \dfrac{-6}{1}$ = -6 $\Rightarrow$ 2c = -3 $\Rightarrow$ c =-$\dfrac{3}{2} \in (-2, -1)$

5.- Estudia, según los valores del parámetro a, la continuidad y derivabilidad de la función f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{x^2 + ax,\ si\, x \le 2;} \\ \mathbf{a - x^2,\ si\, x > 2.} \end{cases}$$

¿Hay algún valor de a para que se pueda aplicar el Teorema del valor medio en el intervalo [1, 3]? Halla el punto donde se cumple la tesis.

Resolución

Es continua y derivable en $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$ cualquiera que sea el valor de a. Para que f sea continua en 2, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} (x^2 + ax) = 4+2a$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} (a - x^2) = a-4$$

Igualando ambos límites obtenemos que: $4+2a = a-4 \Rightarrow a=-8$

Cuando $a \neq -8$ no será derivable por no ser continua. Si $a = -8$ veamos si es derivable, para ello han de coincidir las derivadas laterales, $f'(2^-) = f'(2^+)$:

$$f'(2^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-8x)-(-12)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-8x+12}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-6)}{(x-2)} = -4$$

$$f'(2^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 2} \frac{(-8-x^2)-(-12)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(2+x)(2-x)}{-(2-x)} = -4$$

Por lo tanto para $a = -8$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$., en particular lo será en [1,3], luego para dicho valor de a se podrá aplicar el Teorema de Lagrange.

Para calcular el punto c escribimos f(x) y f '(x) para a = -8:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-8x,\ si\ x \le 2; \\ -8-x^2,\ si\ x > 2. \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x-8,\ si\ x \le 2; \\ -2x,\ si\ x > 2. \end{cases}$$

Como $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-10}{2} = -5$:

- Para $x \le 2$ tenemos $2x-8 =-5 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (menor que 2 y mayor que 1)

- Para $x >2$ tenemos $-2x =-5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ (mayor que 2 y menor que 3)

Luego ambos son valores válidos.

6.- Halla el valor de c donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy, siendo $f(x) = x^2-2x+3$, $g(x) = x^2-5x+6$ en el intervalo [0,1].

Resolución

Comprobamos que sí se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy

- Ambas son continuas y derivables puesto que son polinómicas en R, en particular en [0, 1].
- Sus derivadas son:
  $f'(x) = 2x-2 \Rightarrow f'(c) = 2c-2$
  $g'(x) = 2x-5 \Rightarrow g'(c) = 2c-5$

Para hallar c sustituimos valores: f(1) = 2, f(0) = 3, g(1) = 2, g(0) = 6, queda:

$$\frac{2c-2}{2c-5} = \frac{2-3}{2-6} \Rightarrow \frac{2c-2}{2c-5} = \frac{+1}{4} \Rightarrow 2c-5 = 8c-8 \Rightarrow 6c = 3$$

Luego la solución buscada es $c = \frac{1}{2} \in (0,1)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Enuncia el Teorema de Rolle. La función f(x) = $|x^2-5|$ verifica que f(1) = f(3) = 4, sin embargo no cumple la tesis del teorema de Rolle en el intervalo [1,3]. ¿Por qué?
Solución: No es derivable en x = $\sqrt{5}$.

2.- Si la derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable independiente, ¿pueden existir dos números distintos **a** y **b** tales que f(a) = f(b)? ¿Por qué?
Solución: No. Porque será estrictamente creciente.

3.- Si el término independiente de un polinomio de 2º grado vale 3, y el valor numérico en x = 2 vale 3, prueba que su derivada se anula para algún valor de x. ¿A qué intervalo pertenece el punto?
Solución: (0,2)

4.- Sea la función f(x) = $(1-x)^{2/3}$, comprueba que f(0) = f(2) = 1 y que f ' no se anula nunca. ¿Es esto una contradicción del Teorema de Rolle? Enuncia dicho teorema.
Solución: No es una contradicción, ya que f no es derivable en x=1.

5.- Comprueba si la función f(x) = $3+x^3(x-3)$ verifica las hipótesis de dicho teorema en [0,3]. En caso afirmativo calcula los puntos, cuya existencia garantiza el teorema.
Solución: Si verifica el teorema de Rolle, c= $\frac{9}{4}$.

6.- Calcula a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+ax \text{ si } -1\le x\le 3 \\ bx+c \text{ si } 3<x\le 5 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-1, 5]. ¿Dónde cumple la tesis?
Solución: a = $\frac{10}{3}$*, b = -*$\frac{8}{3}$*, c = 9. Se cumple la tesis en d =-*$\frac{5}{3}$ $\in$*(-1,3)*

7.- Sea f(x) = $1-\sqrt[3]{x^2}$ comprueba que f(1) = f(-1) = 0, pero que f '(x) no se anula en (-1,1). ¿Es esto una contradicción del teorema de Rolle?. Enuncia dicho teorema.
Solución: No se contradice ya que no se verifican las hipótesis del teorema.

8.- ¿Es posible hallar a ,b y c de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+3 \text{ si } x\le 0 \\ -x^2+bx \text{ si } x>0 \end{cases}$$

cumpla el Teorema del Valor medio en el intervalo [-2, c]?. ¿Dónde se cumple la tesis?.
Solución: Si c> 0 no se puede. Si c $\in$*(-2, 0) se cumple la tesis para cualquier valor de a y b.*

9.- Enuncia el Teorema del Valor medio. Halla el punto de tangencia a la curva y = e^x de una recta que sea paralela a la cuerda de definida por los puntos A(0,1) y B(1,e).
Solución: c = L(e-1)

10.- Halla el valor de *c* donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy, siendo f(x) = 3x+2, g(x) = x^2+1 en el intervalo [1,4]
Solución: c = $\frac{5}{2}$

11.- Enuncia el Teorema de Cauchy y estudia si es aplicable a las funciones: f(x) = x^2-2x+3 y g(x) = $x^3-7x^2+20x-5$ en el intervalo [1, 4].
Solución: Sí se puede. c = 2

2.7.- REGLA DE L'HÔPITAL

Sean **f** y **g** dos funciones derivables en un entorno (a-r, a+r), si $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$ y existe el $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el de $\frac{f(x)}{g(x)}$ y se cumple $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede extender a los casos en que $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ y también a:

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\pm\infty$
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$

Otras indeterminaciones del tipo (∞-∞), (∞.0), (1^{∞}) y (0^0) se pueden poner en forma de cociente para aplicar la regla de L'Hôpital.

EJEMPLOS

1.- Calcula razonadamente $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Resolución:

Como es indeterminación del tipo (1^{∞}) tomamos en la expresión logaritmos para poder utilizar la regla, utilizando que $\lim_{x\to a} \mathrm{Ln}[f(x)] = \mathrm{Ln}\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$.

$$\mathrm{Ln}\ \lambda = \mathrm{Ln}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\mathrm{Ln}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}$$

Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ y aplicamos de nuevo la regla:

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{a^x+b^x}\cdot\frac{1}{2}.(a^x\mathrm{Lna}+b^x\mathrm{Lnb})}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{a^x+b^x}.(a^x\mathrm{Lna}+b^x\mathrm{Lnb}) = \frac{\mathrm{La}+\mathrm{Lb}}{2}$$

Por lo tanto: $L = e^{\lambda} = e^{\frac{\mathrm{Lna}+\mathrm{Lnb}}{2}} = e^{\mathrm{Ln}(ab)^{1/2}} = (ab)^{1/2} = \sqrt{a.b}$

2.- Calcula $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\mathrm{sen}x}$

Resolución:

Es una indeterminación $(0)^0$ en la que tomamos logaritmos neperianos en ambos términos y aplicamos la propiedad de que $\lim_{x\to a} \mathrm{Ln}[f(x)] = \mathrm{Ln}\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$

$$\mathrm{LA} = \mathrm{Ln}\left[\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\mathrm{sen}x}\right] = \lim_{x\to 0}[L(1-\cos x)^{\mathrm{sen}x}] = \lim_{x\to 0}[(\mathrm{sen}x.L(1-\cos x)] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{L(1-\cos x)}{\frac{1}{\mathrm{sen}x}} = \left(-\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Que resolvemos aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$LA = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\text{senx}}{1-\cos x}}{\dfrac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{senx}(1-\cos^2 x)}{-\cos x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{senx}(1+\cos x)}{-\cos x} = 0$$

Luego el límite es $A = e^0 = 1$

3.- Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{tg(x).Ln(x)}$.

Resolución:

Es una indeterminación del tipo 0.(- ∞). Para resolverla aplicamos la regla:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \text{tgx.Lnx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Lnx}}{\dfrac{1}{\text{tgx}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Lnx}}{\text{ctgx}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\text{sen}^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Indeterminación a la que aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\text{senx}\cos x}{1} = 0$$

4.- Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x-1}} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{\ln x}}\right)$

Resolución:

Como es una indeterminación (∞-∞) efectuamos la diferencia:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\,\text{Ln}\,x - x + 1}{(x-1)\text{Ln}\,x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Indeterminación que puede resolverse aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\text{Ln}\,x + \dfrac{x}{x} - 1}{\text{Ln}\,x + \dfrac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\text{Ln}\,x}{\text{Ln}\,x + 1 - \dfrac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

multiplicando numerador y denominador por x:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\,\text{Ln}\,x}{x\,\text{Ln}\,x + x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\text{Ln}\,x + 1}{\text{Ln}\,x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

6.- Calcula razonadamente $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)^{\mathbf{x}}$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo $(\infty)^0$ que resolvemos aplicando la propiedad $\lim_{x\to a} L[f(x)] = L[\lim_{x\to a} f(x)]$ y tomando logaritmos en ambos términos:

$$LA = L\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to 0}\left[L\left(\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to 0} xL\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{L\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Indeterminación que resolvemos aplicando la regla de L'Hôpital:

$$LA = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1/x^2}{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Por lo tanto el límite es $A = e^0 = 1$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Explica por qué no es correcta la siguiente aplicación de la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}\ \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-1}{2x}\ \lim_{x\to 1}\frac{6x+2}{2} = 4$$

y calcula el límite correctamente.

Solución: Porque $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-1}{2x}$ *no es una indeterminación, vale 2.*

2.- Calcula: a) $\lim_{x\to\infty} x(b^{\frac{1}{x}}-1)$ b) $\lim_{x\to 0}(e^x+x^3)^{\frac{1}{x}}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^3}$

Solución: a) Ln b, b) e , c) ∞

3.- Calcula: a) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$, b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$, c) $\lim_{x\to\infty}\frac{Lx}{\sqrt[3]{x}}$

Solución: a) $-\frac{1}{3}$, b) 3, c) *0*

4.- Calcula: a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(5x)}$, b) $\lim_{x\to 0}\operatorname{arcsen} x . \operatorname{cotg} x$, c) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x}$

Solución: a) 5, b) 1, c) *Ln a –Ln b*

5.- Averigua si es continua y derivable la función $f(x) = \begin{cases}\frac{x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$.

¿Es f '(x) continúa en x = 0?

Solución: f '(x) es continua en x = 0.

6.- Halla la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases}\frac{2x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 2 & \text{si } x=0\end{cases}.$$

¿Es f(x) continua en x= 0? ¿Es f(x) derivable en x= 0?

Solución: f es continua y derivable en x = 0. La función derivada será:

$$f'(x) = \begin{cases}\frac{2e^x(1-x)-2}{(e^x-1)^2} & \text{si } x\neq 0\\ -1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

2.8.- ACTIVIDADES DEL TEMA

1.- Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x<0 \\ x^2-1 \text{ si } 0\leq x\leq 1 \\ x-1 \text{ si } x>1 \end{cases}$$

Solución: Continua en ℝ. y derivable en ℝ -{1}.

2.- Sea f la función definida en el intervalo [-3, ∞) por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{si } -3\leq x\leq -1 \\ |x| & \text{si } -1<x<1 \\ 2x-1 & \text{si } 1\leq x \end{cases}$$

Determina los *punto*s en los que f es continua y los *punto*s en los que f es derivable.
Solución: es continua en [-3, -1)∪(-1, ∞), es derivable en (-3, -1)∪(-1, 0)∪(0, 1)∪(1, ∞)

3.- Considera la función f: ℝ → ℝ definida por f(x) = $|x+3|$, estudia su derivabilidad.
Solución: Derivable en ℝ – {-3}

4.- Dada la función f(x) = $|x-5|$ estudia su continuidad y derivabilidad.
Solución: Continua en ℝ y derivable en ℝ – {-3}

5.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x\leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0<x\leq 2 \\ \dfrac{-x+6}{2\sqrt{2}} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Calcula a y b para que f(x) sea continua en todo R ¿Es derivable la función así obtenida?
Solución: a= -1, b = 4. Es derivable en ℝ -{0}.

6.- Dada la función f: ℝ →ℝ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\leq x\leq 3 \\ 6x & \text{si } 3<x \end{cases}$$

determina los puntos en los que f es derivable y en cada uno de ellos calcula su derivada
Solución: es continua en ℝ -{3}, es derivable en ℝ -{3}, su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x \text{ si } x<0 \\ 2x \text{ si } 0\leq x<3 \\ 6 \text{ si } 3<x \end{cases}$$

7.- Averigua si es continua y derivable la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0<x\leq 1 \\ \sqrt{1-(x-2)^2} & \text{si } 1<x\leq 2 \end{cases}$$

Solución: Es continua en [0, 2], es derivable en (0,1)∪(1,2).

8.- Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x) = $\dfrac{x+1}{x^2+3}$

Solución: Creciente en (-3,1), decreciente en (-∞,-3)∪(1, ∞)

9.- ¿Para qué valores de $m \neq \frac{1}{2}$ la función $f(x) = x^3+2mx^2-5x+4$ es creciente en $x = 1$?

Solución: Creciente para $m > \frac{1}{2}$, *decreciente para* $m < \frac{1}{2}$

10.- Supongamos que el rendimiento r de una alumna en un examen que dura una hora viene dado por la relación $r(t) = 300t(1-t)$ donde t, con $0 \leq t \leq 1$, es el tiempo medido en horas. ¿En qué intervalos aumenta el rendimiento y en cuáles disminuye?

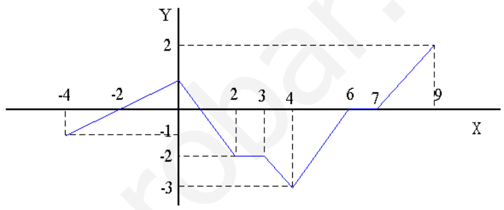
Solución: Aumenta en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, *disminuye en* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

10.- Considera la función $f(x) = (3-2x^2)e^x$. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f.

Solución: Creciente en $\left(-1-\frac{\sqrt{10}}{2}, 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$. *Decreciente en* $\left(-\infty, -1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}, \infty\right)$

11.- La gráfica de la función derivada de una función f: [-4, 9] $\rightarrow$ R es la de la figura. ¿Dónde es creciente, decreciente y constante?

Solución: creciente en $(-2,1) \cup (7,9)$
decreciente en $(-4,-2) \cup (1,6)$
constante en $[6, 7]$



12.- Calcula los extremos de la función f: [-7,1] $\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)= x^3 + 6x^2 + 49$
Solución: Máximo en (-4, 32), mínimo en (0, 49)

13.- Calcula los máximos y los mínimos relativos de $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$.

Solución: Mínimo $x = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{e^{3/2}}\right)$. *Máximo (1, e)*

14.- Halla los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^5+1$
Solución: $x = 0$.

15.- Es posible que un polinomio de tercer grado tenga un máximo relativo en el punto x= p. Ese máximo relativo ¿puede ser máximo absoluto de la función?
Solución: Sí, pero no puede ser absoluto ya que tiene ramas parabólicas.

16.- Halla a y b para que $f(x) = x^3+ax^2+bx$ tenga máximo en $x =-1$ y punto de inflexión en $x =0$.
Solución: $a = 0$, $b = -3$.

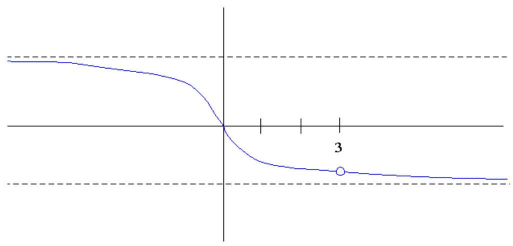
17.- Estudia la concavidad y convexidad de $f(x) = x^2 -1$.
Solución: Es cóncava en todo $\mathbb{R}$.

18.- Halla los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3+3x^2+3x+1$
Solución: $x = -1$

19.- Halla a, b, c y d en la función $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ para que pase por el punto P(-1,1) y tenga punto de inflexión con tangente horizontal en Q(0,-2)
Solución: $a = -3$, $b = 0$, $c = 0$, $d = -2$.

20.- Dada la gráfica de la función y = f(x), indica razonadamente cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales falsas.

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$
b) $f(0) = 0$
c) $f'(0) = 0$
d) La función no tiene límite cuando $x \rightarrow 3$.



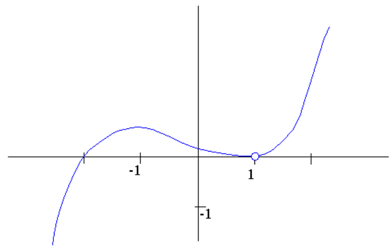
21.- Dada la gráfica de la función y = f(x), contesta razonadamente justificando tu respuesta:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

c) f ''(0),

d) f '(-1)



22.- La gráfica de una función **f** viene dada por la de la figura. Calcula:

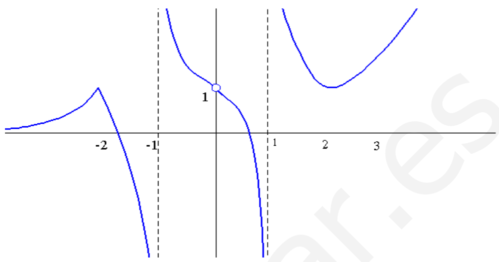
a) El dominio de f

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) Dominio de continuidad de f

d) ¿Dónde es **f** derivable?

e) f '(2)



23.- Dada la gráfica de la función. Contesta:

a) la función f es continua en x=-1.

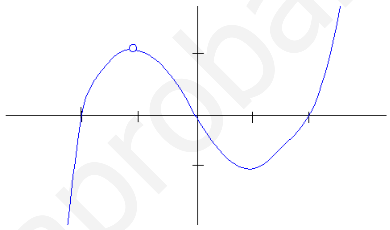
b) la función f tiene límite en -1 y vale 3.

c) f '(1) =-1,

d) f(0) = 0,

e) f ''(0) = 0

f) no existe el límite de f en +∞



24.- Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino, y se sabe que la valla del camino vale 800 pta/m y la de los otros tres lados 100 pta/m. Halla el área del campo de mayor superficie que puede cercarse con 228.000 ptas.

Solución: $x = 570m,\ y = \dfrac{380}{3}$ *m (es la paralela al camino),* $S = 72.200m^2$

25.- Se desea construir una caja rectangular cerrada, con base cuadrada, de 27 dm^3 de volumen y altura no superior a 2dm. Obtén las dimensiones para que la superficie de la caja sea mínima.

Solución: altura de 2 dm, base de $\sqrt{\dfrac{27}{2}}$ *dm*

26.- Halla las dimensiones de un depósito abierto prisma recto de base cuadrada, de 500 m^3 de capacidad, que tenga un revestimiento de coste mínimo (de superficie lateral mínima).

Solución: $l = 10,\ h = 5$

27.- Se quiere construir un envase cerrado en forma de cilindro cuya área total (incluyendo las tapas) sea 900 cm^2 ¿Cuáles deben ser el radio de la base y la altura para el que el volumen del envase sea lo más grande posible? ¿Cuánto vale ese volumen?

Solución: $r = \sqrt{\dfrac{150}{\pi}}$ *cm,* $h = 2\sqrt{\dfrac{150}{\pi}}$ *cm,* $V = 300.\sqrt{\dfrac{150}{\pi}}\ cm^2$

28.- Halla los lados del rectángulo de máximo perímetro, inscrito en una semicircunferencia de radio 10 unidades, que tiene la base apoyada sobre el diámetro de la semicircunferencia.

Solución: $x = 4\sqrt{5}$, $y = 2\sqrt{5}$

29.- La curva $y=\sqrt{1+t^2-t}$ representa un río y en el punto P = (2,0) hay una ciudad desde la que se desea construir una tubería rectilínea hasta el río. ¿En qué punto Q del río debe terminar la tubería para que esta sea lo más corta posible?

Solución: $Q = \left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{21}}{4}\right)$

30.- Prueba que la ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ admite una única solución en el intervalo (1, 2).

31.- Demuestra que la ecuación $2x^5 + x + k = 0$, k cualquiera, admite una solución real única.

32.- Prueba que las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^{-x}$, definidas para x>0, se cortan en un sólo punto. Calcula el punto de corte de las gráficas con una aproximación de centésimas.
Solución: $x \in (0{,}76; 0{,}77)$

33.- Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5 + (x - 1)^4(x + 2)^3$.
a) Demuestra que la ecuación f '(x) = 0 tiene al menos una solución en el intervalo (-2,1).
b) Demuestra que la ecuación f (x)= 0 sólo tiene una solución menor que -2.
c) Demuestra que la ecuación f (x) = 0 no tiene ninguna solución mayor que 1.

34.- Estudia si cada una de las funciones siguientes cumplen el teorema del valor medio:
a) $y = \sqrt{x}$ en [0,9], b) $y = x^2 - 5x + 1$ en [-2,4], c) y = x-3.sen(x) en $[0,\pi]$
Solución: Sí, en los tres casos.

35.- Calcula a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + bx & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en [-3,2]. ¿Dónde cumple la tesis?.
Solución: a=0, b=2, c=-1 y 1

36.- Una cierta función f es derivable en el intervalo [1,6] y que los valores mínimo y máximo de su derivada en el intervalo son, respectivamente, 3 y 8. Razona si puede ser cierta:
a) f (1) = 2 y f (6) = 11, b) f (1) = 10 y f (6) = 30.
Solución: a) posible, b) imposible.

37.- Halla el valor de *c* donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy, siendo $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 - 4x + 6$ en el intervalo [0, 1]
Solución: $c = 0{,}5$

38.- Comprueba si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^3 - 1$ en el intervalo [1, 2]. En caso de cumplirse hallar el punto c.
Solución: Se cumplen las hipótesis del teorema, $c = \frac{14}{9} \in (1, 2)$

39.- Calcula: a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\right)$, b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + x^2}{3x^2 + x - 1}$, c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 . Lx$, d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$

Solución: a) 0, b) $\frac{1}{3}$*, c) 0, d)* $\frac{1}{3}$.

40.- Calcula: a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{Lx}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$, c) $\lim\limits_{x \to 0} x^{2 \operatorname{sen} x}$, d) $\lim\limits_{x \to \pi} \left[(\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right]$
Solución: a) 0, b) e^{-6}*, c) 1, d) 2.*

41.- Calcula: a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arctg} 3x}$, c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{3x^2 - \operatorname{sen} x}$

Solución: a) 1, b) $\frac{2}{3}$*, c)* $\frac{1}{3}$.

42.- Calcula: a) $\lim_{x\to 0} x^2.\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, b) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{senx}}{x}$, c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\text{senx}}{x}\right)$, d) $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{2/x^2}$

Solución: a) 0, b) 1, c) e^0 = 1, d) e^{-4}.

TEMA 3

3.- GRÁFICAS

3.1.- REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

1.- Dominio de definición:

Es el conjunto de valores para los cuales f(x) es un número real.

2.- Simetrías:

- **Par** si f(-x) = f(x), , la función es simétrica respecto del eje Y.
- **Impar** si f(-x) = -f(x), , la función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

3.- Periodicidad:

Es periódica si f(x + T) = f(x). El menor valor T para el que esto ocurre se llama período.

4.- Cortes con los ejes:

- El corte con el eje OY se obtiene haciendo x = 0.
- Los cortes con el eje OX se obtienen resolviendo la ecuación f(x) = 0.

5.- Asíntotas:

- **Verticales**: Son las rectas de ecuación x = a, que verifican $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.
- **Horizontales**: Son las rectas de ecuación y = b, que verifican $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.
- **Oblicuas**: Son rectas de ecuación y = mx + n, con m = $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y n = $\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$

6.- Regiones de crecimiento y de decrecimiento. Extremos locales

- **Regiones de crecimiento:** Las obtenemos atendiendo al signo de la 1ª derivada.
  - Crecimiento: f '(x) > 0
  - Decrecimiento: f '(x) < 0
- **Extremos locales:** Igualamos la 1ª derivada a cero y atendiendo al signo de la 2ª derivada:
  - Mínimo: f '(x) = 0 y f ''(x) > 0
  - Máximo: f '(x) = 0 y f ''(x) < 0

7.- Regiones de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

- **Concavidad y convexidad:** Atendemos al signo de la 2ª derivada.
  - Cóncava: f ''(x) > 0
  - Convexa: f ''(x) < 0
- **Puntos de inflexión:** Igualando la 2ª derivada a cero y atendiendo al valor de la 3ª derivada: f ''(x) = 0 y f '''(x) ≠ 0.

EJEMPLOS

1.- Halla el dominio de definición de f(x) = $\mathbf{\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}}$

Resolución:
La función es un cociente de funciones polinómicas y está definida para todo valor de x excepto para x = 5, que anula al denominador.

2.- Estudia la simetría de f(x) = $\mathbf{\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}}$

Resolución:

No es ni para ni impar, ya que f(-x) = $\dfrac{(-x)^2-5(-x)+4}{(-x)-5} = \dfrac{x^2+5x+4}{-x-5} \neq$ -f(x) $\neq$ f(x).

3.- Halla la periodicidad de: a) f(x) = $\mathbf{\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}}$ **, b) f(x) = sen(2x)**

Resolución:
a) No es periódica, ya que no existe un número real T > 0 tal que f(x + T) = f(x)
b) Es periódica, de periodo π, ya que
f(x+π) = sen[2(x+π)] = sen(2x)cos(2π)+cos(2x)sen(2π) = sen(2x)

4.- Halla los cortes con los ejes de f(x) = $\mathbf{\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}}$

Resolución:

- El punto donde la curva corta al eje OY pasa por x = 0, f(0) = $-\dfrac{4}{5}$: $\left(0,-\dfrac{4}{5}\right)$
- Los puntos donde la curva corta al eje OX tienen ordenada nula:
  f(x) = 0 $\Rightarrow$ x = 1, x = 4, los puntos de corte son (1,0) y (4,0).

5.- Halla las asíntotas de f(x) = $\mathbf{\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}}$

Resolución:

- Verticales: La posible asíntota es x = 5 ya que anula el denominador.
  $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x^2-5x+4}{x-5} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x^2-5x+4}{x-5} = +\infty$, La asíntota es x = 5
- Horizontales: No hay.
- Oblicuas: Son rectas de ecuación y = mx + n, con:
  m = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x} = 1$
  m = $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x} = 1$
  Tiene la misma asíntota a izquierda y derecha, siendo n:
  n = $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}-x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x-5} = 0$
  Luego la asíntota oblicua es y = x

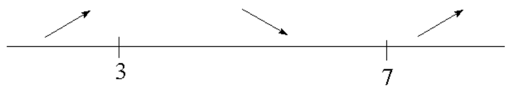
6.- Estudia el crecimiento y el decrecimiento máximos y los mínimos relativos de f(x) = $\mathbf{\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}}$

Resolución:
a) Calculamos la primera derivada y factorizamos el numerador:

$$f'(x) = \frac{x^2-10x+21}{(x-5)^2} = \frac{(x-7)(x-3)}{(x-5)^2}$$

Como el denominador es siempre positivo estudiamos el signo del numerador:

- Si x < 3, (x-7)(x-3) > 0; entonces y' > 0 y la función es creciente en (–∞, 3).
- Si x > 3 y x < 7, (x - 7) (x - 3) < 0; entonces y' < 0 y es decreciente en (3, 7).
- Si x > 7, (x - 7) (x - 3) > 0, luego y' > 0 y la función es creciente en (7, +∞).



b) Hallamos la primera derivada y factorizamos el numerador:

$$f'(x) = \frac{x^2-10x+21}{(x-5)^2} = \frac{(x-7)(x-3)}{(x-5)^2}$$

Las soluciones a f '(x) = 0 son x = 3 y x = 7.

- A la izquierda de x = 3 es creciente y a la derecha decreciente, luego en x=3 hay un máximo. Para x = 3, f(3) = 1; el máximo es M = (3,1)

- A la izquierda de x = 7 es decreciente y a la derecha creciente, luego en x=7 hay un mínimo. Para x = 7, f(7) = 9; el máximo es m = (7,9)

7.- Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de f(x) = $\mathbf{\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}}$

Resolución:
Obtenemos la segunda derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{8}{(x-5)^3} = 0$$

La anterior ecuación no tiene solución y la curva no tiene puntos de inflexión.

- La curva es cóncava en (5,+∞) ya que si x > 5, $(x - 5)^3$ es positivo y f ''(x)>0
- La curva es convexa en (-∞,5) ya que si x < 5, $(x - 5)^3$ es negativo y f ''(x)<0

8.- Estudia las regiones donde está definida f(x) = $\mathbf{\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}}$

Resolución:
Las raíces de $x^2 - 5x + 4 = 0$ son 1 y 4, luego $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$. La única raíz del denominador es 5, luego:

$$f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-5} = \frac{(x-1)(x-4)}{x-5}$$

- Si x < 1, numerador positivo y denominador negativo: y < 0 en (-∞, 1).
- Si x > 1 y x < 4, numerador y denominador negativos: y > 0 en (1, 4).
- Si x> 4 y x<5, numerador positivo y denominador negativo: y < 0 en (4, 5).
- Si x >5, numerador y denominador positivos: y > 0 en (5,+∞)

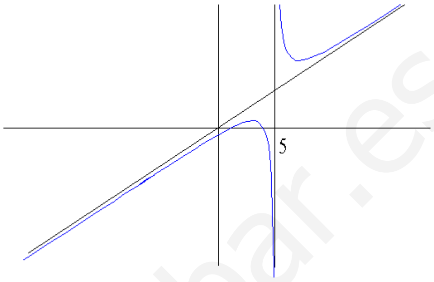
Se pueden delimitar ya las zonas por las que pasa la curva:

x	$-\infty$ ... 1	1 ... 4	4 ... 5	5 ... $+\infty$
y>0				
y<0				

9.- Dibuja la gráfica de f(x) = $\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$

Resolución:
La tabla de valores, y la gráfica:

x	$-\infty$ 1 3	4	5	∞
y	$-\infty$ 0	0		∞
y'	↑	↓	↓	↑
y''	$\cap$		$\cup$	



10.- Representa gráficamente la curva de ecuación f(x) = $\dfrac{x^2}{x^2-1}$

Resolución:

- El dominio de definición es $\mathbb{R}$ -{-1,1}, ya que es un cociente de polinomios, y el denominador se anula en $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

- Continuidad: Es continua en $\mathbb{R}$ - {-1,1}

- Simetría: par, pues f(-x) = f(x), para todo valor del dominio.

- Cortes con los ejes: Corta a ambos en el punto (0,0)

- Asíntotas:
  - Asíntotas verticales: Estudiamos en x =1, x = -1, ambas por la izquierda y la derecha y la posición respecto a las mismas:

    $$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

    $$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

  - Asíntotas horizontales: Estudiando los límites en el infinito.

    $$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{x^2-1} =1 \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{x^2-1} =1$$

    La asíntota es y = 1

  - Asíntotas oblicuas: No tiene, pues $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2}{x^3-x} =0$

- Crecimiento y decrecimiento: La 1ª derivada es $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$.

  Es positiva y por tanto <u>creciente</u> en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.
  Es negativa y por tanto <u>decreciente</u> en $(0,1)\cup(1, \infty)$

- Máximos y mínimos: Igualamos a cero la primera derivada

$-\dfrac{2x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0.$

Hay un máximo en (0,0) ya que pasa de creciente a decreciente, es un máximo relativo. No hay mínimos.

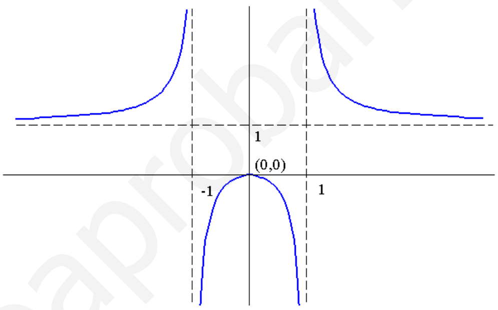
- Concavidad y convexidad: La 2ª derivada es $f''(x) = \dfrac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$.

  Es positiva y por tanto <u>cóncava</u> en $(-\infty, -1)\cup(1, \infty)$.
  Es negativa y por tanto <u>convexa</u> en (-1,1)

- Punto de inflexión. Anulamos la 2ª derivada.
  $\dfrac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} = 0.$
  No tiene, ya que la ecuación anterior no tiene solución real.

- Tabla de valores:

X	-∞	-1	0	1	+∞
y	1 +∞		-∞ 0 -∞		+∞ 1
y'	↑		↑ ↓		↓
y''	∪		∩		∪



- Gráfica: Es la de la figura adjunta.

11.- Representa gráficamente la curva de ecuación $f(x) = L(x^2-5x+6)$

Resolución:

- Dominio: El logaritmo está definido si $x^2-5x+6 > 0$. Factorizamos $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$, siendo el signo del producto:

	2	3	
x-2	-	+	+
x-3	-	-	+
	+	-	+

  Luego $D(f) = (-\infty,2)\cup(3, \infty)$

- Simetrías: Como el dominio no es simétrico no puede ser par.

- Periodicidad: No es periódica.

- Cortes con los ejes:
  - Eje OY: (0, ln 6)
  - Eje OX: Igualamos $L(x^2-5x+6) = 0 \Rightarrow x^2-5x+6 = 1 \Rightarrow x^2-5x+5 = 0$. Solución:
  $\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $\left(\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

- Asíntotas:
  - Verticales:
  $\lim_{x\to 2^-} L(x^2-5x+6) = -\infty \Rightarrow$ x = 2 es una asíntota por la izquierda.

$\lim\limits_{x \to 3^+} L(x^2 - 5x + 6) = -\infty \Rightarrow x = 3$ es una asíntota por la derecha.

- Horizontales: Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} L(x^2 - 5x + 6) = \infty$, no las hay.

- Oblicuas: Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{L(x^2 - 5x + 6)}{x} = 0$, no las hay.

- Regiones de crecimiento y de decrecimiento: Estudiamos el signo de la derivada factorizando los polinomios numerador y denominador:

  $f'(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$

  El signo del producto es:

	2 5/2 3			
x-2	-	+	+	+
x-3	-	-	-	+
2x-5	-	-	+	+
	-			+

  - Decrece en $(-\infty, 2)$
  - Crece en $(3, \infty)$

- Extremos locales: $f'(x)= \dfrac{2x-5}{x^2-5x+6} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$. No tiene ya que el valor no pertenece al dominio.

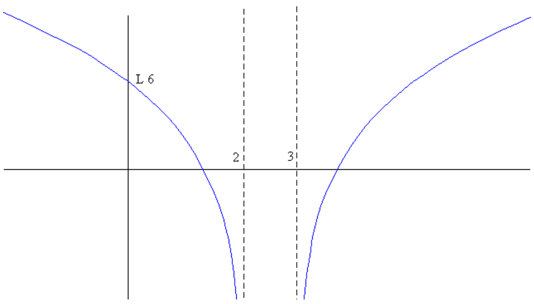
- Regiones de concavidad y convexidad

  $f''(x) = \dfrac{-2x^2+10x-13}{(x^2-5x+6)^2}$

  estudiamos el signo del numerador, ya que el denominador es positivo. Como $-2x^2+10x-13= 0$, no tiene solución real, es siempre negativa. La función f será convexa en todo su dominio, sin puntos de inflexión.

- Tabla de valores:

X	$-\infty$	2		3	$+\infty$
Y	$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$	$+\infty$
y'	$\downarrow$			$\uparrow$	
y''	$\cup$			$\cap$	



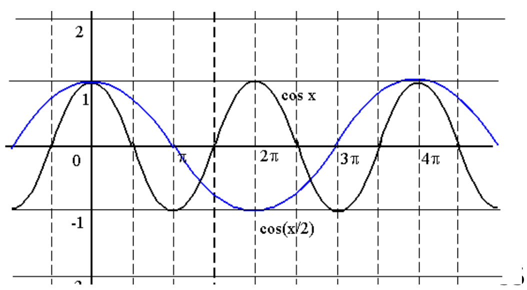
- Gráfica: Es la de la figura adjunta.

12.- Representa la función $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ con intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad y convexidad.

Resolución:

a) La representamos utilizando la gráfica de y = cos x:

- tendrá como las mismas cotas, serán -1 y 1.



- el período será el doble ya que varía 2 veces más lento que y = cosx.
- Reducimos el estudio al dominio [0,4π] (primer período).

b) La función f es derivable en todo $\mathbb{R}$, con derivada $f'(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

- f ' es positiva y por tanto creciente en el intervalo (2π, 4π).

- f ' es negativa y por lo tanto decreciente en (0,2π).

- Para hallar los extremos se anula la primera derivada:
  $f'(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0 + k\pi \Rightarrow x = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
  únicamente están en el intervalo indicado los valores x = 0, x = 2π, x = 4π.
  Como $f''(x) = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, tenemos:
  $f''(0) = -\frac{1}{4}\cos(0) = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow$ Máximo en (0, 1)
  $f''(2\pi) = -\frac{1}{4}\cos(\pi) = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$ mínimo en (2π, -1)
  $f''(4\pi) = -\frac{1}{4}\cos(2\pi) = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow$ Máximo en (4π, 1)

- De la misma manera hallamos: Cóncava (π, 3π). Convexa (0, π)∪(3π, 4π).

13.- Representa gráficamente la curva de ecuación $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Resolución:
- Dominio: (-∞, -1)∪(1, ∞)

- Simetrías: Par

- Cortes con los ejes: No corta a ninguno de los ejes.

- Asíntotas:
  - No tiene verticales ni horizontales
  - Oblicuas: y = x, y = -x

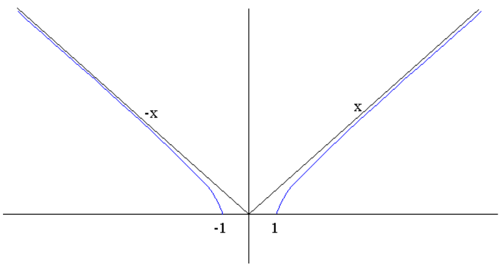
- Regiones de crecimiento y de decrecimiento. Utilizamos la 1ª derivada:
  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$
  Decrece en (-∞, -1) y crece en (1, ∞)

- Extremos locales: No tiene, pues en x = 0 la función no está definida.

- Regiones de concavidad y convexidad. Utilizamos la 2ª derivada:
  $f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$
  Convexa: (-∞,-1)∪(1,∞), no cóncava.

- Puntos de inflexión: No tiene

- Gráfica: la dada en la figura adjunta.



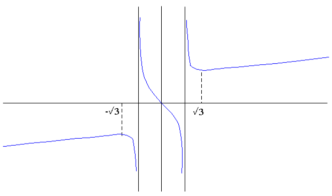
EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Determina las asíntotas de la función $g(x) = x^2e^x$.
Solución: Asíntota horizontal a la izquierda, y = 0.

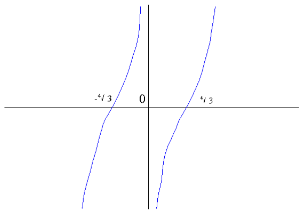
2.- Representa gráficamente la curva de ecuación

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ b) $f(x) = \dfrac{x^4-3}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4x+3}$

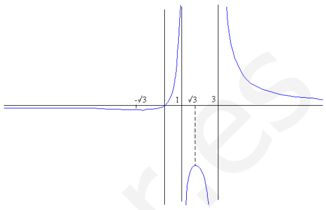
Solución:



a)



b)

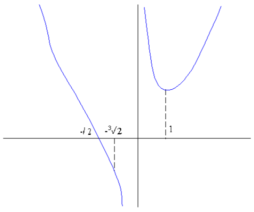


c)

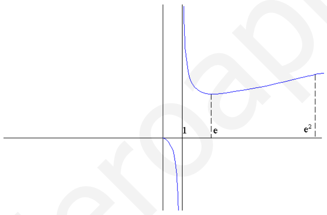
3.- Representa gráficamente la curva de ecuación

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{Lx}$ c) $f(x) = \cos x - \cos^2 x$

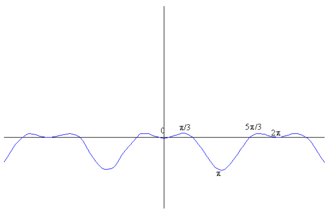
Solución:



a)



b)

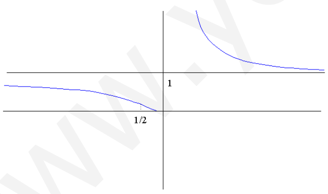


c)

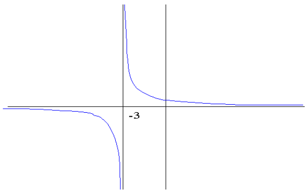
4.- Representa gráficamente la curva de ecuación

a) $f(x) = e^{1/x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

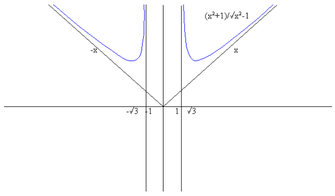
Solución:



a)



b)

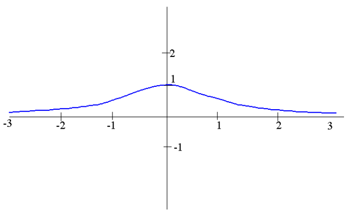


c)

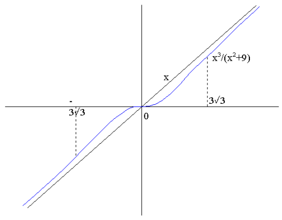
5.- Representa gráficamente la curva de ecuación

a) $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+9}$ c) $f(x) = x^2(x-2)^2$

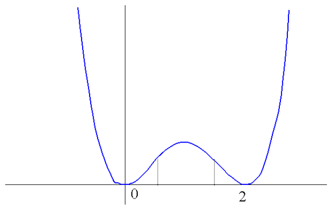
Solución:



a)



b)



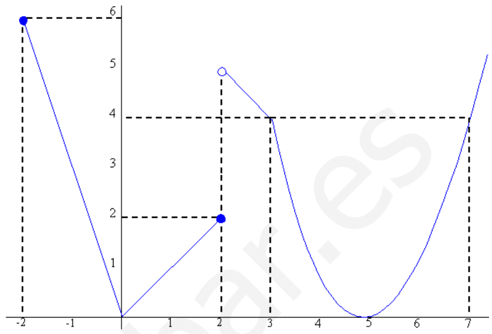
c)

3.2.- INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

En la interpretación gráfica de funciones se trata de encontrar el dominio y recorrido, las cotas, los puntos singulares de dichas funciones, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, la concavidad o convexidad, etc.

EJEMPLOS

1.- Dada la gráfica adjunta:
a) Halla dominio y recorrido de f
b) Continuidad en el intervalo [-2,7]
c) ¿Cuál es el valor de la derivada en los puntos x=0, x=1 y x=5?
d) ¿Cuál es el signo de la derivada segunda en x=5? ¿y en x=0?.
e) ¿Cuáles son los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función?.
f) ¿Está la función acotada en [-2, 7]?.
g) Da una expresión analítica de la gráfica anterior.



Resolución:
a) El dominio es [-2, ∞). El recorrido es [0, ∞).

b) Es continua en todos los puntos, salvo en x = 2, discontinuidad de salto.

c) En x=0, no <u>hay derivada</u> ya que es un punto anguloso. En x=1 como f es una recta, la derivada es la pendiente de la recta en ese punto

$m = f'(1) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{2-0}{2-0} = 1.$

En x = 5 la derivada vale 0, ya que es derivable y presenta un mínimo.

d) En x=5 la derivada segunda es positiva (la función es cóncava), en x=0 no tiene derivada segunda ya que no tiene primera derivada.

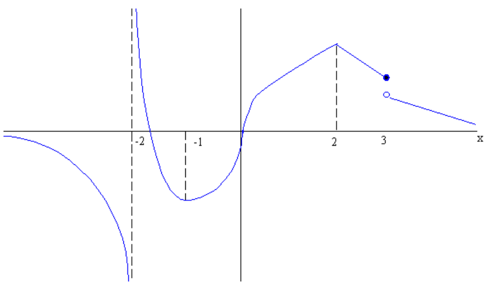
e) Hay un máximo absoluto en x = -2. Hay dos mínimos en x = 0 y en x = 5.

f) Sí está acotada, superiormente la cota es 6 e inferiormente la cota es 0.

h) En [-2, 0] es una recta, pasa por (-2,6) y (0,0), su expresión es y = -3x. En (0, 2] es una recta que pasa por (0,0) y (2,2) es decir y = x. En (2,3] es una recta que pasa por (2,5) y (3,4) es decir y =–x+7. En (3, ∞) es la parábola $y = x^2$ con vértice (5,0), $y = (x-5)^2+0 = x^2-10x+25$.

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ x & \text{si } 0 < x \le 2 \\ -x+7 & \text{si } 2 < x \le 3 \\ x^2-10x+25 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

2.- La gráfica de una función f es la de la figura:
a) ¿En qué puntos no es f continua?
b) ¿En qué puntos no es f derivable?
c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f?
d) ¿Cuáles son los máximos absolutos y relativos de f en [-3, 4]?
Resolución:



a) La función f no es continua en x = -2, discontinuidad de salto infinito. Tampoco lo es en x = 3, donde existe una discontinuidad de salto finito.

b) La función f no es derivable en x=-2 y x=3, por no ser continua y, además, en x=2 donde las derivadas laterales son distintas pues hay un punto anguloso.

c) f(x) es creciente en (-1,2) y decreciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(2,\infty)$

d) Los extremos relativos en el intervalo [-3,4] están en:

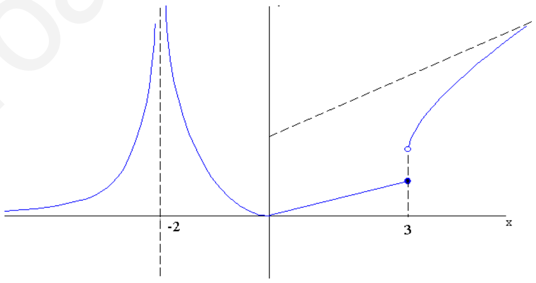
- En x_0 =-1 hay un mínimo relativo. En x_0 =4 hay un mínimo relativo ya que es un intervalo cerrado.
- En x_0 = 2 hay un máximo relativo. En x_0 =-3 hay un máximo relativo ya que es un intervalo cerrado.

Como la función no está acotada superior ni inferiormente en ese intervalo:
$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) +\infty$,
no existirán ni máximo ni mínimo absoluto en dicho intervalo

3.- De una función g se sabe que es positiva y tiene derivada positiva en el intervalo (-∞, -2); que g tiene, tanto por la derecha como por la izquierda, una asíntota vertical en x = -2; que el mínimo absoluto de g se alcanza en x = 0 y vale g(0) = 0 pero y no es derivable en dicho punto; y es creciente en [0,∞) siendo continua en dicho intervalo salvo una discontinuidad de salto en x = 3 y que cuando x → ∞ tiene una asíntota oblicua. Teniendo en cuenta los datos anteriores, esboza la gráfica de g.

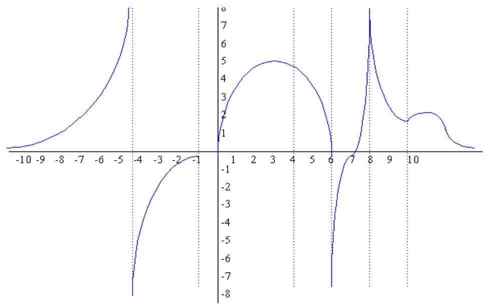
Resolución:
Las funciones que cumplan dichas condiciones pueden ser múltiples, ya que las condiciones no son unívocas.

A titulo de ejemplo adjuntamos la de la figura:



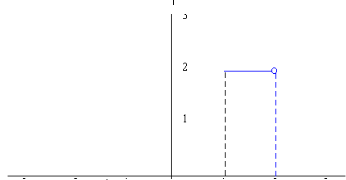
EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Una función f tiene la gráfica de la figura adjunta. Utilizando dicha gráfica contesta:



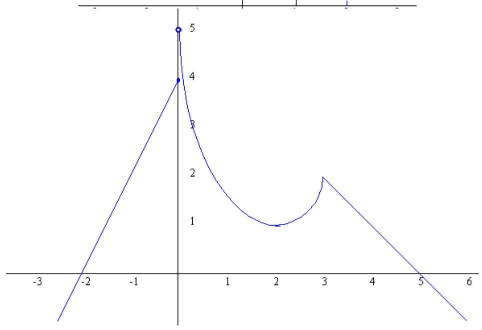
a) ¿Cuál es su dominio?.
b) ¿Dónde es continua y dónde discontinua?.
c) ¿Dónde es derivable y dónde no derivable?,
d) ¿Es posible hallar la tangente en x=4, x= 8 y x =-0,5?.

2.- La figura adjunta representa la gráfica de la función y =f(x) en el intervalo (0,2).



Dibuja la gráfica de dicha función en el intervalo [-2,2] y determinar su expresión analítica suponiendo que:
a) f es periódica de período 2.
b) f es par.
c) f es impar.

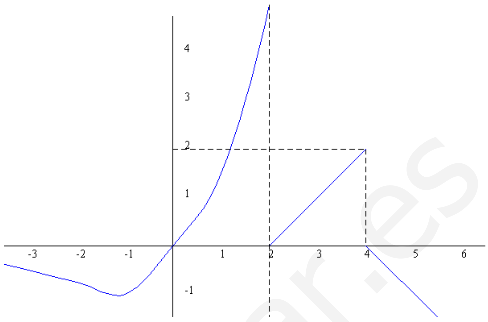
3.- Responde de manera razonada a las



siguientes preguntas:

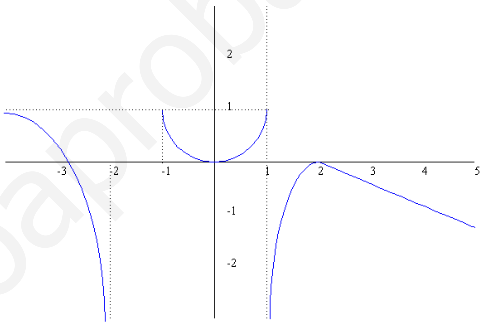
a) ¿Se trata de una función continua en [-2,5]?
b) ¿Dónde es creciente y decreciente la función?.
c) ¿Dónde se sitúan los máximos y mínimos relativos?.
d) ¿Cuál es el valor de la derivada en x=-1?.
e) ¿Cuál es el valor de la derivada en x=2?.

4.- Observando la gráfica determina razonadamente:



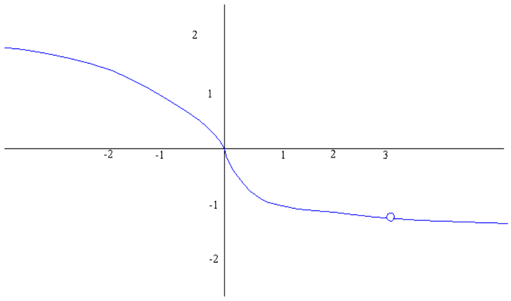
a) Tipo de discontinuidad en x = 2.
b) Tipo de discontinuidad en x = 4.
c) ¿Existe a tal que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$?
d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Máximos y mínimos relativos.

5.- Dada la gráfica de la función siguiente responde razonadamente a las siguientes preguntas:



a) Dominio y recorrido de la función.
b) ¿Es inyectiva?. ¿Es suprayectiva?. ¿Por qué?.
c) ¿Está acotada?.
d) ¿Tiene máximos o mínimos relativos?. ¿Cuáles?.

6. Dada la gráfica de la función y = f(x), indica razonablemente cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales falsas:



a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$
b) f(0) = 0,
c) f`(0) = 0,
d) f"(0) = 0,
e) $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$,
f) $\lim_{x\to \infty} f(x) = -2$
g) La función no tiene límite en 3
h) La función no es continua en 3

7.- De una función f se sabe que:
a) Es negativa y tiene derivada positiva en el intervalo (-∞, 0);
b) Tiene tanto por la derecha como por la izquierda, una asíntota vertical en x = 0
c) El mínimo absoluto de f se alcanza en x = 1 y vale f(1) = 1 siendo f derivable en dicho punto.
d) Es creciente en [0, ∞) siendo continua en dicho intervalo salvo una discontinuidad de salto en x = 3 y
e) Cuando x → ∞ tiene una asíntota horizontal.
Teniendo en cuenta los datos anteriores, esboza la gráfica de f.

3.3.- EJERCICIOS DEL TEMA

Representa gráficamente las siguientes funciones:

1.- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

2.- $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

3.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

4.- $f(x) = e^{-x^2}+2$

5.- $f(x) = x^3 -3xLx$

6.- $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+9}$

7.- $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

8.- $f(x) = \dfrac{(x-5)^3}{x-1}$

9.- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

10.- $f(x) = L(1+x)$

11.- $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2-5x}$

12.- $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

13.- $f(x) = \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{9}{4x}$

14.- $f(x) = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$

15.- $f(x) = \dfrac{x^4-3}{x}$

16.- $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+1)x}$

17.- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

18.- $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

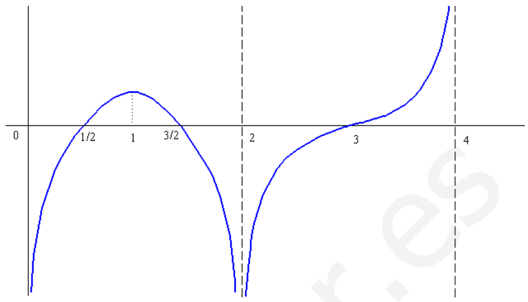
19.- $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$

20.- $f(x) = L|x+1|$

21.- $f(x) = x.e^x$

22.- $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

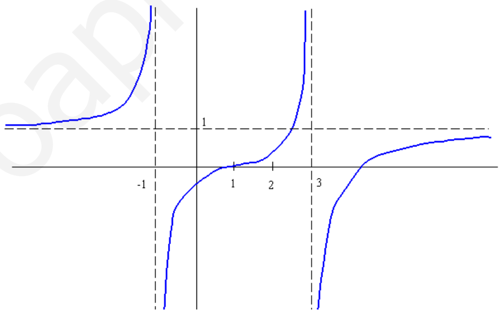
23.- La gráfica de una función f es:



a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad.
c) Halla los puntos $x \in (0, 4)$ tales que $f(x) = 0$ y determina, en *ese* intervalo, dónde se alcanzan los máximos locales.
d) Determina las asíntotas verticales y razona si existen asíntotas horizontales.

Solución:
a) crece: $(0.1) \cup (2,4)$, decrece: (1.2), b) cóncava en $(3,4)$, convexa en $(0,2) \cup (2,3)$
c) $f(x) = 0$ en $x = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{3}{2}$, $x = 3$. Máximo local en $x = 1$, d) AV: $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$. No AH.

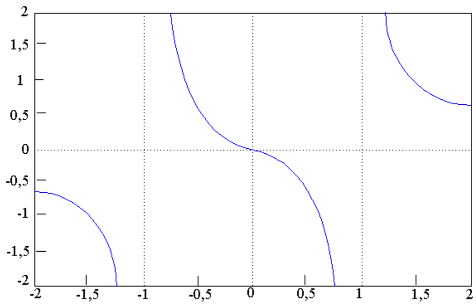
24.- Dada la función cuya gráfica es:



A la vista de ella:
a) Di donde es creciente, decreciente y si tiene algún máximo o mínimo relativo.
b) Di donde es cóncava, convexa y si tiene algún punto de inflexión.
c) Di cuales son los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
d) Escribe las ecuaciones de las asíntotas

Solución:
a) Creciente en D(f). No tiene máximo ni mínimo relativo.
b) Cóncava: $(-\infty, -1) \cup (1,3)$, Convexa: $(-1,1) \cup (3, \infty)$, Punto de inflexión en $x = 1$, de valor $I(1,0)$.
c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.
d) Asíntotas $x = -1$, $x = 3$, - $y = 1$.

25.-Fíjate en la gráfica siguiente y deduce de ella todos los datos que puedas sobre la función que representa.



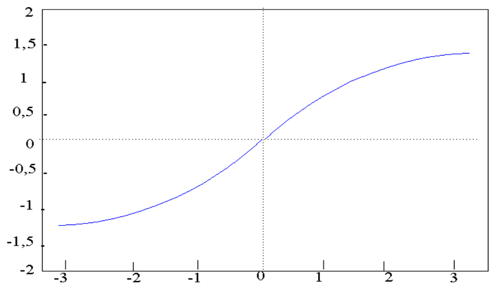
Justifica si puede corresponder a alguna de las funciones f, g o h definidas como sigue:

$f(x) = \dfrac{-x^3}{1-x^4}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$, $h(x) = \dfrac{-x}{1-x^2}$

Solución: Es h(x).

27.- Encuentra, de forma razonada:
a) Una función f cuya gráfica no sea una línea recta y dibuja la gráfica de dicha función que verifique la siguiente propiedad: "Existen infinitos puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta de ecuación y=1".
b) Haz lo mismo para la propiedad: "Existen infinitos puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta de ecuación y = x".
Solución: a) $y = sen\ x$, b) $f(x) = tg\ x$

26.- El gráfico de la función derivada de una cierta función f es la de la figura.



a) ¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación f (x) = 0?

b) Si la ecuación f (x) = 0 tiene exactamente dos soluciones distintas, ¿pueden éstas ser del mismo signo?

c) Enuncia alguno de los teoremas importantes que utilices en alguno de los apartados anteriores.

Solución: a) A lo sumo tendrá dos raíces reales.

b) No pueden ser de distinto signo. c) Teorema de Rolle.

28.- Esboza la gráfica de una función f(x) que cumpla las siguientes condiciones: a) en x = -3 tiene una discontinuidad evitable, en x=-1 tiene una discontinuidad de salto (con límites laterales finitos distintos), en x= 1 tiene una discontinuidad asintótica, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$.

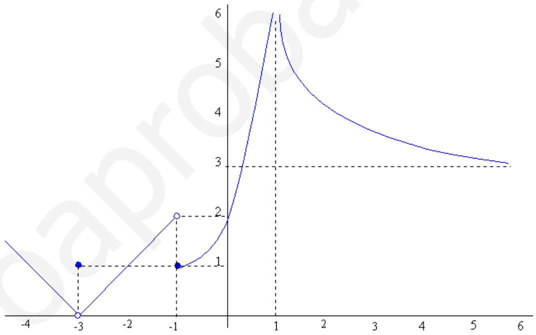
b) Obtén la expresión analítica de una de esas funciones, razonando las respuestas.

Solución:

a) Un posible esbozo puede ser el de la figura adjunta.

b) La expresión analítica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } -\infty < x < -3 \\ 1 & \text{si } x = -3 \\ x+3 & \text{si } -3 < x < -1 \\ -\dfrac{2}{x-1} & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{3x}{x-1} & \text{si } 1 < x < \infty \end{cases}$$



29.- Sea f ' la función derivada de una función derivable f: ℝ→ℝ.
Se sabe que f' es continua y que

1) f '(0) = 0, f '(2) = 1, f '(3) = 0, f '(4) = -1, f '(5)=0;

2) f ' es estrictamente creciente en los intervalos (-∞,2) y (4,+∞);

3) f ' es estrictamente decreciente en el intervalo (2, 4);

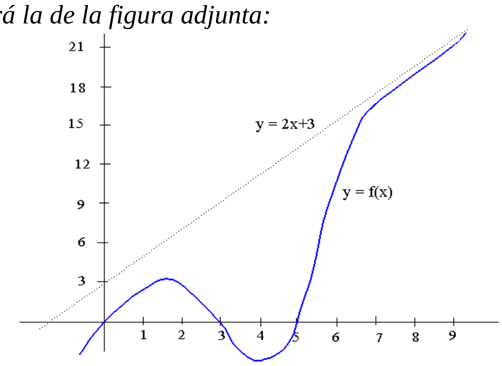
4) la recta de ecuación y=2x+3 es una asíntota oblicua de f ' cuando x→+∞

a) Esboza la gráfica de f'.

b) ¿En qué valores de x alcanza f sus máximos y mínimos relativos?.

Solución:

a) La gráfica de f ' será la de la figura adjunta:



b) Alcanza un mínimo relativo en (0,0) y (5,0). Alcanza un máximo relativo en (3,0) .

TEMA 4

4.- INTEGRALES INDEFINIDAS

4.1.- PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

1.- Definiciones

La primitiva de una función f es otra F definida en su dominio tal que F'(x)=f(x) (dF(x) =f(x)dx).
La operación que permite obtener una primitiva F a partir de f recibe el nombre de integración.
La integral indefinida de una función f es el conjunto de todas las primitivas de ésta y se representa por $\int f(x)\,dx$ = F(x)+C, $C\in\mathbb{R}$

2.- Propiedades lineales de la integración:

- Integral de una suma: $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- Integral del producto por un número real: $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$
- Método de descomposición: $\int [\lambda f(x)+\mu f(x)]dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int f(x)dx$

EJEMPLOS

1.- Encuentra dos primitivas de la función f(x) = 4x^3-5.

Resolución:
Las primitivas son, por ejemplo, F(x) = x^4-5x+1 y G(x) = x^4-5x+2 ya que su derivada cumple F'(x) = G'(x) = 4x^3-5

2.- Encuentra la primitiva de la función f(x) = 4x^3-5 que vale 0 para x=1.

Resolución:
Las primitivas son de la forma F(x) = x^4-5x+K. Obligamos a que F(1) = 0
F(1) = 1^4-5.1+K = -4+K = 0 $\Rightarrow$ K =4
queda F(x) = x^4-5x+4

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Encuentra dos primitivas de la función f(x) = 5x^4-6x.
Solución: $F_1(x) = x^5-3x^2$, $F_2(x) = x^5-3x^2+1$

2.- Encuentra la primitiva de la función f(x) = 4x^3-5, que vale 10 para x=2.
Solución: F(x) = x^4-5x+4

3.- Encuentra la función F para que F'(x) = 2x-1 y F(5) = 6
Solución: F(x) = x^2-x-14

4.- Encuentra la función F para que F"(x) = 2x+1 y F(0) = 1, F(1) = 0.

Solución: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{6}x + 1$

4.2.- INTEGRALES INMEDIATAS

1.- Cuadro de integrales

Tipo	Primitiva simple	Primitiva de función
Constante	$\int K dx = Kx + C$	
Potencial	$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int [f(x)]^{\alpha} . f'(x) dx = \dfrac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
Exponencial	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{La} + C$
Logaritmo	$\int \dfrac{1}{x} dx = L\|x\| + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = L\|f(x)\| + C$
Seno	$\int \cos x \, dx = \text{sen } x + C$	$\int \cos f(x) . f'(x) dx = \text{sen}[f(x)] + C$
Coseno	$\int \text{sen} x \, dx = - \cos x + C$	$\int \text{sen} f(x) . f'(x) dx = - \cos[f(x)] + C$
Tangente	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$	$\int \sec^2 f(x) . f'(x) dx = \text{tg}[f(x)] + C$
Cotangente	$\int \dfrac{dx}{\text{sen}^2 x} = - \text{ctg } x + C$	$\int \dfrac{f'(x) dx}{\text{sen}^2 f(x)} = - \text{tg}[f(x)] + C$
Arco seno	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x + C$	$\int \dfrac{f'(x) dx}{\sqrt{1-f(x)^2}} = \text{arc sen}[f(x)] + C$
Arco tangente	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + C$	$\int \dfrac{f'(x) dx}{1+[f(x)]^2} = \text{arc tg}[f(x)] + C$

EJEMPLOS

Calcula la integrales inmediatas siguientes:

1.- $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x} dx$

Resolución: I = $\int \dfrac{d(x^2+x)}{x^2+x} = L|x^2+x| + C$

2.- $\int \dfrac{\cos(Lx)}{x} dx$

Resolución: I = $\int \cos(Lx) d(Lx)$ = sen (Lx)+ C

3.- $\int \text{sen} 3x \, dx$

Resolución: I = $-\dfrac{1}{3}$ cos 3x+ C

4.- $\int \text{tg}^2 x \, dx$

Resolución: I = $\int (1+\text{tg}^2 x - 1) dx$ = tg x -x + C

5.- $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

Resolución: I = $\int \frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}}$ = arc sen(2 x) + C

6.- $\int \frac{4x\,dx}{1+4x^4}$

Resolución: I = $\int \frac{d(2x^2)}{1+(2x^2)^2}$ = arc tg($2x^2$) + C

7.- $\int (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)dx$

Resolución: I = $\int x^3 dx - 2\int x^2 dx + 3\int x dx - \int dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C$

8.- $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

Resolución: Multiplicamos por $\sqrt{1+x}$ y descomponemos en integrales simples:

I= $\int \frac{\sqrt{1+x}.\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arcsenx} - \sqrt{1-x^2} + C$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- $\int \left(\frac{1}{x^2} - x + \frac{2}{\sqrt{x}} + 3 \right) dx$

Solución: $-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} + 4\sqrt{x} + 3x + C$

2.- $\int (x^2 + 4x)(x^2 - 1)dx$

Solución: $\frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + C$

4.- $\int (3-2x)^5 dx$

Solución: $-\frac{(3-2x)^6}{12} + C$

5.- $\int \sqrt{4x+2}\,dx$

Solución: $\frac{1}{6}\sqrt{(4x+2)^3} + C$

6.- $\int \frac{1+\text{senx}}{1-\text{senx}}dx$

Solución: I = $2\,\text{tgx} + \frac{2}{\cos x} - x + C$

4.3.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

1.- Método

Las funciones racionales son de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Se deben seguir los siguientes pasos:

1. Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador se efectúa la división de ambos y se expresa el cociente como $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, grado[R(x)] < grado [Q(x)].
2. Se descompone Q(x) en factores, éstos pueden tener:
   - Raíces reales simples, dan lugar a sumandos: $\int \dfrac{A_1}{x-a_1}dx + ... + \int \dfrac{A_n}{x-a_n}dx$
   - Raíces reales múltiples, dan lugar a sumandos: $\int \dfrac{A_1}{x-a}dx + \int \dfrac{A_2}{(x-a)^2}dx + ... + \int \dfrac{A_n}{(x-a)^n}dx$
   - Raíces complejas conjugadas, dan lugar a sumandos: $\int \dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$
3. Se descompone la función en fracciones simple irreducibles
4. Se integran los sumandos obtenidos.

EJEMPLOS

1.- Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{x^2-3x+2}}\mathbf{dx}$

Resolución:

Como grado [P(x)]<grado[Q(x)] expresamos el integrando como $\dfrac{D}{d} = c + \dfrac{r}{d}$

$$I= \int\left[x+3+\frac{7x-6}{x^2-3x+2}\right]dx = \int(x+3)dx + \int\frac{7x-6}{x^2-3x+2}dx = \frac{x^2}{2}+3x+\int\frac{7x-6}{x^2-3x+2}dx$$

La primera integral es inmediata y la segunda tiene raíces reales simples.

$$\frac{7x-6}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} \Rightarrow 7x-6 = A(x-1)+B(x-2)$$

Para obtener A y B damos valor a la incógnita:

$$\left.\begin{array}{l} x=1;\ -B=1 \\ x=2;\ A=8 \end{array}\right\} \text{ con soluciones } A = 8,\ B = -1$$

$$I_1 = \int\frac{7x-6}{x^2-3x+2}dx = \int\left(\frac{8}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx = 8L|x-2|-L|x-1| = L\left|\frac{(x-2)^8}{x-1}\right|$$

$$I = \frac{x^2}{2}+3x+L\left|\frac{(x-2)^8}{x-1}\right|+C = \frac{x^2}{2}+3x+L\frac{(x-2)^8}{|x-1|}+C$$

2.- Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{\mathbf{3x-5}}{\mathbf{x^3-x^2-x+1}}\mathbf{dx}$

Resolución:

Tenemos una raíz simple y una doble. Descomponemos:

$$\frac{3x-5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1} \Rightarrow 3x-5 = A(x^2-1)+B(x+1)+C(x-1)^2$$

Sustituyendo en la ecuación las raíces del polinomio denominador y el valor 0:
x = 1 $\Rightarrow$-2 = 2B $\Rightarrow$B = -1
x =-1 $\Rightarrow$-8 = 4C $\Rightarrow$ C = -2
x = 0 $\Rightarrow$-5 = -A+B+C $\Rightarrow$ A =2

$$I=2\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}-2\int\frac{dx}{x+1}=2L|x-1|+\frac{1}{x-1}-2L|x+1|+C=L\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{x-1}+C$$

3.- Calcula la integral $\displaystyle\int\frac{4x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$

Resolución:
Obtenemos una raíz simple y dos raíces complejas conjugadas.

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\ \Rightarrow 4x^2+x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

Para hallar los valores de A, B y C damos valores a x:

$$\left.\begin{array}{ll} x=0; & A-C=1\\ x=1; & 2A=6\\ x=-1; & 2A+2B-2C=4\end{array}\right\}\text{ con soluciones A = 3, B = 1, C = 2.}$$

$$I=\int\frac{3}{x-1}dx+\int\frac{x+2}{x^2+1}dx = 3L|x-1|+\int\frac{x+2}{x^2+1}dx$$

$$I= 3L|x-1|+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+2\int\frac{dx}{x^2+1} = 3\,Ln\,|\,x-1\,|+\frac{1}{2}Ln(x^2+1)+2\,arctg\,x+C$$

4.- Calcula $\displaystyle\int\frac{3x-12}{x^3-3x^2+12x-10}dx$

Resolución:
Queda una raíz real simple y dos complejas conjugadas. Descomponemos:

$$\frac{3x-12}{x^3-3x^2+12x-10}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+10}\ \Rightarrow 3x-12=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x-C+10A$$

Al igualar los coeficientes de ambos polinomios obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} A+B\ \ =0\\ -2A-B+C=3\\ 10A\ -C=-12\end{array}\right.\text{ con soluciones A = -1 B = 1 C = 2}$$

$$I=-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{x+2}{x^2-2x+10}dx = -L(x-1)+I_1$$

$$I_1=\int\frac{x+2}{x^2-2x+10}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2-2x+10}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)+6}{x^2-2x+10}dx=$$

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx+3\int\frac{dx}{x^2-2x+10}=\frac{1}{2}L|x^2-2x+10|+3\int\frac{dx}{(x-1)^2+9}=$$

$$=\frac{1}{2}L|x^2-2x+10|+\frac{3}{9}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1}=\frac{1}{2}L|x^2-2x+10|+arc\,tg\left(\frac{x-1}{3}\right)$$

$$I=-L(x-1)+\frac{1}{2}L|x^2-2x+10|+arc\,tg\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- $\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Solución: $-\frac{1}{4}L|x+1|+\frac{1}{4}L|x-1|-\frac{1}{2(x+1)}+C$

2.- $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$

Solución: $L\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{(x-1)}+C$

3.- $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$

Solución: $\frac{1}{2}L|x^2+4x+5|-\operatorname{arc\,tg}(x+2)+C$

4.- $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$

Solución: $-7L|x+3|+4L|x-1|-5L|x-4|+C=$

5.- $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

Solución: $L\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{(x+1)}+C$

6.- $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$

Solución: $-\frac{7}{16}L|2x-1|-\frac{9}{16}L|2x+1|+L|x|+\frac{x}{4}+C$

7.- $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$

Solución: $\frac{x^2}{2}-\frac{8}{x-2}-\frac{11}{(x-2)^2}+C$

8.- $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$

Solución: $\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right]-\frac{1}{6}L|x^2-x+1|+\frac{1}{3}L|x+1|+C$

9.- $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x-1)(x-3)}$

Solución: $-\frac{2}{15}L|x+2|-\frac{1}{6}L|x-1|+\frac{3}{10}L|x-3|+C$

10.- $\int \frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

Solución: $L|x-1|+L|x-2|-L|x-3|+C=L\left|\frac{x^2-3x+2}{x-3}\right|+C$

4.4.- INTEGRACIÓN POR PARTES

1.- Método

La integración por partes nos permite hallar la integral de un producto utilizando la expresión de la derivada de un producto de funciones:
$d[u(x)v(x)] = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$

integrando ambos miembros obtenemos:

$$\int u(x).dv(x) = \int d[u(x).v(x)] - \int v(x).du(x) = u(x)v(x) - \int v(x).du(x)$$

quedando la fórmula

$$\int u(x).dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x).du(x)$$

2.- Utilización

Se utiliza en los casos de integrales del tipo:

- Polinomios por exponenciales:

$$\int P(x).e^{ax+b}\,dx$$

- Polinomios por seno o coseno:

$$\int P(x).\text{sen}(ax+b)\,dx \quad \text{o} \quad \int P(x).\cos(ax+b)\,dx$$

- Exponenciales por seno o coseno:

$$\int e^{ax+b}.\text{sen}(cx+d)\,dx \quad \text{o} \quad \int e^{ax+b}.\cos(cx+d)\,dx$$

- Funciones trascendentes:

$$\int \text{arc tg}\,x\,dx\,,\ \int Lx\,dx$$

EJEMPLOS

1.- Calcula $\int x^2e^x\,dx$

Resolución:

Tomamos: $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$
$dv = e^xdx \Rightarrow v = e^x$

Queda: $I = \int x^2 e^x\,dx = x^2.e^x - 2\int x.e^x\,dx = x^2.e^x - 2\,I_1$ (1)

Como I_1 vuelve a ser integral por partes: $u = x \Rightarrow du = dx$
$dv = e^xdx \Rightarrow v = e^x$

Queda $I_1 = \int x.e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$

sustituyendo la integral será:
$I = x^2.e^x - 2\,(xe^x - e^x) + C = e^x\,(x^2 - 2x + 2) + C$

2.- Calcula $\int x^2 \cos x \, dx$

Resolución:

Tomamos: $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$

Queda: $I = \int x^2 \cos x\,dx = x^2.\operatorname{sen}x - 2\int x.\operatorname{sen} x\,dx = x^2.\operatorname{sen}x - 2 I_1$ (1)

Como I_1 vuelve a ser integral por partes:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$

Queda: $I_1 = \int x.\operatorname{sen} x\,dx = -x.\operatorname{Cos} x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x$

Sustituyendo en (1) la integral será:

$I = x^2.\operatorname{sen}x - 2(-x\cos x + \operatorname{sen} x) + C = (x^2-2).\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C$

3.- Calcula $\int e^x.\operatorname{sen}x \, dx$

Resolución:

Tomamos: $u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$

$dv = \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$

Queda: $I = \int e^x.\operatorname{sen} x\,dx = -e^x.\cos x + \int e^x.\cos x\,dx = -e^x.\cos x + I_1$

Pero I_1 vuelve a ser integral por partes:

$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$

obteniendo: $I_1 = \int e^x.\cos x\,dx = e^x.\operatorname{sen}x - \int e^x.\operatorname{sen} x\,dx$

Así pues:

$I = -e^x.\cos x + e^x.\operatorname{sen}x - I$

que despejando da lugar a:

$$I = -\frac{e^x.\cos x}{2} + \frac{e^x.\operatorname{sen}x}{2} + C = \frac{e^x.(\operatorname{sen}x-\cos x)}{2} + C$$

4.- Calcula $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

Resolución:

Es una integral por partes. Tomamos:

$u = \operatorname{arc\,tg} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$I = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} L\left|1+x^2\right| + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- $\int 2\,L(x+1)\,dx$

Solución: $2x.L|x+1| - 2x + 2\,L|x-1| + C$

2.- $\int \text{arcsen}x\,dx$

Solución: $x\ \text{arcsen}\,x + \sqrt{1-x^2} + C$

3.- $\int \frac{x}{3}\,\text{sen}x\,dx$

Solución: $\frac{1}{3}[\text{sen}x - x\cos x] + C$

4.- $\int \frac{x}{e^x}\,dx$

Solución: $-\int \frac{x+1}{e^x} + C$

5.- $\int (x^3+1).e^{3x}\,dx$

Solución: $\frac{e^{3x}}{3}\left[x^3 - x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{7}{9}\right] + C$

6.- $\int x^2.Lx\,dx$

Solución: $\frac{x^3}{3}\left[Lx - \frac{1}{3}\right] + C$

7.- $\int x.\text{arctg}x\,dx$

Solución: $\frac{1}{2}[x^2\,\text{arc}\,\text{tg}x - x + \text{arc}\,\text{tg}\,x] + C$

8.- $\int x\cos x\,dx$

Solución: x sen x +cos x +C

9.- $\int \text{arc}\cos x\,dx$

Solución: x arc cos x $-\sqrt{1-x^2}$ *+C*

10.- $\int e^{2x}\cos x\,dx$.

Solución: $\frac{e^{2x}}{5}[\text{sen}\,x + 2\cos x] + C$

11.- $\int x^2\cos(\alpha x)\,dx$.

Solución: $\frac{x^2\,\text{sen}(\alpha\,x)}{\alpha} + \frac{2x\cos(\alpha\,x)}{\alpha^2} - \frac{2\,\text{sen}(\alpha\,x)}{\alpha^3}$ *+ C*

4.5.- INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

1.-Método

Se pretende calcular una integral del tipo $\int f(x)\,dx$ en la que la función f(x) = h[g(x)].g'(x) y se supone que somos capaces de encontrar la primitiva H(t) = $\int h(t)\ dt$, en tal caso en la integral:

I = $\int f(x)\,dx = \int h[g(x)].g'(x)\ dx$

- efectuamos el cambio de variable t = g(x), dt = g'(x)dx
- obtenemos la integral I = $\int h(t)\,dt\ = H[g(x)]$
- deshacemos el cambio de variable efectuado.

EJEMPLOS

1.- Calcula $\displaystyle\int \frac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{1+e^{2x}}}\mathbf{dx}$

Resolución:

Efectuamos el cambio de variable: e^x = t 0 $\Rightarrow$ e^x dx = dt

I = $\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2}$ = arc tg t + C = arc tg(e^x)+ C

2.- Calcula $\displaystyle\int \mathbf{x(2x^2 - 7)^{99}dx}$

Resolución:

Efectuamos el cambio de variable: $2x^2 - 7 = t \Rightarrow 4xdx = dt$

I = $\displaystyle\int t^{99}\frac{dt}{4} = \frac{t^{100}}{400} + C = \frac{1}{400}(2x^2-7)^{100} + C$

3.- Calcula $\displaystyle\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{9-4x^2}}}\mathbf{dx}$

Resolución:

Efectuamos el cambio de variable: $\dfrac{2}{3}x$ = sen t $\Rightarrow$ dx = $\dfrac{3}{2}\cos t\,dt$

I = $\displaystyle\frac{1}{3}\int \frac{3}{2}\frac{\cos t\,dt}{\cos t} = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\mathrm{arcsen}\left(\frac{2x}{3}\right) + C$

4.- Calcula $\displaystyle\int \mathbf{x\sqrt[3]{x+1}dx}$

Resolución:

Efectuamos el cambio de variable: $x + 1 = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2\,dt$

I= $\displaystyle\int (t^3-1)t3t^2\ dt = 3\int (t^6-t^3)\,dt = 3\frac{t^7}{7} - 3\frac{t^4}{4} + C = \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C$

5.- Calcula $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{4+9x^2}}$

Resolución:

Multiplicamos numerador y denominador por $\frac{1}{4}$ y queda: I = $\int \frac{\frac{dx}{4}}{1+\frac{9}{4}x^2}$

Efectuamos el cambio de variable: $\frac{3x}{2}$ = t $\Rightarrow$ $\frac{3}{2}dx$ = dt

I = $\int \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3x}{2}\right)+C$

6.- Calcula $\int \mathbf{cos^3 3x\ dx}$

Resolución:
Utilizamos las fórmulas trigonométricas de transformación en seno:
I = $\int \cos^2 3x . \cos 3x\ dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 3x).\cos 3x\ dx$

Efectuamos el cambio: sen3x = t $\Rightarrow$ 3cos3xdx = dt
I = $\int (1-t^2)\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)$+C = $\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x-\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x$ + C

7.- Calcula $\int \frac{\mathbf{senx}}{\mathbf{cos^2 x}}\mathbf{dx}$

Resolución:

Efectuamos el cambio: cos x = t $\Rightarrow$ -sen x dx = dt $\Rightarrow$ dx = $-\frac{dt}{\operatorname{sen} x}$

I = $\int \frac{\operatorname{sen}x}{t^2}\cdot\left(\frac{-dt}{\operatorname{sen}x}\right) = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t}$+C = $\frac{1}{\cos x}$ + C

EJERCICIOS PROPUESTOS

Efectúa las siguientes integrales por el método de sustitución con los cambios indicados.

1.- $\int \frac{\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$ (Cambio $\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$ =t)

Solución: $\frac{1}{2}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2+C$

2.- $\int \frac{dx}{4+x^2}$

Solución: $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

3.- $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

Solución: $\frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$

4.- $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{3x}-e^{x}}dx$ (cambio $e^x = t$, luego una integral racional)

Solución: $e^{-x} + L\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$

5.- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

Solución: $\frac{1}{5}$ *arc sen(5x)+ C*

6.- $\int e^{\cos x}.\operatorname{sen}x\,dx$ (cambio cos x = t)

Solución: $-e^{\cos x} + C$

7.- $\int xe^{\sqrt{x}}dx$ (cambio $x^2 = t$ y luego por partes)

Solución: $e^{\sqrt{x}}\left[2\sqrt{x^3}-6x+12\sqrt{x}-12\right]+C$

8.- $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+4}dx$ (Cambio $e^{2x} = t$)

Solución: $\frac{1}{4}\operatorname{arc tg}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)+C$

9.- $\int \frac{Lx\,dx}{x}$ (Cambio Lx = t)

Solución: $\frac{(Lx)^2}{2}+C$

10.- $\int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$ (Cambio x = sen t)

Solución: $\frac{1}{\cos t}+C=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$

11.- $\int \cos^5 x\, dx$ (Cambio x = sen t)

Solución: $\operatorname{sen}x-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5x + C$

12.- Calcula $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}dx$ (Cambio x = sen t)

Solución: $-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$

4.6.- EJERCICIOS DEL TEMA

1.- Calcula el conjunto de primitivas de la función $f(x) = x^2e^{\alpha x}$ siendo α un número racional:

Solución: $e^{\alpha x}\left(\frac{x^2}{\alpha}-\frac{2x}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^3}\right)+C$

2.- Encuentra la función primitiva de $f(x) = \frac{x+4}{x^2+3x+2}$ que valga 2 en x=0.

Solución: $3\,L|x+1| - 2\,L|x+2| + 2\,L2 + 2$

3.- Halla una primitiva de $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ que se anule en x=1.

Solución: F(x) = $\sqrt{1-x^2}$

4.- Sea f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por f (x) = 3x +6. ¿Tiene f alguna función primitiva que tome el valor 1 cuando x = 2? Justifica la respuesta.

Solución: $\frac{3}{2}x^2+6x+C$, *Sí para C=-17*

5.- Halla una función que cumpla f'''(x) = cos x, f(0) = 0, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, f($\pi$)= -1

Solución: $-\text{sen}\,x-\frac{3x}{4\pi}+\frac{6x^2}{\pi^2}$

6.- Encuentra una función que cumpla f'''(x) = x+1, f(0) = 0, f'(0) = 5, f''(0)=1.

Solución: $5x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$

Cálculo de integrales inmediatas:

7.- $\int x^2(x^3+1)^4dx$

Solución: $\frac{(x^3+1)^5}{15}+C$

8.- $\int (x+1)(x^2+2x+5)^6dx$

Solución: $\frac{(x^2+2x+5)^7}{14}+C$

9.- $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^7}dx$

Solución: $-\frac{1}{18(x^3+1)^6}+C$

10.- $\int \frac{x^2+2}{x+1}dx$

Solución: $I = \frac{x^2}{2}-x+3L|x+1|+C$

11.- $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$

Solución: $-2\mathrm{ctg}x+\dfrac{2}{\mathrm{sen}x}-x+C$

Cálculo de funciones racionales

12.- $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-4x+3}\,dx$

Solución: $\dfrac{7}{2}L|x-3|-\dfrac{3}{2}L|x-1|+C$

13.- $\displaystyle\int \frac{x^2-5}{x^3-3x^2+2x}\,dx$

Solución: $-\dfrac{5}{2}L|x|-\dfrac{1}{2}L|x-2|+4L|x-1|+C$

14.- $\displaystyle\int \frac{3x-12}{x^3-3x^2+12x-10}\,dx$

Solución: $-L|x-1|+\dfrac{1}{2}L|x^2-2x+10|+\mathrm{arc\,tg}\left(\dfrac{x-1}{3}\right)+C$

15.- $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^3-x}\,dx$

Solución: $x+\dfrac{3}{2}L|x-1|-L|x|-\dfrac{1}{2}L|x+1|+C$

16.- $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx$

Solución: $L|x^2+2x+5|+\dfrac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+C$

17.- $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx$

Solución: $L\left|\dfrac{(x-2)^5}{(x-1)^3}\right|+C$

18.- $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+2x}$

Solución: $\dfrac{1}{2}L|x|-\dfrac{1}{4}L|x^2-2x+2|+\dfrac{3}{2}\mathrm{arc\,tg}(x-1)+C$

19.- $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^3-2x^2+x}\,dx$.

Solución: $-5L|x|+5L|x-1|+\dfrac{4}{x-1}+C$

20.- $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

Solución: $\dfrac{1}{2}L|1+x|-\dfrac{1}{2}L|1-x|+C$

21.- $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

Solución: $-\frac{1}{2}L\,|\,x-1|+\frac{1}{2}L\,|\,x+1|-\frac{4}{x-1}+C$

Cálculo de integrales por sustitución:

22.- $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ (Cambio $e^x = t$)

Solución: $e^x - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,(e^x)+C$

23.- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$ (Cambio $e^x = t$)

Solución: $L\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+C = x-L(1+e^x)+C$

24.- $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (Cambio $x^2 = t$)

Solución: $\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,(x^2)+C$

25.- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+4x^2}$ (Cambio 2x = t)

Solución: $\frac{1}{2}$ *arc tg(2x)+ C*

26.- $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\mathrm{sen}^2 x}\,dx$ (Cambio sen x = t)

Solución: arc tg (sen x) + C

27.- $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ (Cambio $4x^2 = t$)

Solución: $-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4}+C$

28.- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$ (Cambio $\frac{4}{5}x = t$)

Solución: $\frac{1}{4}\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{4x}{5}\right)+C$

29.- Calcula $\displaystyle\int \mathrm{sen}^3 x\,.\cos^2 x\,dx$ (Cambio cos x = t)

Solución: $-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+C$

30.- Calcula $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\mathrm{sen}\,x}\,dx$ (Cambio sen x = t)

Solución: $L|\mathrm{sen}\,x| - \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2}+C$

31.- $\int \frac{\text{sen}x}{\cos^4 x}\,dx$ (Cambio sen x = t)

Solución: $\frac{1}{3\cos^3 x} + C$

32.- $\int \frac{e^x - e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$ (Cambio $e^x = t$)

Solución: $\text{arc tg}(e^x) - \frac{1}{2} L\,|e^{2x}+1| + C$

Cálculo de integrales por partes:

33.- $\int e^{-2x}\,\text{sen}(2x)\,dx$

Solución: $\frac{e^{-2x}}{4}\left[-\text{sen}2x - \cos 2x\right] + C$

34.- $\int e^x . \cos 2x\,dx$

Solución: $\frac{2e^x}{5}\left[\text{sen}2x + \frac{\cos 2x}{2}\right] + C$

35.- $\int x^2 \cos x\ dx$

Solución: $(x^2-2).\text{sen}\ x + 2x\cos x + C$

36.- $\int x^2 e^{-2x}\,dx$

Solución: $-\frac{e^{-2x}}{2}\left[x^2 + x + \frac{1}{2}\right] + C$

37.- $\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\ dx$

Solución: $\frac{e^{3x}}{13}\left[3\,\text{sen}2x - 2\cos x\right] + C$

38.- $\int (x^2+5)\,e^{-2x}\ dx$

Solución: $-\frac{e^{-2x}}{2}\left[(x^2+5) + x + \frac{1}{2}\right] + C$

39.- $\int x . L\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

Solución: $\left(\frac{x^2-1}{2}\right)L\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - x + C$

40.- $\int \frac{\text{sen}(3x)}{e^x}\,dx$.

Solución: $-\frac{e^{-x}}{10}\left[\text{sen}(3x) + 3\cos(3x)\right] + C$

TEMA 5

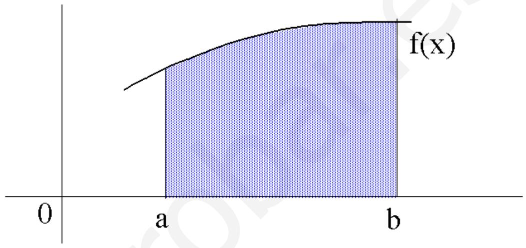
5.- INTEGRALES DEFINIDAS

5.1. CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA.

1.- Definición

Si función f es continua en [a, b] se define la integral definida de la función f en el intervalo [a, b] como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ donde x_i y x_{i-1} son los puntos consecutivos de una partición $(x_0,...,x_n)$ del intervalo (a, b) y c_i es un punto cualquiera del subintervalo (x_{i-1}, x_i).

Si la función f es positiva en [a, b], la integral representa geométricamente el área del trapecio mixtilíneo formado por el eje de abscisas, las rectas x= a, x= b y el eje de abscisas.



2.- Propiedades

a) De los límites de integración: $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

b) Aditividad con relación al intervalo: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

c) Linealidad: $\int_b^a [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_b^a f(x)dx + \mu\int_b^a g(x)dx$

d) Monotonía: Si $f(x) \le g(x)$, $\forall x\in[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

EJEMPLOS

1.- Sabiendo que una cierta función continua g cumple $\int_1^2 g(x)dx = 4$ y $\int_1^5 g(x)dx = 7$, halla $\int_2^1 g(x)dx$ y $\int_2^5 g(x)dx$

Resolución:

Por la propiedad $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$: $\int_2^1 g(x)dx = -\int_1^2 g(x)dx = -4$

Despejando la propiedad $\int_c^b g(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^c g(x)dx$ y y sustituyendo valores:

$\int_2^5 g(x)dx = \int_1^5 g(x)dx - \int_1^2 g(x)dx = 7\text{-}4 = 3$

2.- Usando las principales propiedades de la integral definida determina, sin necesidad de calcularlas, cual de las siguientes integrales tiene un valor mayor $I_1 = \int_1^{\pi/2}\frac{\cos x}{x}dx$, $I_2 = \int_1^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{x}dx$

Resolución:

En el intervalo $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ como $0 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 0 \le \cos^2 x \le \cos x \le 1$, por lo que:

$0 \le \frac{\cos^2 x}{x} \le \frac{\cos x}{x}$ si $x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

Aplicando la propiedad de monotonía de la integral definida en el intervalo:

$$\int_1^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx \le \int_1^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}\,dx$$

3.- Sea f: [-a, a] $\to \mathbb{R}$, con a > 0, una función continua tal que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

a) ¿Es necesariamente f(x) = 0 para todo $x \in [-a, a]$?

b) ¿Es necesariamente $\int_{-a}^{a} f(-x)\,dx = 0$?

Resolución:

a) No, ya que por ejemplo para la función $f(x) = x^3$ se cumple:

$$\int_{-a}^{a} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^4}{4} - \frac{(-a)^4}{4} = 0$$

b) Partimos de que f es continua en [-a, a] y que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. Efectuando el cambio de variables $t = -x \Rightarrow -t = x \Rightarrow dx = -dt$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$ y $x = a \Rightarrow t = -a$:

$$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(-t)\,dt$$

de forma análoga obtenemos:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(-t)\,dt$$

Por lo tanto, usando la aditividad de la integral respecto del intervalo:

$$0 = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-t)\,dt + \int_{-a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{-a}^{a} f(-t)\,dt$$

Luego necesariamente la integral es cero.

4.- Haciendo uso de las propiedades de la integral definida, demuestra que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

Resolución:

Efectuando el cambio de variable: $t = a+b-x \Rightarrow dt = -dx$ queda:

- si $x = a \Rightarrow t = b$
- si $x = b \Rightarrow t = a$

Sustituyendo: $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = \int_a^b f(a+b-t)dt$

5.- Halla la relación existente entre $\int_a^b |f(x)|\,dx$ y $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Resolución:

Se cumple que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ $\forall x \in [a, b]$, cuyas integrales serán aplicando la propiedad de la integral definida respecto de la monotonía:

$$\int_a^b -|f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq -\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Por la definición de valor absoluto la igualdad anterior es:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Siendo $f(x) = \begin{cases} x, \ \text{si}\ 0 \leq x < 1; \\ x-2, \ \text{si}\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$ ¿se puede calcular la integral $\int_0^2 f(x)dx$?.

Solución: Sí, I =0.

2.- Si f es una función continua en [a,b] ¿puede ser $\int_a^b f(x)dx = 0$?. Pon un ejemplo aclaratorio.

Solución: Sí, f(x) = x en [-a, a]

3.- Sabiendo que $\int_1^5 f(x)dx = 3$, $\int_1^5 g(x)dx = 3$, $\int_1^3 f(x)dx = 3$, $\int_1^3 g(x)dx = 3$, calcula:

$$\int_3^5 [f(x)+3g(x)]dx - \int_1^3 [3f(x)+g(x)]dx$$

Solución: -12

4.- Si la integral definida de una función en el intervalo [1,2] verifica $\int_1^2 f(x)dx \geq 1$

¿es cierto que para todos los puntos $x \in [1, 2]$, $f(x) \geq 0$?. Razona la respuesta

Solución: No, contraejemplo: f(x) =6x-7.

5.- Sabiendo que $\int_a^b f(x)dx = 0$, ¿se puede afirmar que a = b?. Razona la contestación.

Solución: No, por ejemplo y = cos x en [0,π]

6.- Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$ para $x \neq 2$ y $x \neq -2$. Demuestra, sin calcular la integral, que se cumple $\dfrac{1}{4} \leq \int_3^4 f(x)dx \leq \dfrac{3}{5}$

7.- Demuestra que si f es continua en $\mathbb{R}$, se verifica $\int_0^b f(x)dx = \int_0^b f(b-x)dx$

8.- El trabajo realizado por una fuerza para mover un objeto a lo largo de una trayectoria desde x = a hasta x = b viene dado por $W = \int_a^b F(x)\,dx$. Determina si la fuerza $G(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ realiza más o menos trabajo que la fuerza $F(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ para el desplazamiento entre x = 3 y x = 5.

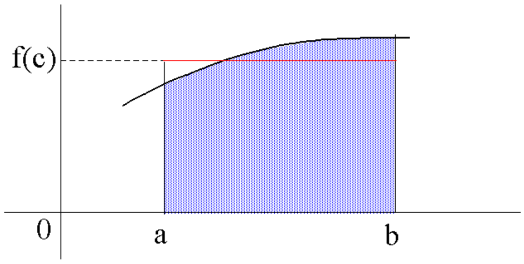
Solución: El trabajo realizado por F es mayor o igual que el realizado por G.

5.2. PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN INTEGRABLE

1.- Teorema del valor medio

Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] entonces existe un valor $c\in(a, b)$ tal que $m = f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Al valor f(c) se le llama valor medio de f en el intervalo.



2.- Teorema fundamental del cálculo integral

Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b], entonces la función $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, con $x\in[a, b]$ es derivable en [a, b] y verifica que F'(x) = f(x), es decir, F(x) es primitiva de f(x).

3.- Regla de Barrow

Si una función f es continua en [a, b] y G es una primitiva cualquiera de f, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

EJEMPLOS

1.- Encuentra el valor medio de la función f (x) = x^2 en el intervalo [0, 2].

Resolución:

Aplicando directamente la fórmula queda:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

2.- Encuentra el valor medio de la función f definida por f (x) = x cos(x) en el intervalo [0, π/2]. Determina sin calcular la integral, si el valor medio de la función g(x) = $\dfrac{x\cos(x)}{1+(sen(x))^3}$ es mayor que el de f en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Resolución:

Como $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \dfrac{1}{\pi/2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)dx$ integramos por partes:

x = u dx = du; dv = cos x dx v = sen x

$$m = \frac{2}{\pi}\left[x\cos(x)\right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} sen(x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left[\cos(x)\right]_0^{\pi/2}\right] = \frac{\pi+2}{\pi}$$

Comparamos las expresiones $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)dx,\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\dfrac{x\cos(x)}{1+(sen(x))^3}dx$ comparando las integrales. Utilizamos la propiedad de monotonía de la integral respecto del integrando, como $1+[sen(x)]^3 > 1$ en $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$x\cos(x) > \frac{x\cos(x)}{1+(sen(x))^3} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos(x)dx > \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{x\cos(x)}{1+(sen(x))^3}dx$$

3.- Sea f la función f(x) = $\int_0^x \frac{t^2-2}{t+1}dt$, x > -1. ¿Es f derivable?.

Resolución:

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, al ser f continua en el intervalo [–1,+ ∞), entonces F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ es derivable en [-1, +∞) y se verifica:

F'(x) = f(x) = $\frac{x^2-2}{x+1}$ y como existe derivada, la función es derivable.

4.- Sea f: ℝ→ℝ la función definida por f (x) = 4+ $\int_0^x \frac{1}{3-2\cos(t)}dt$. Determina f(0) y, usando el Teorema fundamental del Cálculo Integral, calcula f '(0).

Resolución:

f(0) = 4 + $\int_0^0 \frac{1}{3-2\cos(t)}dt$ = 4 ya que $\int_a^a f(t)dt = 0$

f '(x) = 0 + $\frac{1}{3-2\cos x}$ = $\frac{1}{3-2\cos x}$ $\Rightarrow$ f'(0) = $\frac{1}{3-2\cos 0}$ = $\frac{1}{3-2}$ = 1

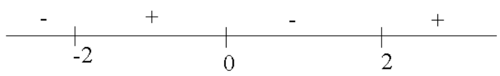
5.- Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo Integral para determinar los máximos y mínimos relativos de la función f (x) = $\int_0^x (t^3-4t)dt$

Resolución:

La función F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ es derivable y verifica F'(x) = f(x), ya que f(x) es una función continua en (-∞, +∞). Aplicando el teorema del valor medio a f(x) queda f '(x) = x^3 -4x, igualando a cero: x^3 -4x = 0 ⇒ x(x^2 -4) = 0 ⇒ x = 0, x = ±2

Si estudiamos el signo de la derivada, f tiene un máximo en x = 0:

f(0) = $\int_0^0 (t^3-4t)\,dt$ = 0



y tiene un mínimo en x = 2:

f(2) = $\int_0^2 (t^3-4t)\,dt$ = -4

6.- Dada la función

f(x) = $\begin{cases} -x^2, & \text{si } x < 0; \\ x^2, & \text{si } 0 \le x \le 3; \\ 6x, & \text{si } 3 < x. \end{cases}$ calcula $\int_{-3}^{3} 3f(x)dx$

Resolución:

Aplicando la Regla de Barrow y las propiedades de la integral definida:

$$\int_{-3}^{3} 3f(x)dx = 3\left[\int_{-3}^{0}(-x^2)dx + \int_0^3 x^2dx\right] = 3\left[\left[\frac{-x^3}{3}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3\right] = 3(-9+9) = 0$$

7.- Haciendo el cambio de variable t = e^x, calcula $\int_0^1 \sqrt{e^{3x} - e^{2x}}dx$

Resolución:

La integral es: I = $\int_0^1 \sqrt{e^{3x} - e^{2x}}dx = \int_0^1 e^{3x} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

Si efectuamos el cambio de variable $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$ queda:

$x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = e^1 = e$

$$I = \int_1^e \sqrt{t-1}\, dt = \left[\frac{(t-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^e = \left[\frac{\sqrt{(t-1)^3}}{3/2}\right]_1^e = \frac{2\sqrt{(e-1)^3}}{3} - 0 = \frac{2\sqrt{(e-1)^3}}{3}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Encuentra el valor medio de la función f definida por f (x) = 3x+2 en el intervalo [0, 2].
Solución: m = 5

2.- Determina la altura de un rectángulo de base 2 cuya área coincida con la limitada por la curva $y=3x^2$, las rectas y = 0, x =1 y x =3.
Solución: c =4

3.- Prueba como aplicación del teorema fundamental del cálculo integral que la función definida

por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) \text{ si } x \leq 0, \\ \dfrac{x - \int_0^x e^{-t^2} dt}{x^2}, \text{ si } x > 0. \end{cases}$ es continua en el punto x = 0.

4.- Halla los máximos y mínimos en el intervalo [2, 10] de la función $\int_1^x \ln(t)dt$ con $x > 1$

Solución: Mínimo en x=2 y máximo en x=10

5.- Sea f:[0, 3] →ℝ la función definida por

$f(x) = \begin{cases} 1-x \text{ si } 0 \leq x < 1, \\ 0 \text{ si } 1 \leq x \leq 2, \\ (x-2)^3 \text{ si } 2 < x \leq 3, \end{cases}$. Estudia la derivabilidad de F en x = 1.

Solución: No es derivable.

6.- Halla la derivada de la función $\int_0^x \frac{\operatorname{sen}^3 t}{1+t^3}dt$ con $x > e$

Solución: $\frac{\operatorname{sen}^3(x)}{1+(x)^3}$

7.- Sea la función f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = e^x \operatorname{sen}(2x)$ y F: ℝ → ℝ la función definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Halla F(π)

Solución: $F(\pi) = \frac{2(1-e^{\pi})}{5}$

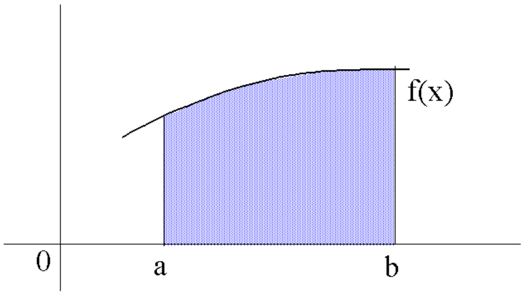
8.- Comprueba que se verifica $\int_0^2 |2x-1|\, dx = \frac{5}{2}$

5.3. CÁLCULO DE ÁREAS

1.- Función positiva

El área del recinto determinado por el eje de abcisas, las rectas x = a, x = b y la gráfica de la función f, positiva en el intervalo cerrado [a, b] es la integral:

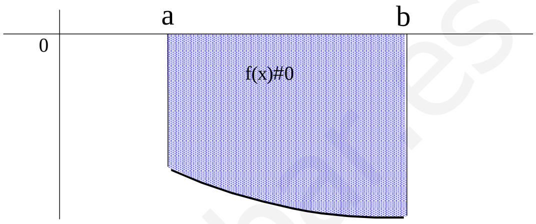
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



2.- Función negativa

Si la función es negativa, basta tomar el valor absoluto del resultado de la integral.

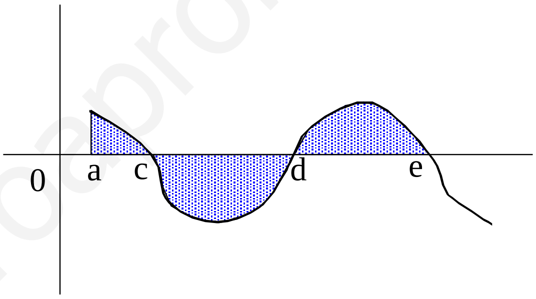
$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$



3.- Función que cambia de signo

Si la función toma valores positivos y negativos en el intervalo, se toman subintervalos tales que en cada uno de ellos sea positiva o negativa:

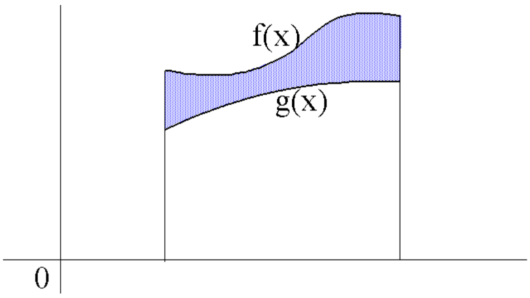
$$A = \int_a^b f(x)\,dx + \left| \int_c^d f(x)\,dx \right| + \int_d^e f(x)\,dx$$



4.- Comprendida entre dos curvas

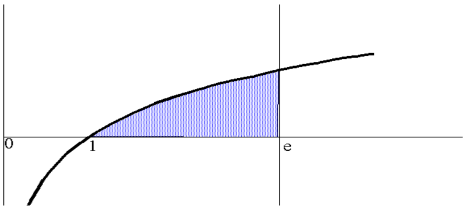
El área del recinto limitado por dos funciones es la diferencia de las áreas de los trapecios mixtilíneos determinados por ambas:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



EJEMPLOS

1.- Calcula el área de la región limitada por la curva y = Lx entre el punto de corte con el eje OX y la recta x= e.



Resolución:
El punto de corte con el eje X se hallará mediante la ecuación Lx = 0 $\Rightarrow$ x =1

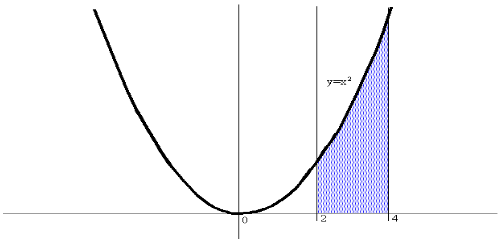
El otro límite de integración es x = e:

$$A = \int_1^e Lx\,dx = [xLx - x]_1^e = (e\,Le - e) - (1L1+1) = (e - e) - (0+1) = 1\ u^2$$

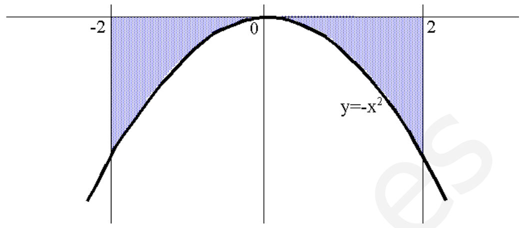
2.- Calcula el área de la región limitada por la curva $y=x^2$ el eje X y las rectas x = 2 y x = 4.

Resolución:
Los límites de integración son a= 2 y b = 4, luego el área es:

$$A = \int_2^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}\ u^2$$



4.- Calcula el área de la región limitada por la curva $y=-x^2$ el eje X y las rectas x= -2 y x = 2.

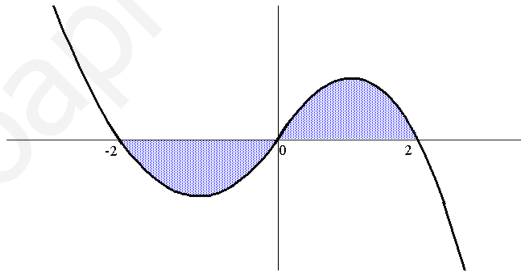


Resolución:
Tomamos valores absolutos al hallar el área ya que la gráfica de la función está por debajo del eje X.

Los límites de integración son -2 y 2:

$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{2} x^2\,dx\right| = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = -\frac{(-2)^3}{3} + \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\ u^2$$

5.- Halla el área limitada por la gráfica de la función $y=-x^3+4x$ y el eje de abscisas efectuando un esbozo gráfico de la región.

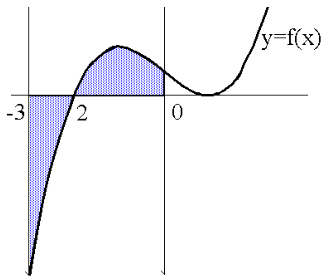


Resolución:
La gráfica de la función tiene como puntos de corte con el eje de abscisas las soluciones de $-x^3+4x=0$, es decir x = -2, x= 0 y x= 2. Se obtiene la gráfica adjunta.

Para hallar el área tenemos en cuenta el signo de f, obtenemos:

$$A = \int_{-2}^{0}(-x^3+4x)\,dx + \left|\int_0^2(-x^3+4x)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left[-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_0^2 = 8\ u^2$$

6.- Calcula el valor del área encerrada entre la gráfica de x^3-3x+2, el eje OX y las rectas x = -3 y x = 0.



Resolución:
La gráfica de la función corta al eje de abcisas en x = -2 y x = 1. Al ser positivo el coeficiente de x^3 es creciente tal como se ve en la figura.

El área la calcularemos mediante dos integrales, una para la parte positiva de la función y otra para la parte negativa de la función:

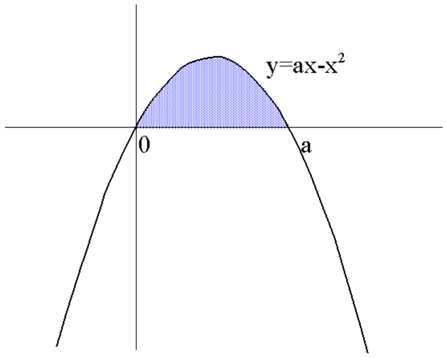
$$A = \int_{-3}^{-2}(x^2-3x+2)\,dx + \left|\int_{-2}^{0}(x^2-3x+2)\,dx\right| = \frac{25}{4}\ u^2$$

7.- Calcula el valor de a para el área determinada por la función $y=ax-x^2$ y el eje de abcisas valga 36 unidades de superficie.

Resolución:

La parábola $y = ax - x^2$ corta al eje de abcisas en $x_0 = 0$, $x_1 = a$ luego:

$$A = \int_0^a (ax - x^2)\,dx = 36$$

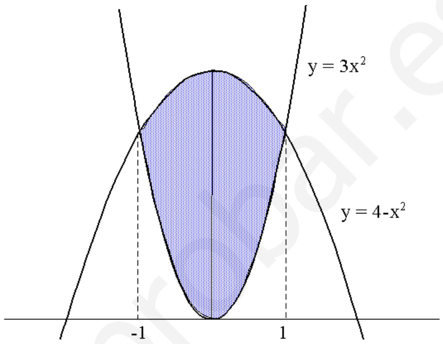


Hallamos la integral:

$$\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 36 \Rightarrow \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = 36 \Rightarrow a^3 = 6^3 \Rightarrow a = 6$$

8.- Halla el área limitada por las gráficas de las funciones $y = 3x^2$ e $y = -x^2+4$

Resolución:
Los límites de integración son los puntos de corte de ambas funciones $3x^2 = -x^2+4$ con solución: $x = \pm 1$



El área será la integral:

$$A = \int_{-1}^{1}\left[(4 - x^2) - x^2\right] dx = \int_{-1}^{1} (4 - x^2)dx =$$

$$= \left[4x - \frac{4x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}\ u^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- ¿Cuánto valdrá el área del recinto determinado por las curvas $y=x^3-x$, $y= x^2-3$
Solución: 0, ya que es un recinto abierto que no es medible.

2.- Halla el área encerrada por la gráfica de $f(x) = 2x+1$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.
Solución: $10u^2$

3.- Calcula el valor de **b** para que el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = 2x +1$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = b$ valga 14 u.s.
Solución: $b = 4$

4.- Calcula el valor de **a** para que el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = 2x + 1$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = 4$, valga 18 u. s.
Solución: $a=1$

5.- Calcula el valor del área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = 16x - x^3$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.
Solución: $44u^2$

6.- Halla el área limitada por las gráficas de las funciones $y =x^2$ e $y=-x^2+4$
Solución: $\frac{16}{3}\sqrt{2}\ u^2$

7.- Halla el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$, el eje OX y la recta $x = 2$.
Solución: $\frac{8}{3}\ u^2$

8.- Halla el área encerrada por la parábola de ecuación $y=2(1-x^2)$, y la recta de ecuación $y =-1$.
Solución: $2\sqrt{6}\ u^2$

5.4. VOLÚMENES DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN

1.- Giro en torno al eje OX

Sea y = f(x), $x \in [a, b]$ una función integrable en dicho intervalo. Cuando la gráfica de f gira en torno al eje X engendra un cuerpo de revolución cuyo volumen es: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

2.- Comprendido entre dos funciones

Cuando el recinto que gira está determinado por dos funciones f(x) y g(x), f $\geq$ g en [a, b], y las rectas x = a, x = b, el volumen es la diferencia de los sólidos de revolución engendrados por ambos recintos: $V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx$

EJEMPLOS

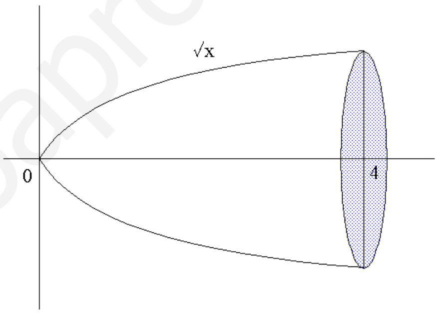
1.- Calcula el volumen de revolución engendrado al girar la parábola $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje X, entre 0 y 4.

Resolución:

Aplicando la fórmula con f(x)= $\sqrt{x}$ y a=0, b = 4:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx =$$

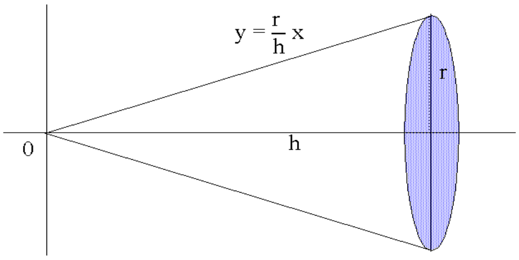
$$= \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi \text{ u}^3$$



2.- Calcula el volumen de un cono de radio r y altura h

Resolución:

Un cono de radio r y altura h se genera al girar alrededor de OX la recta que pasa por (0 0) y (h, r), ecuación $y = \frac{r}{h} x$, en el intervalo [0,h]. Los límites de integración a = 0 y b = h. El volumen es:



$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ u}^3$$

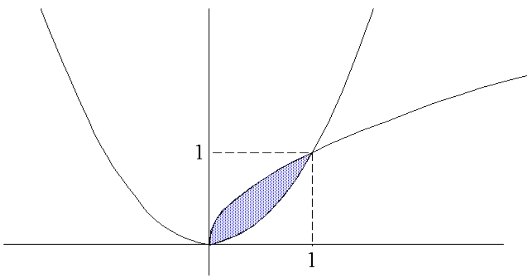
3.- Obtén el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje OX la región encerrada entre las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

Resolución:

El recinto que se hace girar es el de la figura, por lo tanto los límites de integración vienen dados por:

$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0, x = 1 \Rightarrow a = 0$ y $b = 1$.

El volumen se calcula restando los



sólidos de revolución:

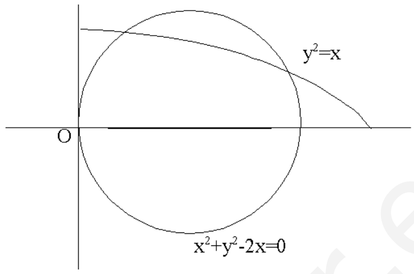
$$V = \pi\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]\,dx = \pi\int_0^1 \left[\sqrt{x}^{\,2} - (x^2)^2\right]dx = \pi\int_0^1 [x - x^4]\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}\,u^3$$

4.- Calcula el volumen de revolución engendrado al girar la superficie comprendida entre la parábola $y^2 = x$ y la circunferencia $y^2 = 2x - x^2$.

Resolución:
Las dos curvas se cortan en los puntos de abscisa x = 0, x = 1, con volumen:

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx =$$

$$= \pi\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\,u^3$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla el volumen engendrado por la función $y = \sqrt{x-5}$, en el intervalo [5, 9], al girar en torno al eje X.
Solución: $V = 8\pi\,u^3$

2.- Deduce la ecuación del volumen de un cilindro.

3.- Deduce la ecuación del volumen de un tronco de cono de altura h y radios de la base r y R.

Solución: $V = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr)\;u^3$

4.- Deduce el volumen engendrado al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje X

Solución: $V = \frac{4\pi}{3}ab^2\;u^3$

5.- Calcula el volumen de un balón elíptico de ejes a=12 y b=18 cm.
Solución: $3456\pi\;cm^3$

6.- Halla el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio de lados x=0, x=5, y=0, 2x-4y+5=0.
Solución: $V = \frac{1625}{48}\pi\;u^3$

7.- Calcula el volumen engendrado por la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el intervalo [-6, 6] al girar en torno al eje X.
Solución: $V = 240\pi\,u^3$

8.- Halla el volumen engendrado al girar alrededor del eje X el área bajo la curva $y = x^2$ cuando $x \in [1,3]$.
Solución: $V = \frac{242\pi}{5}\;u^3$

9.- Calcula el volumen de una esfera de radio r

5.5. EJERCICIOS DEL TEMA

1.- ¿Es cierto que si $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ entonces b = c?.

Solución: No. Contraejemplo f(x) = cos x en [0, π] y [0, 2π].

2.- Sabiendo que la función f es derivable en todos los puntos y su derivada verifica $f'(x) \geq 1$ para todo x, y que f(0) = 3, demuestra que $f(22) \geq 25$.

3.- Demuestra que el valor medio de la función f (x) = $x\sqrt{1-x^2}$ en el intervalo [0, 1] es m = $\frac{2}{3}$.

4.- Demuestra que el valor medio de la función f (x) = $x\sqrt{4-x^2}$ en el intervalo [0, 2] es m = $\frac{4}{3}$

5.- Demuestra que la altura de un rectángulo de base 2 cuya área coincida con la limitada por la curva $y = x^3$, las rectas y = 0, x =0 y x = 2 es m = 2.

6.- Considera la función f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x sen(2x)$. sea F: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ ¿Qué dice el teorema fundamental del cálculo integral sobre la función F?

Solución: F es derivable y su derivada es $F'(x) = e^x sen(2x)$.

7.- Demuestra que $\int_2^6 \sqrt{x-2}\, dx = \frac{16}{3}$.

8.- Demuestra que $\int_0^{\pi} senx\, dx = 2$.

9.- Demuestra que $\int_{\pi/4}^{\pi/6} sec^2 x\, dx = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$.

10.- Demuestra que $\int_1^2 (x^2 - 3x + 1)\, dx = -\frac{7}{6}$.

11.- Halla la derivada de la función F(x) = $\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt$.

Solución: F '(x) = $\frac{t}{1+t^2}$.

12.- Halla la derivada de la función $\int_0^x cos t^2 dt$.

Solución: $cos(x^2)$.

13.- Halla los máximos y mínimos de la función F(x) = $\int_1^{x^2} (t^2 - t)dt$.

Solución: Máximo en x = 0, mínimos en x = -1, x = 1.

14.- Halla los máximos y mínimos de la función F(x) = $\int_1^x cos^2 t dt$.

Solución: Máximos en $x \in \{0 + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$, mínimos en $x \in \{\pi/2 + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

15.- Si $f(x) = x^2+bx+c$ tiene su mínimo en x =2 y verifica $\int_2^4 \frac{f(x)}{x} dx$ =3Ln(2)-2 halla b y c.

Solución: b = -4, c = 3.

16.- Halla el área determinada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje de abcisas.
Solución: $8u^2$.

17.- Calcula el área limitada por la gráfica de y = cos x y el eje X en el intervalo $[0, 2\pi]$.
Solución: $4u^2$.

18.- Calcula el área de la figura comprendida entre la parábola $y=x^2$, y la recta $y=x+2$.

Solución: $\frac{9}{2}\ u^2$.

19.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 4x$, y la recta $y = 2x - 5$.

Solución: $\frac{32}{3}\ u^2$.

20.- Calcula el área limitada por las rectas x=0, x=1, y=3x+2, y la curva $f(x)=\frac{2}{x^2+3x+2}$.

Solución: $\frac{7}{2}+\log\frac{9}{16}\ u^2$.

21.- Calcula el área del recinto limitado por un periodo de $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ y el eje OX.

Solución: $8u^2$.

22.- Calcula el área limitada por la gráfica de y = sen x y el eje X en el intervalo $[0, \pi]$.
Solución: $2u^2$.

23.- Calcula el área del recinto limitado por $y = x^3-x$, el eje OX y las rectas $x =-3$ y $x = 4$.

Solución: $\frac{32}{3}\ u^2$.

24.- Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = 2x-x^2$ y la recta $y = -x$.

Solución: $\frac{9}{2}\ u^2$.

25.- Calcula el área comprendida entre las gráficas de las funciones $y = x^2-2x$ e $y=2x$.

Solución: $\frac{32}{3}\ u^2$.

26.- Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y^2=27x$.
Solución: $9u^2$.

27.- Encuentra el área determinada por la gráfica de la función $y = \frac{1}{1+x^2}$ el eje OX y las rectas que pasan por las abcisas de sus puntos de inflexión

Solución: $\frac{\pi}{3}\ u^2$.

28.- Calcula el área del lazo formado por las curvas y= 1-senx e y = sen x en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución: $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}u^2$.

29.- Calcula el valor de *a* para el área determinada por la función $y=ax-x^2$ y el eje de abcisas valga 33 unidades de superficie.
Solución: $a = 6$.

30.- Calcula el valor de **b** sabiendo que el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) =16x-x^3$, el eje OX y las rectas x = 1 y x = b vale $\frac{81}{4}\ u^2$

Solución: $b = 2$.

32.- Calcula el valor de k para que el área del recinto limitada por $y = e^x$, $y = e^{2x}$ y $x = k$, sea 2.

Solución: $\frac{32}{3}$ u^2.

33.- Calcula a para que el área formada por $f(x) = x^3 - x$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = a > 2$ valga 4 u^2.

Solución: $a = +\sqrt{6}$.

34.- Calcula el valor de **a** para que el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$, el eje OX y la recta $x = a$ valga 2 u^2.

Solución: a = $\sqrt[3]{6}$.

35.- Calcula el valor de **a** para que el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = ax^2$, el eje OX y la recta $x = 2$ valga $\frac{3}{2}$ u^2.

Solución: a = $\frac{9}{16}$.

36.- Encuentra el valor a para que el área determinada por la gráfica de la función $y=-x^2+ax$ e $y = x$ valga $\frac{9}{2}$ u^2.

Solución: a = 4.

37.- Demuestra que el volumen engendrado al girar en torno al eje OX el recinto limitado por la curva y = sen x entre 0 y π es $V = \frac{\pi^2}{2}$ u^3.

38.- Demuestra que el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje OX la región encerrada entre las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ es $V = \frac{3\pi}{10}$ u^3.

39.- Demuestra que el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ alrededor del eje X es $V = \frac{8\pi}{3}$ u^3.

40.- Demuestra que el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la elipse de ecuación $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ alrededor del eje X es $V = \frac{16\pi}{3}$ u^3.

41.- Demuestra que el volumen engendrado por el arco de la parábola $y = x^2$ entre 0 y 2 al girar alrededor del eje OX es $V = \frac{32}{5}\pi$ u^3.

42.- Demuestra que el volumen engendrado al girar en torno al eje OX el segmento de recta que une el origen de coordenadas con el punto (a, b) es $V = \frac{1}{3}\pi b^2 a$ u^3.

43.- Demuestra que el volumen de revolución engendrado al girar la superficie comprendida entre la parábola $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$ y la recta $y = \frac{1}{2}x$. es $V = \frac{520\pi}{13}$ u^3.

44.- Demuestra que el volumen del sólido engendrado al girar el arco de la curva de ecuación $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2-x}$ contenido en el primer cuadrante alrededor del eje OX es $V = \frac{\pi}{30}$ u^3.

EJERCICIOS DE ANÁLISIS

FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

MATEMÁTICAS II LOGSE

Antonio López García
Angeles Juárez Martín
Juan Fernández Maese

Índice Temático

TEMA 1

1.- FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1.1.- DEFINICIÓN Y TERMINOLOGÍA

1.- Función

Dados dos conjuntos *D* e *I*, se dice que *f* es una **función** definida en el conjunto *D* y tomando valores en el conjunto *I* cuando a cada elemento de *D* se le asigna uno y sólo un elemento de *I*. Se representa por:
f: D $\rightarrow$ I

- El conjunto *D* recibe indistintamente los nombres de **conjunto origen**, **conjunto inicial**, **dominio de la función**, o **campo de existencia** de la función, y se representa por *Dom*(*f*).

- Un elemento cualquiera del conjunto *D* se representa por la letra *x*, es la **variable independiente.**

- Cada elemento *x* de *D* tiene por imagen, mediante la función *f*, un elemento de *I* que se representa por *y*, es la **variable dependiente**. Esto se expresa escribiendo *y = f(x)*.

- El conjunto *I* es el **conjunto final** y los elementos que son imagen de algún elemento de *D* forman el **conjunto imagen** (*Im*(*f*)) o **recorrido** de la función (*f(D)*).
  f: D $\rightarrow$ I
  x $\rightarrow$ y = f(x)

Para que una función quede correctamente definida es necesario determinar:

- El conjunto inicial o dominio de la función.
- El conjunto final de la función.
- La regla por la cual se asigna a cada elemento del conjunto origen un solo elemento del conjunto imagen.

2.- Función real de variable real

Se llama **función real de variable real** a toda función definida de un subconjunto *D* de los números reales, en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, tal que a cada elemento *x* de *D* le corresponde uno y sólo un elemento *y* de $\mathbb{R}$:
f: D $\rightarrow$ $\mathbb{R}$
x $\rightarrow$ y = f (x)

3.- Definición de una función.

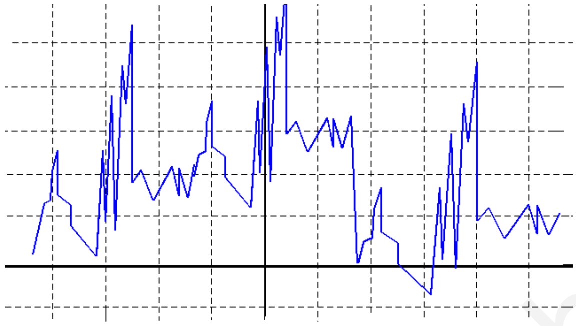
Una función se puede dar por medio de:

- Ley o fórmula algebraica: permite calcular la imagen conocida la variable independiente.
  f: D $\rightarrow$ $\mathbb{R}$
  x $\rightarrow$ x^2-3

- Tabla de valores. Establece expresamente la imagen de cada elemento del dominio.

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9

- Gráficas. Se emplea en ciencias experimentales: Medicina, Sismografía, Física y Química.



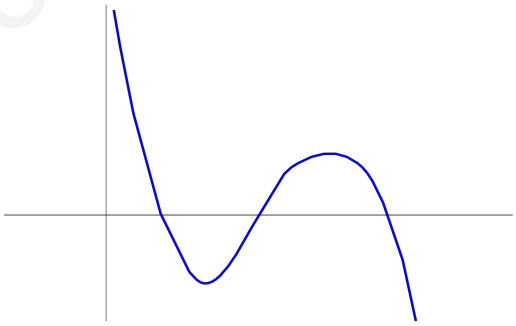
4.- Gráfica de una función.

La representación gráfica de una función permite visualizar de un modo claro y preciso su comportamiento.

Una función *f* asigna a cada número *x* del conjunto origen, un número *y* = *f(x)* del conjunto imagen.

El conjunto de los pares de números *(x, y)* determinados por la función recibe el nombre de *grafo* de la función, es decir:
G = {(x, f(x)) / x∈D}

Para obtener los pares basta con dar valores a la variable independiente *x*, y obtener los correspondientes de la variable dependiente *y*, formando así una tabla de valores de la función.



Una vez obtenidos los pares de números, se representan en un sistema de ejes cartesianos, que consiste en dos ejes perpendiculares que se cortan en un punto, llamado origen de coordenadas, y representado por *O*.

El eje horizontal recibe el nombre de **eje de abscisas**, y en él se representan los valores de la variable independiente.

El eje vertical recibe el nombre de **eje de ordenadas**, y en él se representan los valores de la variable dependiente.

Cada par de números corresponde a un punto del plano. Uniendo todos los puntos, se obtiene la gráfica de la función.

EJEMPLOS

1.- Comprueba si la función definida por:
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2$

que asigna a cada número real su cuadrado, está correctamente definida.

Resolución

- Tiene por *conjunto origen* o campo de existencia todos los números reales, pues dado cualquier número real *x*, siempre es posible calcular su cuadrado, siendo el resultado otro número real.

- Tiene por *conjunto imagen* todos los números reales positivos, puesto que el cuadrado de un número siempre es positivo:
Im(f) = R^+

- La *regla de asignación* es: «dado cualquier número real *x*, calcular su cuadrado para obtener la imagen».

2.- Halla el campo de existencia de la función *f* definida por f(x) = $\frac{1}{x-2}$

Resolución:

La función anterior asigna a cada número *x*, el valor $\frac{1}{x-2}$

El dominio o campo de existencia está formado por todos los números reales *x*, para los que su imagen está definida mediante la función *f*.

La expresión $\frac{1}{x-2}$ está definida para todos los números reales, salvo para aquellos que anulen el denominador, puesto que la expresión 1/0 no es un número real. El denominador $x - 2$ se anula cuando $x = 2$.

Por tanto, el dominio de definición es $\mathbb{R} - \{2\}$ ó $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

3.- Halla el dominio de definición de la función *f* definida por f(x) = $\sqrt{x^2-9}$

Resolución:

La expresión $\sqrt{x^2-9}$ está definida cuando el radicando es mayor o igual que cero, puesto que las raíces cuadradas de los números negativos no tienen sentido en el conjunto de los números reales.

Por lo tanto se trata de hallar qué valores de x hacen que $x^2-9 \geq 0$.
$x^2-9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow -3 \leq x$ ó $x \geq 3$

o bien
$D(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

4.- Halla el campo de existencia de la función *f* definida por f(x) = $\frac{1}{x^2 - x - 6}$

Resolución:

La expresión $\frac{1}{x^2 - x - 6}$ está definida cuando el denominador no se anula.

x^2-x-6 = 0 $\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Por lo tanto, al campo de existencia es ℝ-{-2,3} ó $(-\infty, -2) \cup (-2,3) \cup (3,\infty)$

5.- Dada la función f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ halla la imagen de los números -3, 0, 3 y 5. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Hay algún número que se transforme en el 0?

Resolución:

- Las imágenes pedidas son:

  f(-3) = $\frac{1}{\sqrt{(-3)^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$

  f(0) = $\frac{1}{\sqrt{0^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

  f(3) = $\frac{1}{\sqrt{3^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$

  f(5) = $\frac{1}{\sqrt{5^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$

- Dominio: El denominador nunca se anula, ya que $x^2+2 > 0$ para cualquier x, pues ambos sumandos son siempre positivos. Por lo tanto el dominio de definición de esta función es toda la recta real ℝ.

- Para responder a la pregunta siguiente, hay que estudiar si existe algún número *x*, tal que *f(x)* = 0.

  Si $\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ = 0 $\Rightarrow$ 1= 0, que es un absurdo. Así pues el 0 no es imagen de ningún número.

6.- Halla el dominio y recorrido de f(x) = x^2

Resolución:

- Dominio: ℝ, ya que está definido para todos ellos (es función polinómica).

- Recorrido: $ℝ^+$ ya que todo número elevado al cuadrado es positivo o cero.

7.- Halla el dominio de f(x) = $\frac{2x}{x^2 - 4}$

Resolución:

Dominio: Valores de ℝ que no anulen el denominador. Como los valores que lo anulan son -2 y 2 el dominio es ℝ -{-2,2}

8.- Dada la función f(x) = $L\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$, determina su dominio.

Resolución:

Para que exista $L\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ es necesario que $\frac{x+1}{x-2}$ > 0, que ocurre cuando:

x+1> 0 y x-2 > 0 $\Rightarrow$ x > 2
x+1< 0 y x-2 < 0 $\Rightarrow$ x < -1
El dominio es D = (-∞, -1)∪(2, ∞).

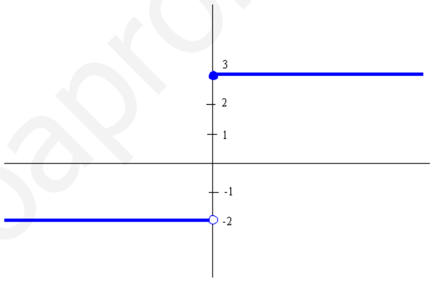
9.- Dada la función f(x) = e^{2x-1}, determina su dominio.

Resolución:
El dominio es ℝ ya que es una exponencial siempre tiene dicho dominio cualquiera que sea su base y exponente.

10.- Representa gráficamente la función definida por

f(x) = $\begin{cases} -2 \text{ si } x < 0 \\ 3 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

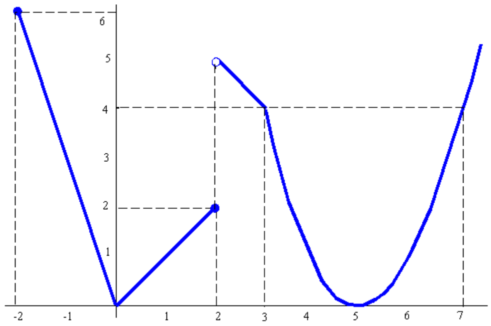
Resolución:
Esta función toma el valor -2 para todos los puntos cuya abscisa sea negativa, y toma el valor 3 para todos los puntos cuya abscisa sea positiva o nula. En este caso *Im*(*f*) = {-2,3}. Su gráfica es la de la figura adjunta.



11.- Determina el dominio y recorrido de la función cuya gráfica es la de la siguiente figura.

Resolución:
Observando atentamente la figura obtenemos que:

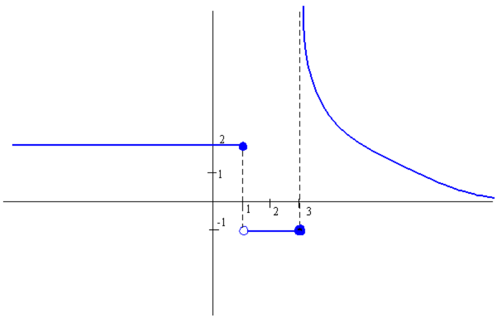
- El dominio es [-2, ∞).
- El recorrido es [0, ∞).



12.- Halla el dominio y recorrido de la función de la figura adjunta.

Resolución:

- El dominio de definición es el subconjunto en el que se define la función. Como se observa en la gráfica, la función existe para todos los valores reales.
  Dominio: ℝ.
- Recorrido: es el subconjunto de valores que toma la función.
  Recorrido: {-1}∪(0, ∞)



13.- Una función y = f(x) tiene la gráfica siguiente. ¿Cuál es su dominio y recorrido?

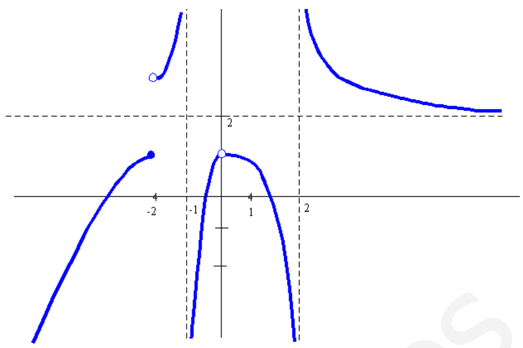
Resolución:

- Dominio de definición: es el subconjunto de $\mathbb{R}$ en el que se define la función, será:

  Dominio: $(-\infty, -1)\cup(-1, 2)\cup(2,\infty)$

- Recorrido: es el subconjunto de valores que toma la función.

  Recorrido: $(-\infty, 1]\cup(2,\infty)$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla el dominio de definición de f(x) = $\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$

Solución: El dominio es $\mathbb{R}$ *-{2,3}*

2.- Halla el dominio de definición y el recorrido f(x) = $\sqrt{x^2-16}$

Solución: El dominio es $(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$ *y el recorrido es* $\mathbb{R}^+$

3.- Dominio y recorrido de f(x) = x^3

Solución: El dominio es $\mathbb{R}$ *y el recorrido es* $\mathbb{R}$

4.- Calcula el dominio de definición de la función f(x) = $3-\sqrt{x+5}$

Solución: $[-5, \infty)$

5.- Halla el dominio de definición de la función f(x) = $\sqrt{1-x^2}$

Solución: [-1,1]

6.- Halla el dominio de definición de la función f(x) = $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

Solución: [-1,1]

7.- Halla el dominio de definición de la función f(x) = $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+4}$

Solución: $\mathbb{R}$ *- {-4,1}*

8.- Halla el dominio de definición de la función f(x) = $L\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

Solución: $\mathbb{R}^+$*-{0}*

9.- Halla el dominio de definición de la función f(x) = $2^{\frac{x+1}{x^2}}$

Solución: $\mathbb{R}^*$

10.- Halla el dominio de definición de la función f(x) = sen(x+π)

Solución: $\mathbb{R}$

1.2.- OPERACIONES CON FUNCIONES

1.- Suma de funciones

Sean *f* y *g* dos funciones reales de variable real. Se llama suma de ambas funciones, y se representa por *f* + *g*, a la función definida por
$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad \forall x \in D(f) \cap D(g)$

2.- Diferencia de funciones

Del mismo modo que se ha definido la suma de funciones, se define la diferencia de dos funciones reales de variable real *f* y *g*, como la función
$(f - g)(x) = f(x) - g(x); \quad \forall x \in D(f) \cap D(g)$

3.- Producto de funciones

Sean *f* y *g* dos funciones reales de variable real. Se llama función producto de *f* y *g* a la función definida por
$(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x); \quad \forall x \in D(f) \cap D(g)$

4.- Cociente de funciones

Dadas dos funciones reales de variable real, *f* y *g*, se llama función cociente de *f* y *g* a la función definida por
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; \quad \forall x \in D(f) \cap D(g) \cap \{x \in \mathbb{R} / g(x) \neq 0\}$

5.- Producto de un número por una función

Dado un número real *a* y una función *f*, el producto del número por la función es la función definida por
$(a \,.\, f)(x) = a \,.\, f(x); \quad \forall x \in D(f)$

EJEMPLOS

1.- Sean las funciones *f*(*x*) = 3*x* + 1, y *g*(*x*) = 2*x* - 4. Define la función f+g y calcula las imágenes de los números 2, -3 y $\frac{1}{5}$.

Resolución:
La función *f* + *g* se define como
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 1 + 2x - 4 = 5x - 3.$

$(f + g)(2) = 5 \cdot 2 - 3 = 7$
$(f + g)(-3) = 5(-3) - 3 = -18$
$(f + g)(1/5) = 5 \cdot 1/5 - 3 = -2$

El resultado es el mismo que si se calculan las imágenes de *f* y *g* y se suman.

Por ejemplo, para la imagen del 2,
$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 3.2 + 1 = 7 \\ g(2) = 2.2 - 4 = 0 \end{array}\right\} (f + g)(2) = 7 + 0 = 7$$

2.- Dadas las funciones *f* (*x*) = *x*² - 3, y *g*(*x*) = *x* + 3, define la función (*f*–*g*). Calcula las imágenes de 1/3, -2 y 0 mediante la función *f* - *g*.

Resolución:

$(f\text{-}g)(x) = f(x)\text{-}g(x) = x^2 \text{-}3\text{-}(x+3) = x^2 \text{-}x\text{-}6$

$(f\text{-}g)(1/3) = (1/3)^2\text{-}1/3\text{-}6 = \text{-}56/9$

$(f\text{-}g)(\text{-}2) = (\text{-}2)^2\text{-}(\text{-}2)\text{-}6 = 0$

$(f\text{-}g)(0) = (0)^2\text{-}0\text{-}6 = \text{-}6$

Calculando las imágenes mediante las funciones *f* y *g* por separado, y efectuando la resta, se obtiene el mismo resultado.

3.- Dadas las funciones f(x) = $\frac{x}{2} - 3$ y g(x) = 2x+1, define la función f . g.

Resolución:

$$(f\,.\,g)(x) = f(x)\,.g(x) = \left(\frac{x}{2} - 3\right)(2x+1) = x^2 - \frac{11}{2}x - 3$$

Calculando las imágenes de los números mediante las funciones *f* y *g* por separado, y multiplicando después, se obtienen los mismos resultados.

4.- Dadas las funciones f(x) = -x - 1 y g(x) = 2x + 3, define f/g. Calcula las imágenes de los números -1, 2 y 3/2 mediante $\frac{f}{g}$

Resolución:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-x-1}{2x+3}$$

La función $\frac{f}{g}$ está definida para todos los números reales, salvo para *x*= -3/2, donde la función *g* se anula.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{-3}{7}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-5/2}{6} = \frac{-5}{12}$$

Calculando por separado las imágenes mediante las funciones *f* y *g*, y después efectuando su cociente, se obtienen los mismos resultados.

5.- Dada la función f(x) = x²+x-2, calcula 3.f y $\frac{1}{3}$f . Obtén las imágenes de los números 2, 1 y 0 mediante la función 3 · *f*.

Resolución:

$(3f)(x) = 3.f(x) = 3.(x^2 + x\text{-}2) = 3x^2 + 3x\text{-}6$

$$\left(\frac{1}{3}\right)f(x) = \frac{1}{3}f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x - 2)$$

$(3f)(2) = 3.(2^2 + 2\text{-}2) = 12$

$(3f)(1) = 3.(1^2 +1-2) = 0$
$(3f)(0) = 3.(0^2 +0-2) = -6$

6.- Dadas las funciones f(x) = 1/x y g(x) = x^2-25. Hallar el cociente y su dominio

Resolución:

El cociente es $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x(x^2-25)}$

El dominio son todos los números reales, salvo los que anulan el denominador, es decir $\mathbb{R}$-{-5,0,5}

7.- Determina el dominio de la función
f(x) = $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-4}$

Resolución:

El dominio de definición de f(x) $= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-4}$ está formado por la intersección de los dominios de ambos sumandos, que serán los valores que hagan que los radicandos sean positivo o cero:
f_1: $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow D(f_1) = [-1,1]$
f_2: $x^2-4 \geq 0 \Rightarrow D(f_2) = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

Siendo la intersección:
$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) = \Phi$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 -1$, y $g(x) = x +1$, define la función ($f-g$). Calcula las imágenes de 1/2, -1 y 0 mediante la función $f - g$.
Solución: $(f - g)(x) = 2x^2 -x-2$, $(f-g)(1/2) = -2$, $(f-g)(-1) = 1$, $(f-g)(0) = -2$.

2.- Dadas las funciones f(x) = -x+1 y g(x) = 2x+1, define f/g. Calcula las imágenes de los números -1, 1 y 1/2 mediante $\frac{f}{g}$

Solución: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-x+1}{2x+1}$, $(f/g)(1/2) = 1/4$, $(f/g)(-1) = -2$, $(f/g)(0) = 1$.

3.- Halla el dominio de definición de la función f(x) = $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$
Solución: {-1,1}

4.- Halla el dominio de definición de la función $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^3-x}}$

Solución: $\mathbb{R}$-{-1,0,1}

5.- Halla el dominio de definición de la función $y = \frac{x^2+1}{x-1}$

Solución: $\mathbb{R}$ -{1}

1.3.- COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones reales de variable real, *f* y *g*, se llama *composición de las funciones f* y *g*, y se escribe $g \circ f$, a la función definida por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$; $\forall x \in D(f)$

Para que la composición esté bien definida es necesario que $Im(f) \subset D(g)$, en caso contrario no se pueden componer.

La función $(g \circ f)(x)$ se lee « *f* compuesto con *g* aplicado a *x* ».

$$R \xrightarrow{f} R \xrightarrow{g} R$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$$

Primero actúa la función *f* y después actúa la función *g*, sobre *f*(*x*).

Para obtener la imagen de la función compuesta aplicada a un número *x*, se siguen estos pasos:

- Se calcula la imagen de *x* mediante la función *f*, es decir *f*(*x*).
- Se calcula la imagen mediante la función *g* de *f*(*x*). Es decir, se aplica la función *g* al resultado obtenido anteriormente.

EJEMPLO

1.- Sean las funciones
$f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$.

Calcula $g \circ f$ y la imagen mediante esta función de 1, 0 y -3.

Resolución:
$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x+3) = (x+3)^2$

La imagen de los números 1, 0, -3, mediante la función $g \circ f$ es:
$(g \circ f)(1) = g[f(1)] = g(1+3) = g(4) = 4^2 = 16$
$(g \circ f)(0) = g[f(0)] = g(0+3) = g(3) = 3^2 = 9$
$(g \circ f)(-3) = g[f(-3)] = g(-3+3) = g(0) = 0^2 = 0$

2.- Dadas las funciones
$f(x) = x^2 + 1$, y $g(x) = 3x - 2$

calcula:
***a*) $(g \circ f)(x)$**
***b*) $(f \circ g)(x)$**
***c*) $(g \circ f)(1)$ y $(f \circ g)(-1)$**
***d*) El original de 49 para la función $g \circ f$.**

Resolución:
a) La función $g \circ f$ está definida por:
$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2+1) = 3(x^2+1)^2-2 = 3x^2+1$

b) La función $g \circ f$ está definida por:
$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (3x-2)^2+1 = 9x^2-12x+5$
Observa que $g \circ f \neq f \circ g$

c) Aplicando los resultados de los apartados anteriores:
$(g \circ f)(1) = 3.1^2+1 = 4$
$(f \circ g)(-1) = 9(-1)^2-12(-1)+5 = 26$

d) El original de 49 para la función $g \circ f$ será un número x, tal que $(g \circ f)(x) = 49$
$(g \circ f)(x) = 3x^2 + 1 = 49$. Basta con resolver esta ecuación.

Sus soluciones son $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$.

3.- Efectúa la composición de las funciones
$f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = x^2$

Resolución:
Las funciones compuestas son:
- $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\text{sen } x] = \text{sen}^2 x$
- $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2] = \text{sen}(x^2)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Sean $s(x) = x^2$, $p(x) = 2^x$, $t(x) = \text{sen } x$, determina $(s \circ p)(x)$
Solución: $(s \circ p)(x) = 2^{2x}$

2.- Sean $s(x) = x^2$, $p(x) = 2^x$, $t(x) = \text{sen } x$, determina $(s \circ t)(x)$
Solución: $(s \circ t)(x) = \text{sen}^2 x$.

3.- Sean $s(x) = x^2$, $p(x) = 2^x$, $t(x) = \text{sen } x$, determina $(t \circ s)(x)$
Solución: $(t \circ s)(x) = \text{sen}(x^2)$.

4.- Sean $s(x) = x^2$, $p(x) = 2^x$, $t(x) = \text{sen } x$, expresa $f(x) = 2^{\text{sen } x}$ en términos de las funciones s(x), p(x) y t(x), operadas con "+" y "∘"
Solución: $2^{\text{sen } x} = (p \circ t)(x)$.

5.- Sean $s(x) = x^2$, $p(x) = 2^x$, $t(x) = \text{sen } x$, expresa $f(x) = \text{sen } 2^x$ en términos de las funciones s(x), p(x) y t(x), operadas con "+" y "∘"
Solución: $\text{sen } 2^x = (t \circ p)(x)$.

6.- Sean $s(x) = x^2$, $p(x) = 2^x$, $t(x) = \text{sen } x$, expresa $f(x) = \text{sen}(x^2)$ en términos de las funciones s(x), p(x) y t(x), operadas con "+" y "∘"
Solución: $\text{sen}(x^2) = (t \circ s)(x)$.

7.- Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
determina la función $f \circ f$
Solución: a) $(f \circ f)(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$

8.- Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
determina la función $f \circ f$
Solución: a) $(f \circ f)(x) = \dfrac{x-1}{x}$

9.- Sean la funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{Ln}(x)$ determina las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$
Solución: a) $(f \circ g)(x) = \text{Ln}^2 x$, $(g \circ f)(x) = \text{Ln}(x^2)$.

10.- Sean la funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$ determina las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$
Solución: a) $(f \circ g)(x) = e^{2x}$, $(g \circ f)(x) = e^{x^2}$.

1.4.- FUNCIONES SIMÉTRICAS

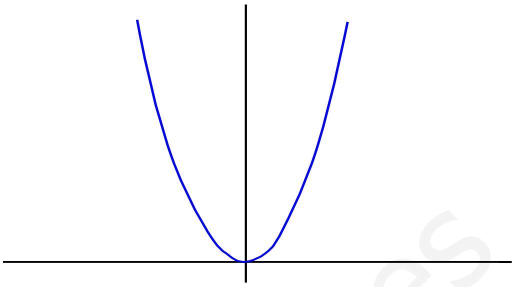
1.- Funciones pares

Una *función f* es *par* cuando cumple $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D(f)$

Es decir, las imágenes de valores opuestos coinciden f(2) = f(-2), f(1) = f(-1).

Por coincidir las imágenes de valores opuestos, la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje *Y*.

El ejemplo más sencillo es $y = x^2$, cuya gráfica vemos en la figura



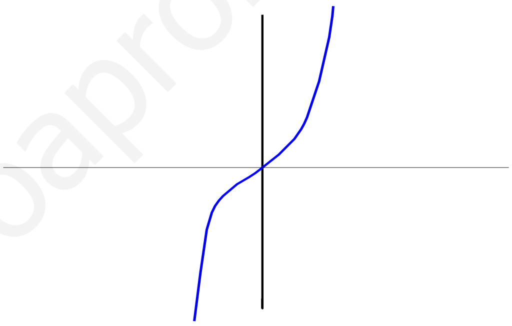
2.- Funciones impares

Una *función f* es *impar* si cumple $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f)$

A valores opuestos de *x* corresponden imágenes opuestas. (La imagen de 2 es la opuesta de la imagen de -2; la imagen de -1 es la opuesta de la imagen de 1...).

Por corresponder a valores opuestos de *x*, imágenes opuestas, la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

El ejemplo más sencillo es $y = x^3$, cuya gráfica vemos en la figura



EJEMPLO

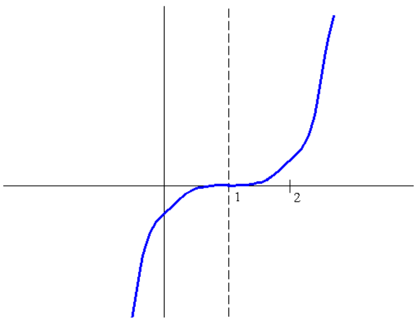
1.-Sea f la función definida por f (x) = $(x-1)|x-1|$. ¿Es simétrica la gráfica de f con respecto a algún punto?

Resolución:

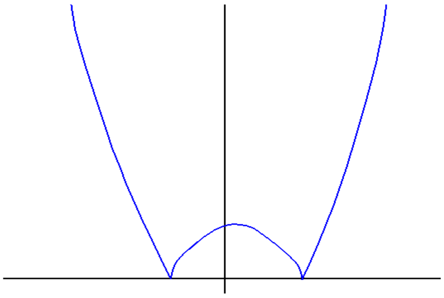
Redefinimos la función f de modo que no aparezca el valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-1) & \text{si } x \geq 1 \\ (x-1)(1-x) & \text{si } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \geq 1 \\ -(x-1)^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

La gráfica de f es simétrica respecto a P = (1,0) tal como se ve en la figura:



2.- Sea y = f(x) la función cuya gráfica es la de la figura adjunta.
¿Presenta f alguna simetría ?



Resolución:
La gráfica de f es simétrica respecto al eje de ordenadas, luego presenta simetría de tipo par.

3.- Indica cuáles de estas funciones son pares:
$f(x) = x^2$, $g(x) = 3x+2$, $k(x) = |x|$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f(-x) = (-x)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

La función *f* es par.

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = 3x + 2 \\ g(-x) = 3(-x) + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) \neq g(-x)$$

La función *g* no es par.

$$\left.\begin{array}{l} k(x) = |x| \\ k(-x) = |-x| \end{array}\right\} \Rightarrow k(x) = k(-x)$$

$k(x) = |x|$ es una función par.

4.-¿Cuáles de estas funciones son impares?:
$f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x+1$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x \\ f(-x) = -x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

Esta función es impar.

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^3 \\ g(-x) = (-x)^3 \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) = -g(-x)$$

Es una función impar.

$$\left.\begin{array}{l} h(x) = x + 1 \\ h(-x) = -x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow h(x) \neq h(-x),\ h(x) \neq -h(-x)$$

Esta función no es par ni impar.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Estudia la simetría de las función $f(x) = x^4-x^2$
Solución: Es par

2.- Estudia la simetría de las función $f(x) = x^3-x$
Solución: Es impar

3.- Estudia la simetría de la función f(x) = x^4-x
Solución: No es simétrica.

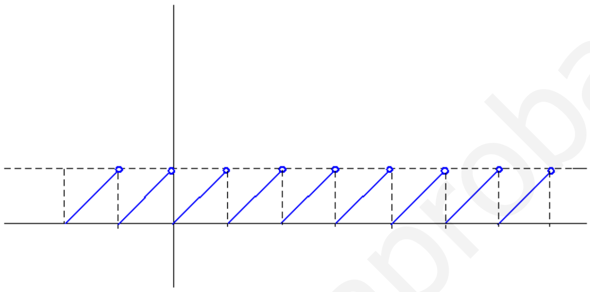
4.- Estudia la simetría de la función f(x) = x^3-x^4
Solución: No es simétrica.

5.- Estudia la simetría de la función f (x) = | x | +2
Solución: Es par.

6.- Estudia la simetría de la función f (x) = | x | + x
Solución: No es simétrica.

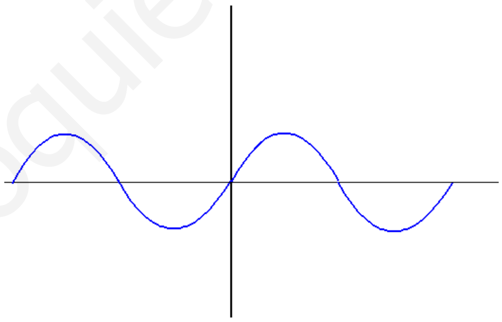
7.- Estudia la simetría de la función f(x) = -x
Solución: Es impar.

8.- Estudia la simetría de la función cuya gráfica es la de la figura.



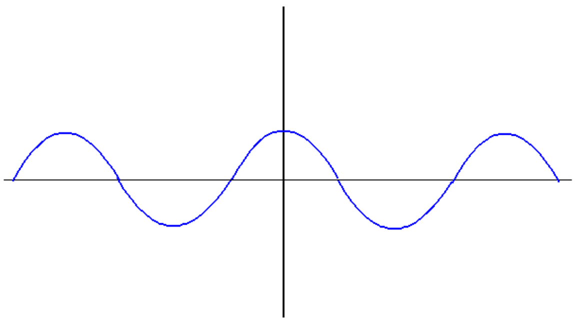
Solución: No es simétrica

9.- Estudia la simetría de la función cuya gráfica es la de la figura.



Solución: Es impar.

10.- Estudia la simetría de la función cuya gráfica es la de la figura.



Solución: Es par

1.5.- FUNCIONES INVERSAS

Dada una *función f* inyectiva, su inversa o recíproca es otra función, designada por f^{-1} de forma que se verifica: si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$, ($f \circ f^{-1} = I$, $f^{-1} \circ f = I$)

Sólo se puede hallar la función inversa en los intervalos del dominio de definición en que la función sea inyectiva, ya que en caso contrario no es la función f^{-1}.

Pasos a seguir para determinar la función inversa de una dada:

- Despejar la variable independiente *x*.
- Intercambiar la *x* por la *y*, y la *y* por la *x*.

La función así obtenida es la inversa de la función dada.

Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del 1^er^ y del 3^er^ cuadrante.

EJEMPLOS

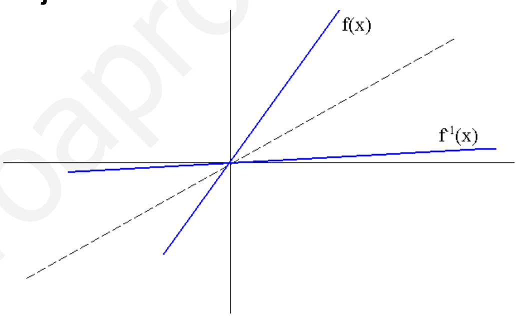
1.- Halla la función inversa de *y* = 5*x* - 2, y representa las gráficas de ambas funciones en el mismo sistema de ejes.

Resolución:

Se despeja: $x = \dfrac{y+2}{5}$

Se intercambian ambas variables:

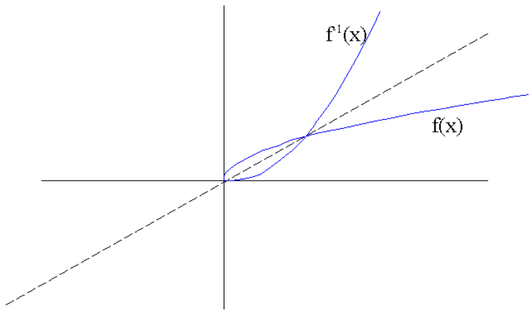
$y = \dfrac{x+2}{5}$



2.- Halla la función inversa de *y* = $\sqrt{x}$, y representa las gráficas de ambas funciones en el mismo sistema de ejes.

Resolución:
El dominio de definición de la función $y = \sqrt{x}$ **es** $\mathbb{R}^+$. Se despeja la variable:
$x = y^2$

Se intercambian ambas variables:
$y = x^2$

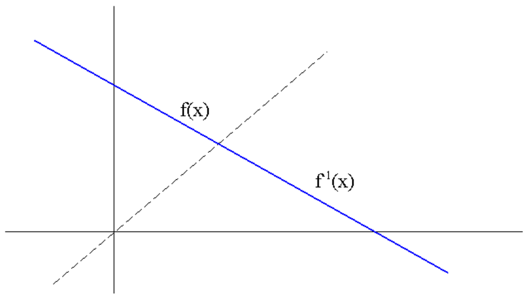


3.- Halla la función inversa de *y* = -x + 4, y representa las gráficas de ambas funciones en el mismo sistema de ejes.

Resolución:
Se despeja *x* :
x = -*y* + 4.

Se intercambian ambas variables:
y = -*x* + 4.

La función es inversa de si misma.



4.- Calcula la función inversa de la función
f(x) = $e^{\sqrt{x}} - 2$

Resolución:
Para calcular la función inversa cambiamos x por y e y por x
x = $e^{\sqrt{y}} - 2$

despejamos la variable y:
$e^{\sqrt{y}} = x + 2 \Rightarrow \sqrt{y} = L(x+2) \Rightarrow y = L[(x+2)]^2$

es decir:
$f^{-1}(x) = L[(x+2)]^2$

5.- Calcula la función recíproca de
f(x) = $e^{\sqrt{x-5}} - 5$.

Resolución:
Como f es una función exponencial de base e, su dominio será el del exponente, y como éste es una función irracional de índice dos, el dominio será el conjunto de valores de x que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero, es decir:
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x-5 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\} = [5, +\infty)$

Para calcular su función recíproca, permutamos "x" e "y" y despejamos esta última, es decir:
$x = e^{\sqrt{y-5}} - 5 \Rightarrow x+5 = e^{\sqrt{y-5}}$

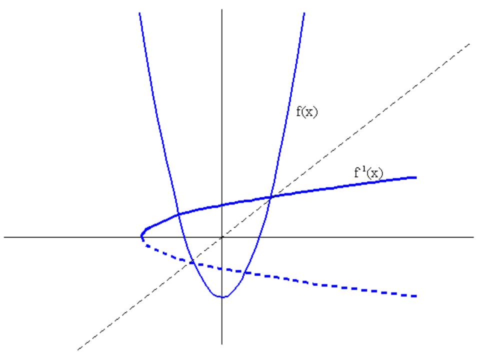
tomando logaritmos neperianos en los dos miembros:
$L(x+5) = L\left(e^{\sqrt{y-5}}\right) \Rightarrow L(x+5) = \sqrt{y-5}$

elevando al cuadrado los dos miembros:
$y-5 = [L(x+5)]^2$

despejando "y" obtenemos la inversa:
$y = [L(x+5)]^2 + 5$

6.- Representa la función f(x) = x^2-4. A partir de ella obtén razonadamente la gráfica de $f^{-1}(x)$.

Resolución:
Representamos la función y = x^2-4, cuya gráfica será la de x^2 pero desplazada 4 unidades hacia abajo. La gráfica de f^{-1} se obtiene efectuando la simetría de la gráfica de f con respecto a la recta y = x.



Como no es inyectiva en todo su dominio de definición deberemos considerar los intervalos $(-\infty,0]$ y $[0, \infty)$. En cada uno de los cuales serán las funciones:
$y = \pm\sqrt{x+4}$

respectivamente las funciones inversas, como aparece en la figura.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Obtén la función inversa de
$y = 3x - 5$
Solución: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3}$

2.- Obtén la función inversa de
$y = 2 - \sqrt{x-4}$
Solución: $f^{-1}(x) = (2-x)^2 + 4$

3.- Representa las funciones
$y = 2^x$ e $y = \log_2 x$

4.- Representa las funciones
$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

5.- Halla la función inversa de
$f(x) = 2^{\sqrt{x}} + 5$
Solución: $f^{-1}(x) = [\log_2 (x-5)]^2$

6.- Calcula la función inversa de
$f(x) = 3 - \sqrt{x+5}$
Solución: $f^{-1}(x) = (-x+3)^2 - 5$

7.- Calcula la función inversa de
$f(x) = \dfrac{6}{x+3}$
Solución: $f^{-1}(x) = \dfrac{6-3x}{x}$

8.- Señala cuáles de las siguientes funciones son inversas de si mismas y representa sus gráficas:
a) $y = x$
b) $y = -x$,
c) $y = 2x-2$,
d) $y = \dfrac{3}{x}$,
e) $y = \pi - x$.
Solución:
Son las funciones a), b), d) y e)

9.- ¿Qué se puede decir de una función que es recíproca de si misma?. Razona la respuesta.

10.- Obtén la función inversa de
$y = \dfrac{2x+3}{7}$
Solución: $f^{-1}(x) = \dfrac{7x-3}{2}$

11.- Obtén la función inversa de
$y = 3 + \sqrt{3+x}$
Solución: $f^{-1}(x) = (x-3)^2 - 3$

1.6.- FUNCIONES MONÓTONAS Y ACOTADAS

1.- Monotonía en un intervalo

- Una función f es **monótona creciente** en un intervalo (a, b) si se cumple que:
  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

- Una función f es **estrictamente creciente** en un intervalo (a, b) si se cumple que:
  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- Una función f es **monótona decreciente** en un intervalo (a, b) si se cumple que:
  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

- Una función f es **estrictamente decreciente** en un intervalo (a, b) si se cumple que:
  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

2.- Monotonía en un punto

Una función f es monótona en un punto $x_0 \in D(f)$ si, y sólo si, existe un entorno de x_0 donde f es monótona.

3.- Acotación

- Una función está **acotada inferiormente** cuando existe un número real K (cota inferior) tal que todos los valores que toma la función son mayores que K.

- Una función está **acotada superiormente** cuando existe un número real K' (cota superior) tal que todos los valores que toma la función son menores que K'.

- Una función está **acotada** si lo está superior e inferiormente

- **Extremo inferior** es la mayor de las cotas inferiores. Si el extremo inferior se alcanza en un valor del dominio de definición de la función, a este valor se le llama mínimo.

- **Extremo superior** es la menor de las cotas superiores. Si el extremo superior se alcanza en una imagen de un valor del dominio de definición de la función, el valor es un máximo.

EJEMPLOS

1.- Halla los intervalos del dominio de definición en los que $y = x^2$ es creciente o decreciente

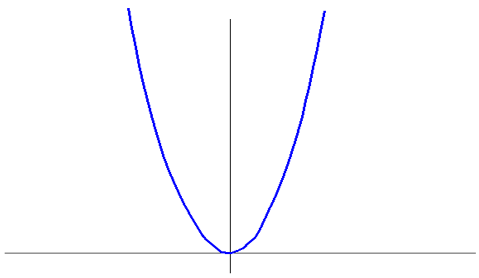
Resolución:

Si es creciente $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 \leq x_2^2$

que ocurre para $x > 0$.

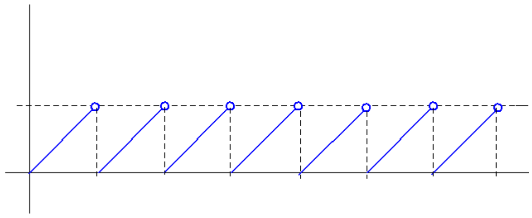
Si es decreciente $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 \geq x_2^2$

que ocurre para $x < 0$.



2.- Dada la función y = Dec(x) halla los extremos superior e inferior. ¿Tiene máximo y mínimo absoluto?

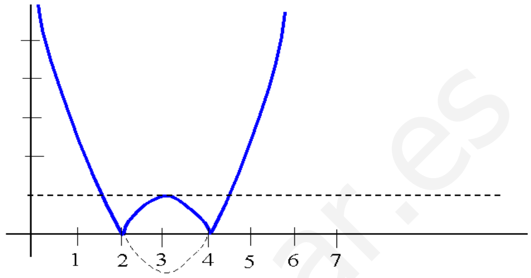
Resolución:
Tal como se ve en la figura el extremo inferior es 0 y el extremo superior es 1. No se alcanza el máximo puesto que si se alcanzara lo haría en los valores enteros y en estos vale 0. Sí se alcanza el mínimo en dichos valores enteros.



3.- Dada la función y = $\left|x^2 - 6x + 8\right|$ estudia su acotación.

Resolución:
Está acotada inferiormente con extremo inferior 0 que alcanza en x = 2 y x = 4, dicho valor es un mínimo absoluto.

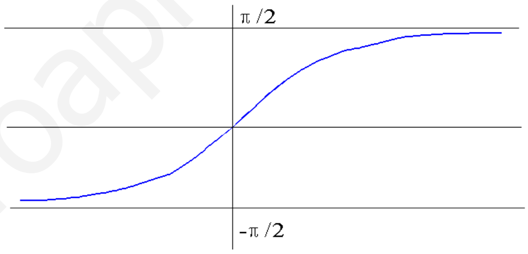
No está acotada superiormente, alcanza un máximo relativo en x = 3 de valor 1.



4.- Dada la función y = arc tg x halla los extremos superior e inferior. ¿Tiene máximo y mínimo absoluto?

Resolución:
Está acotada superior e inferiormente, es decir está acotada.
Tiene extremo superior e inferior de valores $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$, respectivamente.

No se alcanzan los valores máximo ni mínimo para ningún valor de $\mathbb{R}$.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dada la función y = arc ctg x halla los extremos superior e inferior. ¿Tiene máximo y mínimo absoluto?
Solución: Está acotada. Extremo superior e inferior. No se alcanzan máximo ni mínimo

2.- Dada la función y = $|x|$ halla los extremos superior e inferior. ¿Tiene máximo y mínimo absoluto?
Solución: Acotada inferiormente con mínimo absoluto en x = 0. No acotada superiormente, luego no posee máximo absoluto.

3.- ¿Puede una función tener extremo superior sin estar acotada superiormente?, ¿y tener extremo inferior sin estar acotada inferiormente?, ¿y tener extremo inferior sin estar acotada superiormente?, ¿y tener extremo superior sin estar acotada inferiormente?

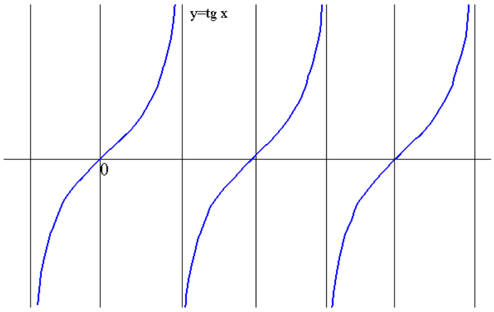
4.- ¿Qué diferencia existe entre extremos superior y máximo absoluto de una función?. Pon un ejemplo de cada. ¿Pueden coincidir?
Solución: Si pueden coincidir.

5.- ¿Qué diferencia existe entre extremo inferior y mínimo absoluto de una función?. Pon un ejemplo de cada. ¿Pueden coincidir?
Solución: Si pueden coincidir.

1.7.- FUNCIONES PERIÓDICAS

Una función se dice periódica de período T si se cumple $f(x) = f(x + T)\ \forall x \in D(f)$, luego:

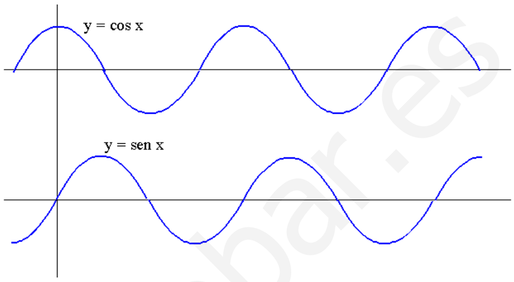
$f(x + kT) = f(x),\ \forall x \in D(f)$ y $\forall k \in \mathbb{Z}$



Los ejemplos mas simples de funciones periódicas son las funciones trigonométricas, entre las que consideramos:

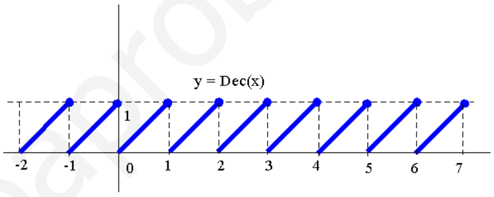
- y = sen x con período 2π
- y = cos x con período 2π
- y = tg x con período π
- y = ctg x con período π

Cuyas gráficas (en el caso de seno, coseno y tangente) se presentan en las figuras adjuntas.



Otro ejemplo conocido es la función parte decimal
y = x - E(x).

Su período es 1, tal como se observa en la figura adjunta.



EJEMPLOS

1.- Determina el período de las funciones periódicas:
a) y = sen(2x),
b) y = $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

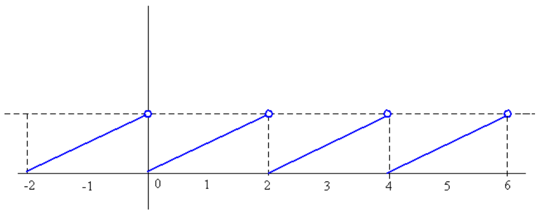
Resolución:
a) El período es T = π radianes ya que: sen(2x) = sen[2(x + π)]. O bien, comparando, al ser la nueva variable igual a la antigua por 2 el período es el mismo dividido por 2

b) El período es T = 4π radianes ya que: $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x+4\pi}{2}\right)$

O bien, comparando, al ser la nueva variable igual a la antigua dividido por 2 el período es el mismo dividido por 1/2 (multiplicado por 2)

2.- Dibuja la gráfica de una función periódica de período 2 y cuyos valores estén comprendidos entre -1 y 1.

Resolución:
Hay muchas funciones que cumplen estas condiciones. Una de ellas es la de la figura, con expresión analítica:
$\frac{x}{2} - E\left(\frac{x}{2}\right)$

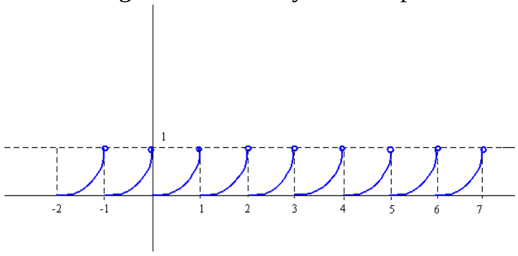


EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dibuja una función periódica de período 3. ¿Tiene límite esta función cuando x tiende a $+\infty$? Justifica tu respuesta.

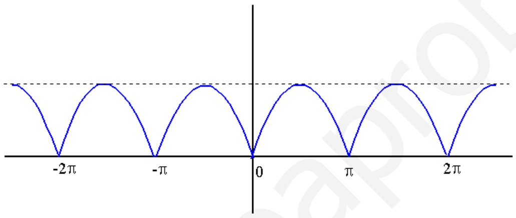
2.- Dibuja una función periódica de período 2.

3.- Estudia si es periódica la siguiente función y halla su período.



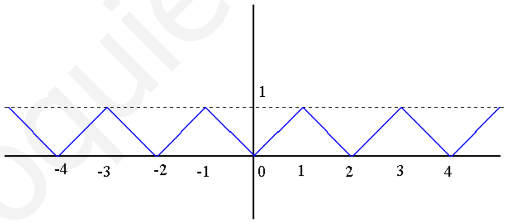
Solución: Periódica de periodo 1.

4.- Estudia si es periódica la siguiente función y halla su período.



Solución: Periódica de período π.

5.- Estudia si es periódica la siguiente función y halla su período.



Solución: Periódica de periodo 2

6.- Estudia si son periódicas las siguientes funciones y halla su período:

a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, b) $y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$

Solución: a) Periódica de periodo 2π. b) Periódica de período 8π.

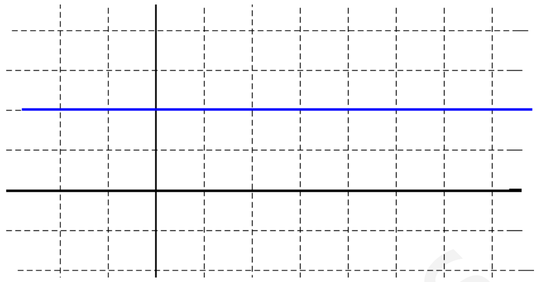
7.- Estudia si son periódicas las siguientes funciones y halla su período:
a) $y = (x - E(x))^2$
b) $y = [x - E(x)](-1)^{E(x)}$
Solución: a) Periódica de periodo 1. b) Periódica de período 2.

8.- Representa las siguientes funciones y di si son periódicas, hallando su período:
a) $y = 1 - \cos x$
b) $y = \operatorname{sen}^2 x$
c) $y = 2(x - E(x))$
d) $y = 2x - E(2x)$
Solución:
a) Periódica de periodo 2π. b) Periódica de período 2π.
c) Periódica de periodo 1. d) Periódica de período 1/2.

1.8.- FUNCIONES CONOCIDAS

1.- Funciones constantes

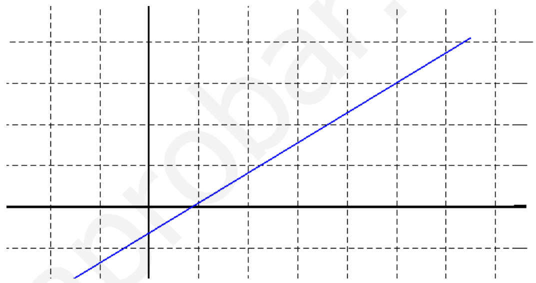
Son funciones polinómicas de grado cero.



- Su expresión analítica es $y = k$.
- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su recorrido es $\{k\}$.
- Se representan mediante rectas paralelas al eje de abscisas.
- Su gráfica es la de la figura adjunta.

2.- Funciones lineales

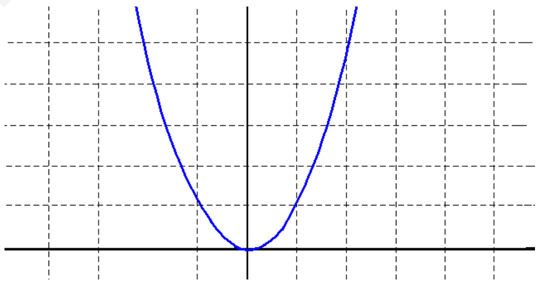
Son funciones polinómicas de grado uno.



- Su expresión analítica es $y = ax+b$.
- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su recorrido es $\mathbb{R}$.
- Se representan mediante rectas no paralelas al eje de abscisas
- Su gráfica es la de la figura adjunta.

3.- Funciones cuadráticas.

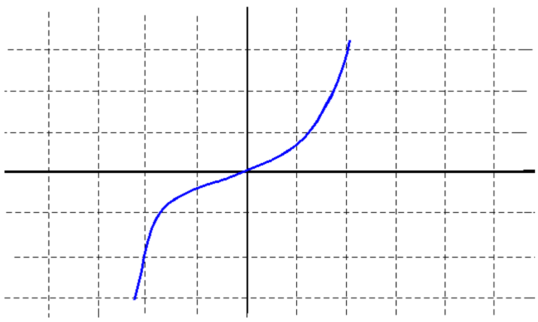
Son funciones polinómicas de grado dos.



- Su expresión analítica es $y=ax^2+bx+c$.
- Su vértice está en el punto de abscisa $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su recorrido es variable.
- Se representan mediante parábolas convexas o cóncavas según el valor de a
- Su gráfica es una parábola como la de la figura adjunta.

4.- Funciones polinómicas

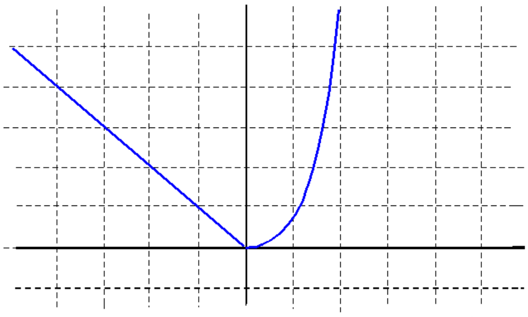
Son funciones polinómicas aquellas cuya imagen es el valor numérico de un polinomio P(x).



- Su expresión analítica es $y = P(x)$.
- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su recorrido es $\mathbb{R}$ sin son impares u otro si son pares.
- Su representación es diversa
- Un ejemplo es $y = x^3$, cuyo dominio y recorrido son $\mathbb{R}$
- Su gráfica es la de la figura adjunta.

5.- Funciones definidas a trozos

Son funciones que se definen mediante varias leyes o fórmulas aplicadas a las diferentes partes de su dominio.



Como ejemplo tomamos:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

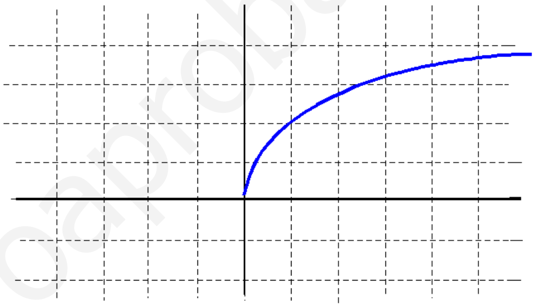
Su dominio es $\mathbb{R}$.

Su recorrido $\mathbb{R}^+$

Su gráfica es la de la figura adjunta.

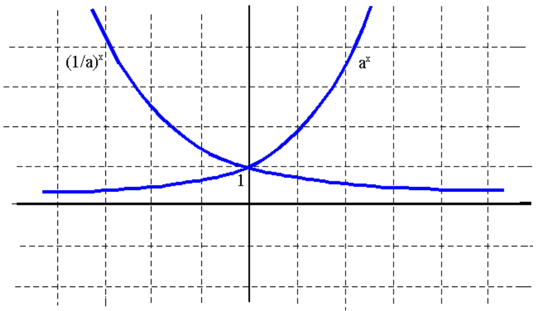
6.- Funciones radicales

- Su expresión analítica es $y = \sqrt{f(x)}$.
- Su dominio es el que hace positivo o nulo el radicando.
- Su recorrido es variable.
- El ejemplo más sencillo es $\sqrt{x}$, cuya representación es una parábola cuyo eje de simetría es el eje de abscisas. Su dominio es $\mathbb{R}^+$
- Su gráfica es la de la figura adjunta.



7.- Funciones exponenciales.

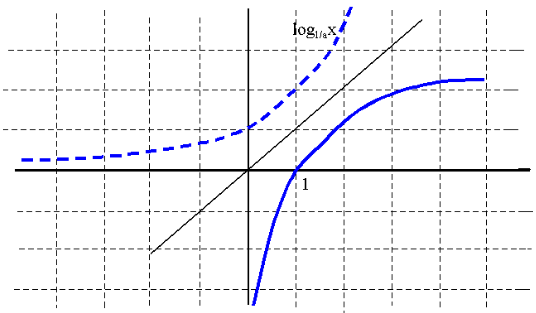
Son funciones siempre positivas. Son crecientes si la base a es mayor que 1 y decreciente en caso contrario.



- Su expresión analítica es y = P(x).
- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su recorrido es $\mathbb{R}^+$.
- Su representación es diversa
- Su gráfica es la de la figura adjunta.

8.- Funciones logarítmicas.

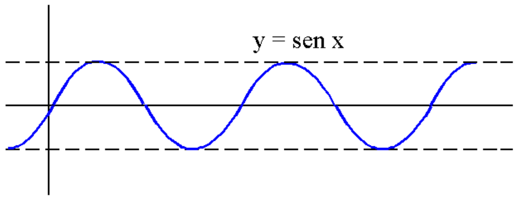
Son funciones inversas de las exponenciales, y simétricas de ellas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Son crecientes (a > 1) o decrecientes (a < 1) y definidas para los valores positivos.



- Su dominio es $\mathbb{R}^+$
- Su recorrido es $\mathbb{R}$
- Su representación es diversa
- Su gráfica es la de la figura adjunta.

9.- Función seno.

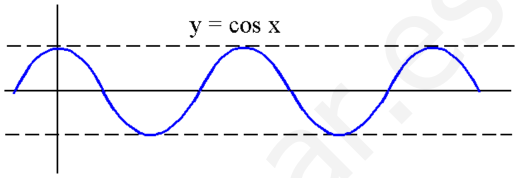
Es una función periódica de periodo 2π cuyo valor oscila entre -1 y 1.



- Su dominio es $\mathbb{R}$,.
- Su recorrido es $[-1,1]$
- Su simetría es impar.
- Su gráfica es la de la figura adjunta.

10.- Función coseno.

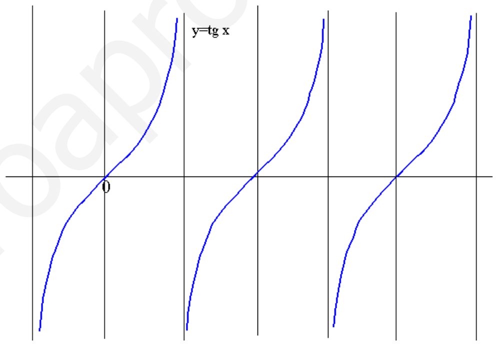
Es una función periódica de periodo 2π cuyo valor oscila entre -1 y 1.



- Su dominio es $\mathbb{R}$,.
- Su recorrido es $[-1,1]$
- Su simetría es par.
- Su gráfica es la de la figura adjunta.

11.-Función tangente.

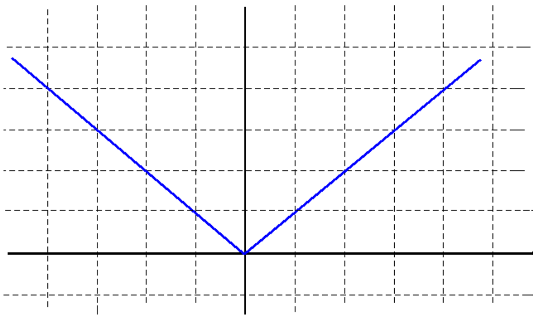
Es una función periódica, de periodo π. cuyo valor oscila entre $-\infty$ y ∞.



- Su dominio es $\mathbb{R}$,-$\{x=(2k+1)\pi/2\}$.
- Su recorrido es $\mathbb{R}$,
- Su simetría es impar.
- Su gráfica es la de la figura adjunta.

12.- Función valor absoluto: $y = |x|$

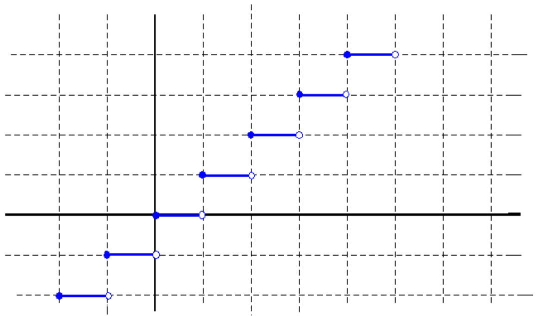
Es una función definida a trozos.



- Su dominio es $\mathbb{R}$.
- Su recorrido es $\mathbb{R}^+$
- Su simetría es par.
- Su representación son dos rectas, $y = x$, para los valores positivos e $y = -x$ para los valores negativos del dominio.
- Su gráfica es la de la figura adjunta.

13.- Función parte entera: $y = E(x)$

Es una función escalonada que asigna a $x \in \mathbb{R}$ el entero más próximo por defecto. En los enteros existe un salto o discontinuidad.

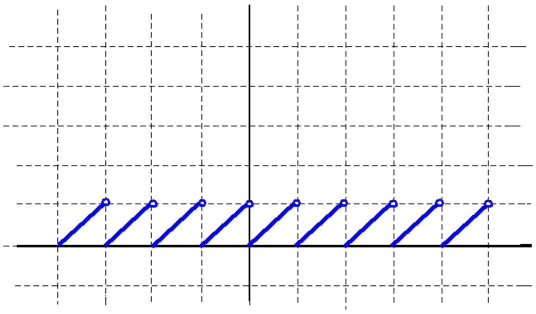


- Su dominio es todo $\mathbb{R}$.
- Su recorrido es $\mathbb{Z}$ (números enteros)
- Su gráfica es la de la figura adjunta.

14.-Función parte decimal: y = Dec(x).

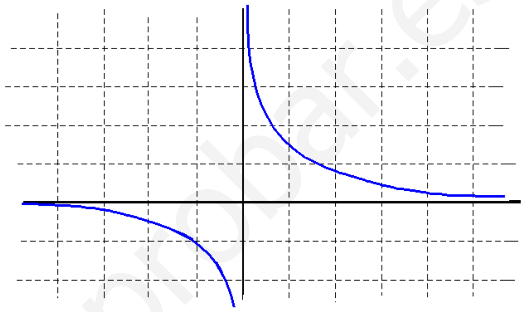
Es la función y = x - E(x), que asocia a cada número real su valor menos la parte entera. En todos los números enteros del dominio existe una discontinuidad.

- Es periódica y oscila entre 0 y 1.
- Su dominio es ℝ.
- Su recorrido es [0,1)
- Su gráfica es la de la figura adjunta.



15.- Función de proporcionalidad inversa: $y = \frac{1}{x}$

- Su dominio es ℝ -{0} ya que en x = 0 se anula el denominador.
- Su recorrido es ℝ -{0}
- Su representación es una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas y es siempre decreciente en su dominio.
- Su gráfica es la de la figura adjunta.



EJEMPLOS

1.- Calcula el dominio de la función f(x) = $e^{\sqrt{x}} - 2$

Resolución:
Como la función es la suma de una exponencial y una constante, para poder calcular f(x), es necesario que exista $\sqrt{x}$, es decir que el radicando sea mayor ó igual que cero:
D(f) = { x∈ℝ / x ≥ 0} = [0, ∞)

2.- Calcula el dominio de la función f(x) = $e^{\sqrt{x-5}} - 5$.

Resolución:
Como f es una función exponencial de base e, su dominio será el del exponente, y como éste es una función irracional de índice dos, el dominio será el conjunto de valores de x que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero, es decir:
D(f) = {x∈ℝ /x-5≥0} = {x∈ℝ /x≥5} = [5, +∞)

3.- Dada la función f(x) = $\frac{e^{-x}}{(x+1)^2}$ estudia el dominio de definición

Resolución:
Como es un cociente de funciones su dominio será la intersección de ambos dominios excluyendo los valores que anulen el denominador.
El numerador es una función exponencial de base e, su dominio será todo ℝ.
El denominador es un polinomio su dominio será todo ℝ, como se anula en x =–1, queda: D(f) = ℝ -{-1} = (-∞, -1)∪(-1,+ ∞)

4.- Halla el dominio y recorrido de la función f(x) = $L\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)$

Resolución:

- Dominio de definición: es el subconjunto en el que se define la función, como la función es un logaritmo ha de ser positiva la expresión $\dfrac{x^2}{x^2-1}$.
  Como el numerador es siempre positivo, la fracción será positiva cuando lo sea el denominador $x^2-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ ó $x < -1$, es decir:

  Dominio: $(-\infty,-1)\cup(1, \infty)$

- Recorrido: es el subconjunto de valores que toma la función. La expresión $\dfrac{x^2}{x^2-1}$ es siempre mayor que 1 luego $L\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)>0$, Recorrido: $(0, \infty)$

5.- Representa la función f(x) = $|2x-1|$

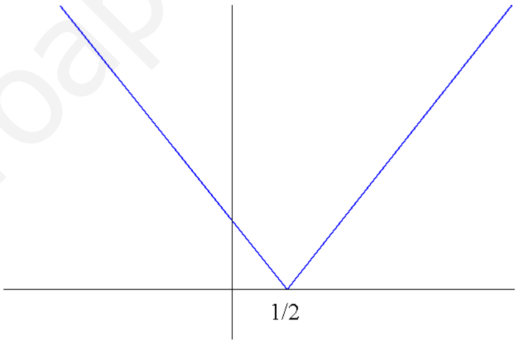
Resolución:
Escribimos la función como función definida a trozos. Se anula en:

$2x-1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Como la función pasa de negativa a positiva en $x = \dfrac{1}{2}$ queda:

$$|2x-1| = \begin{cases} -2x+1 \text{ si } x \le \dfrac{1}{2} \\ 2x-1 \text{ si } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

siendo su representación la de la figura.



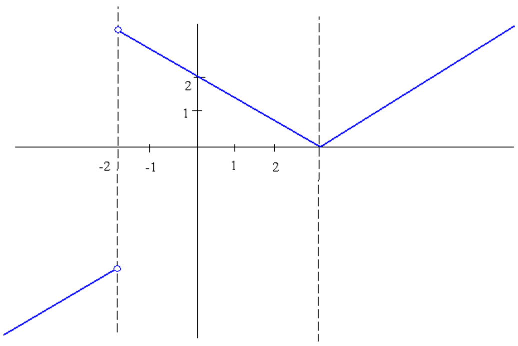
6.- Sea *f* la función definida para cada x∈ℝ, x ≠ -2, por f(x)=$\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$.

Representa gráficamente la función f.

Resolución:
Expresamos la función f, a partir de la definición de la función valor absoluto, como función definida a trozos, tendremos:

$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 \text{ si } x<-2 \\ 4-x^2 \text{ si } -2\le x\le 2 \\ x^2-4 \text{ si } x>2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} \text{ si } x<-2 \\ \dfrac{4-x^2}{x+2} \text{ si } -2<x\le 2 \\ \dfrac{x^2-4}{x+2} \text{ si } x>2 \end{cases}$$

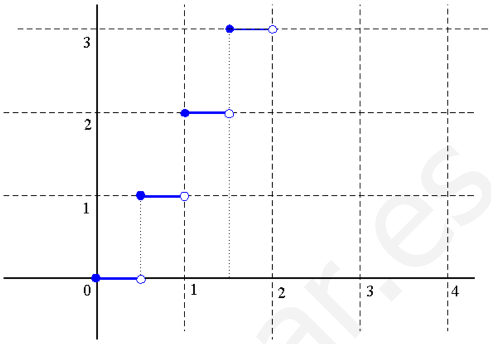


Quedando finalmente

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ si } x < -2 \\ 2 - x \text{ si } -2 < x \leq 2 \\ x - 2 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

La representación gráfica es la de la figura adjunta

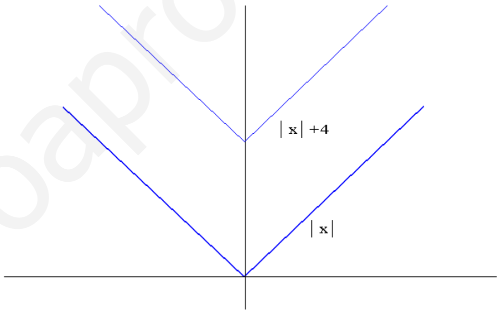
7.- Representa la función y = E(2x).



Resolución:
Es una función escalonada, similar a $y = E(x)$ con la salvedad de que los valores de salto son los enteros y los enteros divididos por 2.

Por lo demás el salto es de valor unidad. Su dominio es todo $\mathbb{R}$. Su recorrido es $\mathbb{Z}$ (números enteros) y su gráfica es la de la figura adjunta.

8.- Representa y = f(| x |) siendo f(x) = x + 4.



Resolución:
La función pedida es:
$f(|x|) = |x| + 4$.

Tal como se ve en la figura su gráfica será similar a la de f(x) = $|x|$, desplazada cuatro unidades hacia arriba.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla el dominio de definición de $f(x) = \ln(x^2 - 4)$
Solución: $(-\infty,-2)\cup(2, \infty)$

2.- Halla el dominio de definición y el recorrido de $f(x) = e^x$
Solución: El dominio es $\mathbb{R}$ *y el recorrido es* $\mathbb{R}^+$

3.- Halla el valor de *a* para que $f(x) = \dfrac{e^{ax}}{\ln(x^2 - ax)}$ tenga $\mathbb{R}$ como dominio de definición.
Solución: No hay ningún valor de a que cumpla las condiciones

4.- Representa $y = |x-1| - |x-3| + |x|$

5.- Representa la parábola $y = 3x^2 - 2x + 3$

6.- Representa la función $y = x^2 - 2x + 5$ hallando el eje y el vértices. A continuación representa otras similares a la primera con vértices en los puntos (2, 0), (2, 4) y (1 ,0) respectivamente.

7.- Representa gráficamente la función $y = \dfrac{4}{x}$

1.9.- ACTIVIDADES DEL TEMA

1.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$, determina su dominio.
Solución: $\mathbb{R}$-{2}.

2.- Halla el dominio de definición de la función $y = L\left(\dfrac{x+2}{x^3-1}\right)$

Solución: $(\infty,-2)\cup(1, \infty)$

3.- Halla el dominio de definición de la función $y = L\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$

Solución: $(-\infty,-1)\cup(0, \infty)$

4.- Halla el dominio de definición de la función $y = L\,|\,\text{sen}\,x\,|$
Solución: $\mathbb{R} - \{k\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\}$

5.- Halla el dominio de definición de la función $y = 2^{\frac{x+2}{x^2}}$
Solución: $\mathbb{R} - \{0\}$

6.- Halla el dominio de definición de la función $y = e^{\frac{x-1}{x}}$
Solución: $\mathbb{R} - \{0\}$

7.- Halla el dominio de definición de la función y = L(x-3)
Solución: $(3, \infty)$

8.- Halla el dominio de definición de la función $y = L\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)$

Solución: $(-1,1)\cup(1, \infty)$

9.- Halla el dominio de definición de la función $f(x) = \cos(x+\pi)$
Solución: $\mathbb{R}$

10.- Halla el dominio de definición de la función $f(x) = \text{tg}(x+\pi)$
Solución: $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\}$

11.- Halla el dominio de definición de la función $f(x) = 2\cos(x^2-1)$
Solución: $\mathbb{R}$

12.- Halla el dominio de definición de la función $f(x) = L(x) - L(x^2-1)$
Solución: $(1,\infty)$

13.- Halla el dominio de definición de la función $f(x) = e^x.(x-2)$
Solución: $\mathbb{R}$

14.- Dada la función y = sen x, represéntala y a partir de ella la de y = f(2x) e y = f(x/2)

15.- Dada la función $y=x^2$, represéntala y a partir de ella la de y = f(2x) e y = f(x/2)

16.- Representa $y = \cos(x+\pi)$, $y = \cos(x-\pi)$ a partir de $y = \cos(x)$.

17.- Representa $y = \cos(2x)$, $y = \cos(x/2)$ a partir de $y = \cos(x)$.

18.- Representa $y=1/f(x)$ siendo $f(x) = 1/x$.

19.- Representa $y=1/f(x)$ siendo $f(x) = e^x$.

20.- Representa $y = |f(x)|$ siendo $f(x) = - x + 4$.

21.- Representa $y = f(1/x)$ siendo $f(x) = \text{sen}(x)$.

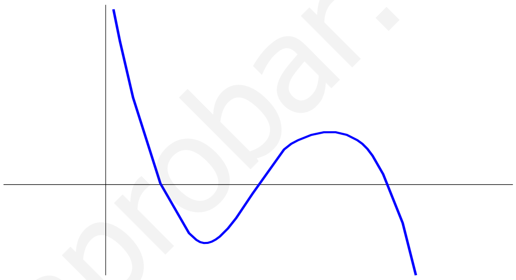
22.- Dada la función $y = e^x$, represéntala y a partir de ella la de $y = f(3x)$ e $y = f(x+2)$

23.- Sea $f(x) = 2^x$, representa $f(x+1)$, $f(x-3)$, $f(2x)$ y $2f(x)$.

24.- Sea $f(x) = \sqrt{x}$, representa $f(x+1)$, $f(x-3)$, $f(2x)$ y $2f(x)$.

25.- Sea $f(x) = x+5$, representa $f(x+1)$, $f(x-3)$, $f(2x)$ y $2f(x)$.

26.- Este esquema representa la gráfica de la función $y= f(x)$.
a) Haz otro esquema que represente la gráfica de la función $y = -f(x)$.
b) Haz otro esquema que represente conjuntamente las gráficas de $y = f(x)$ e $y=2f(x)$.
Explica los fundamentos para la construcción de estos esquemas.



27.- A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, representa aproximadamente las gráficas de las siguientes funciones: $f_1(x) =(x-2)^2$, $f_2(x) = x^2+2$, $f_3(x) = (x-2)^2+2$. Argumenta brevemente el método que se ha utilizado.

28.- A partir de la gráfica de la función $f(x) = e^x$, obtén razonadamente las gráficas de las siguientes funciones: $f_1(x) = e^{x+2}$, $f_2(x) = e^x-2$, $f_3(x) = Ln(x)$, $f_4(x) = |Ln(x)|$.

29.- A partir de la gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$, obtener razonadamente las gráficas de las funciones: $f_1(x)=e^x$, $f_2(x) = |Ln(x)|$, $f_3(x) = Ln(x^2)$, $f_4(x) = L|x|$

30.- Representa la gráfica de las siguientes funciones ayudándote de la gráfica de $f(x)=x^3$. $f_1(x)=x^3+1$, $f_2(x)=(x+1)^3$, $f_3(x)=2x^3$, $f_4(x)=-x^3$.

31.- A partir de la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x)$, representa aproximadamente las gráficas de las siguientes funciones: $f_1(x) = \text{sen}(2x)$, $f_2(x) = \text{sen}(x/2)$, $f_3(x) = \text{sen}(x)-2$, $f_4(x) = 3\ \text{sen}(x)$. Argumenta brevemente el método que se ha utilizado.

32.- A partir de la gráfica de la función $y = \cos x$, dibujar las gráficas de $f_1(x) = \cos(x-\pi/2)$, $f_2(x) = 2\cos(x)$, $f_3(x) = \cos(x)-1$, $f_4(x) = 1/2\cos x$.

33.- Dada la gráfica de una función $y = f(x)$ dibuja razonadamente las gráficas de $y = f(x-3)$, $y = f(x+3)$, $y = f(x)+3$, $y = f(x)-3$.

34.- Conocida la gráfica de $y=x^3$, dibuja las de $f_1(x)= x^3+3$, $f_2(x)= (x-3)^3$, $f_3(x)= -x^3$, $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$.

35.- ¿Existen extremos relativos en la función $y = [x - E(x)]^2$?
Solución: No existen máximos pero si infinitos mínimos relativos.

36.- Cada paso de una llamada telefónica cuesta 5 pta. y cada uno de ellos dura 1 minuto. Dibuja la gráfica que indica el coste de una llamada en función del tiempo. Señala cual es la variable independiente y cual la variable dependiente. ¿Cuál es el dominio?
Solución: variable independiente: tiempo, variable dependiente: coste, dominio: $[0, \infty)$.

37.- Representa y = $|x+1|$, y = $|x-1|$, y = $|x|+1$, y = $|x|-1$, a partir de y = $|x|$.

38.- Dibuja las gráficas de la funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2+1 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) y = $|Lx|$

39.- Representa gráficamente la función

$y = \dfrac{4}{x-3} + 2$

40.- Representa gráficamente la función

$y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

41.- Representa gráficamente la función

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -3 < x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 3x & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$

42.- Representa gráficamente la función y = 2^{-x}.

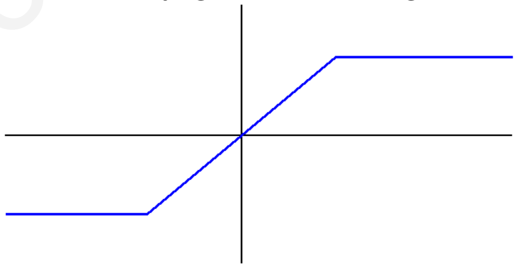
43- Dada la función s(x) = $\sqrt[3]{x^2-3}$, calcula las funciones f, g y h tales que s(x)=(h$\circ$g$\circ$f)(x)

Solución: $f(x) = x^2$, $g(x) = x-3$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$

44.- Calcula la función inversa de $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 2$

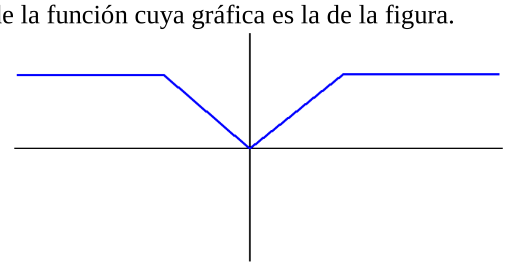
Solución: $f^{-1}(x) = [L(x+2)]^2$

45.- Estudia la simetría de la función cuya gráfica es la de la figura.



Solución: Impar.

46.- Estudia la simetría de la función cuya gráfica es la de la figura.



Solución: Par.

TEMA 2

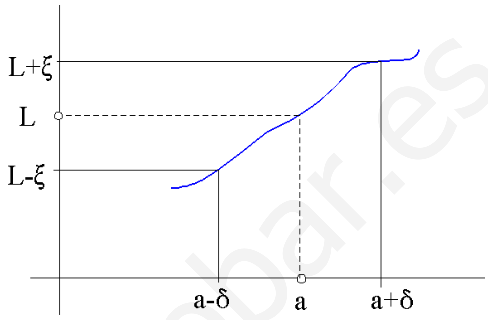
2.- LÍMITES DE FUNCIONES

2.1.- LIMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

1.- Definición de límite de una función en un punto.

Una función $y = f(x)$ tiene límite L para $x \to a$, si para todo número real $\varepsilon > 0$, existe otro número real $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

En tal caso se dice:
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
El límite, caso de existir, es único



2.- Concepto de límite lateral.

- Una función $y = f(x)$ tiene límite L para $x \to a$ por la izquierda, si para todo número real $\varepsilon > 0$, existe otro número real $\delta > 0$, tal que si
  $0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

  En tal caso se cumple
  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

- Una función $y = f(x)$ tiene límite L para $x \to a$ por la derecha, si para todo número real $\varepsilon > 0$, existe otro número real $\delta > 0$, tal que si
  $0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

  En tal caso se dice:
  $$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

- La condición necesaria y suficiente para que una función tenga límite en un punto es que existan los límites laterales a derecha e izquierda, y además sean iguales:
  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$

3.- Operaciones con límites.

- Suma: $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
- Diferencia: $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
- Producto: $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
- Cociente: $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, con $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

EJEMPLOS

1.- Sea la función

f(x) = $\begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{si\ \ x < 3} \\ \mathbf{x - 2} & \mathbf{si\ \ x > 3} \end{cases}$

¿A qué valor se aproxima la función cuando *x* se aproxima a 3?

Resolución:

Para hallar el valor al que se aproxima f cuando *x* se aproxima a 3, hallamos los límites laterales tanto por la izquierda como por la derecha:

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 2) = 3\text{-}2 = 1$

la función se aproxima al valor 1. Por lo tanto,

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$

El límite de la función en el punto 3 es 1 y, sin embargo, la función ni siquiera está definida en él.

2.- Sea *f* la función definida para cada x∈ℝ, x≠-2, por

f(x) = $\dfrac{\left|\mathbf{x^2 - 4}\right|}{\mathbf{x + 2}}$ **.**

a) Determina si existen y, en ese caso, el valor de los límites

$\lim\limits_{x \to (-2)} f(x)$ ***y*** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

b) Representa gráficamente la función f.

Resolución:

a) Expresamos la función y = f(x), a partir de la definición de la función valor absoluto, como función definida a trozos, tendremos:

$$\left| x^2 - 4 \right| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 \le x \le -2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Luego:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } x < -2 \\[2ex] \dfrac{4 - x^2}{x + 2} & \text{si } -2 < x \le 2 \\[2ex] \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < -2 \\ 2 - x & \text{si } -2 < x \le 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y calculamos los límites laterales tanto en x=-2 como en x=2, es decir:

$\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^-} (x - 2) = -2 - 2 = -4$

$\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^+} (2 - x) = 2 - (-2) = 4$

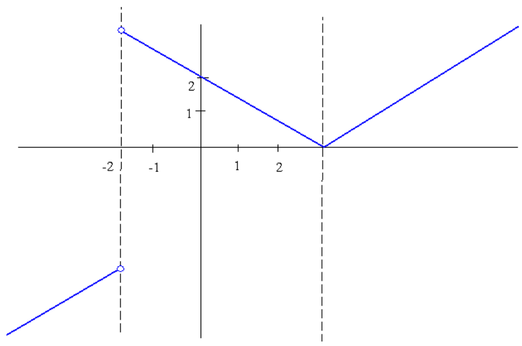
por lo tanto *no existe el límite en x=-2.*

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2 - x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2) = 0$

luego existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

b) La representación gráfica es la de la figura adjunta



3.- Prueba que existe $\lim\limits_{x \to 1} x^2$, siendo su valor 1.

Resolución:
Debemos probar que:
$\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /\ 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$

Como $|x^2 - 1| = |(x-1).(x+1)| = |x-1|.|x+1| < \varepsilon$

Si tomamos x= (1+h) con $|h| < 1$, tenemos que:
$|x+1| = |1+h+1| = |2+h| \le 3$

Es decir:
$|x-1|.|x+1| \le 3|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

Luego basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ para que se verifique la definición de límite.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Prueba que existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, para f(x) = 2x+1, siendo su valor 3.

2.- Prueba que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

3.- Prueba que una función que tiene límite para $x \to a$, está acotada en un entorno reducido de a.

4.- Si una función toma siempre valores positivos y otra toma solo valores negativos, ¿pueden tener el mismo límite en un punto?. Si es así, di cual es el límite.
Solución: Sí, 0.

5.- Dibuja la gráfica de una función cuyo límite en x=0 es 1 y que toma sólo valores mayores que 1. Si no es posible explica porqué.

6.- Calcula $\lim\limits_{x \to 3} (f+g)(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} (f-g)(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} (f.g)(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ siendo las funciones $f(x) = x^2+2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución: $\lim\limits_{x \to 3} (f+g)(x) = \dfrac{34}{3}$, $\lim\limits_{x \to 3} (f-g)(x) = \dfrac{32}{3}$, $\lim\limits_{x \to 3} (f.g)(x) = \dfrac{11}{3}$, $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 33$.

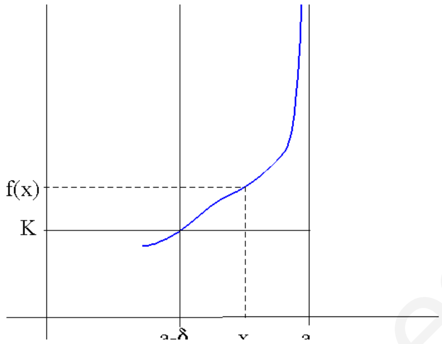
2.2.- LÍMITES INFINITOS EN UN PUNTO.

1.- Definición de límites infinitos en un punto.

- Una función y = f(x) tiene límite infinito para $x \to a$ por la izquierda, si para todo número real K > 0, existe otro número real $\delta > 0$, tal que si
  $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > K$

  En tal caso se cumple
  $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

  De manera similar se define
  $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

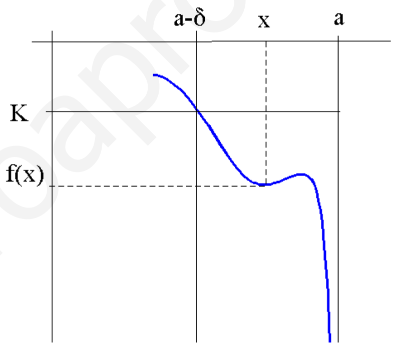


Si coinciden ambos límites laterales decimos que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

- Una función y = f(x) tiene límite infinito para $x \to a$ por la izquierda, si para todo número real K > 0, existe otro número real $\delta > 0$, tal que si
  $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < -K$

  En tal caso se cumple
  $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

  De manera similar se define
  $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



Si coinciden ambos límites laterales decimos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

2.- Asíntota vertical

Cuando existe alguno de los límites: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ decimos que existe una asíntota vertical, la recta x = a.

EJEMPLOS

1.- Halla los límites laterales cuando x tiende a 1 de la función f definida para $x \neq 1$ por

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 + x - 2}$$

¿Existe el límite en dicho punto?

Resolución:
Hallamos el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1-h-1} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-1}{h} = -\infty$$

Hallamos el límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+h-1} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} = +\infty$$

Como los límites laterales son diferentes y no finitos la función no tiene límite en x = 1.

2.- Calcula $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2}$

Resolución:
Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{(3-h-3)^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{(-h)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{(3+h-3)^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{(h)^2} = +\infty$$

Como ambos límites laterales coinciden existe el limite no finito:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcula los límites siguientes:

1.- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$

Solución: No tiene, $+\infty$ a la derecha, $-\infty$ a la izquierda.

2.- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$

Solución: No tiene, $+\infty$ a la derecha, $-\infty$ a la izquierda.

3.- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2}$

Solución: $+\infty$

4.- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^2-1}$

Solución: No tiene, $+\infty$ a la derecha, $-\infty$ a la izquierda.

5.- ¿Tiene limite la función

$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

en x = 1?

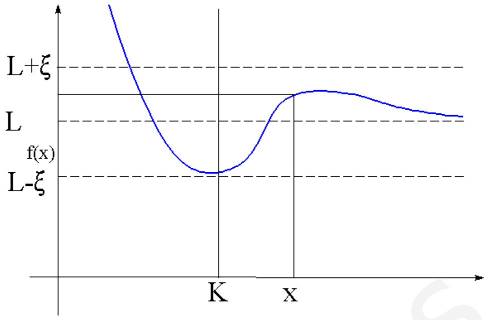
Solución: No tiene ya que son distintos los límites laterales

2.3.- LÍMITES EN EL INFINITO.

1.- Definición de límite finito en el infinito

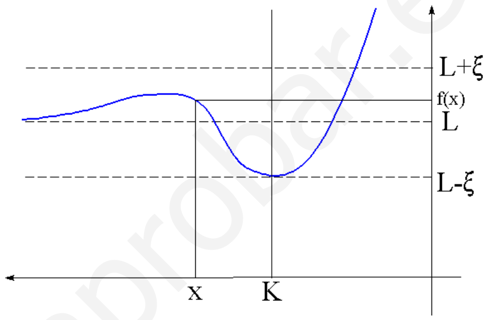
- Una función y = f(x) tiene límite L para $x \to \infty$, si para todo número real $\varepsilon > 0$, existe otro número real $K > 0$, tal que si $x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

  En tal caso se dice que:
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$



- Una función f(x) tiene límite L para $x \to -\infty$, si para todo número real $\varepsilon > 0$, existe otro número real $K > 0$, tal que si $x < -K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

  En tal caso se dice que :
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$



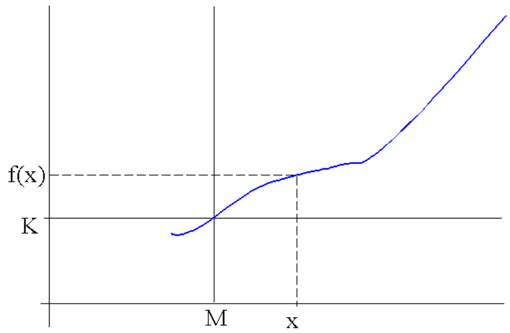
- En ambos casos la recta y= L es una asíntota horizontal de la función.

2.- Definición de límites infinitos en el infinito.

- Una función y = f(x) tiene límite $+\infty$ para $x \to \infty$, si para todo número real $K > 0$, existe otro número real $M > 0$, tal que si

  $x > M \Rightarrow f(x) > K$

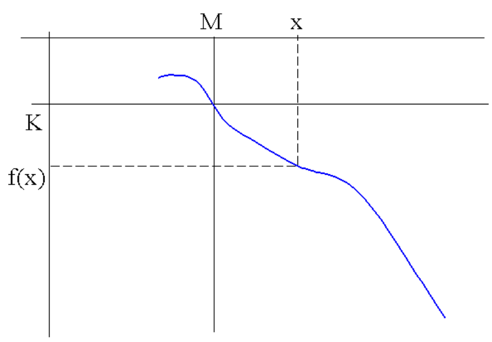
  En tal caso se dice que:
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



- Una función y = f(x) tiene límite $-\infty$ para $x \to \infty$, si para todo número real $K > 0$, existe otro número real $M > 0$, tal que si

  $x > M \Rightarrow f(x) < -K$

  En tal caso se dice que:
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

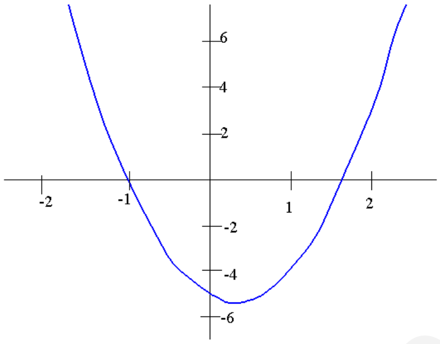


- De modo similar se definen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

A veces se dice que la función presenta una rama parabólica.

EJEMPLOS

1.- Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} (3x^2 - 2x - 5)$



Resolución:
Como es una función polinómica debemos fijarnos en el coeficiente del monomio de mayor grado, como es positivo y tiende a $+\infty$, el límite es $+\infty$, basta observar la gráfica adjunta

$$\lim_{x \to \infty} (3x^2 - 2x - 5) = +\infty$$

2.- Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2 - 5}$

Resolución:
Como es el cociente de un número dividido por una función polinómica, dicho cociente se hará cada vez más pequeño, el límite es 0.

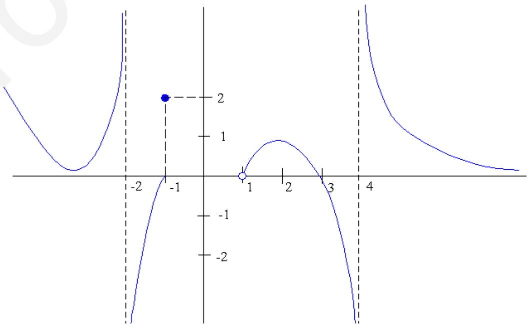
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - 5} = 0$$

3.- Una función y = f(x) tiene la gráfica siguiente, halla:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$



Resolución:
Tal como se ve en la figura:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

e) No existe ya que los límites laterales son distintos:

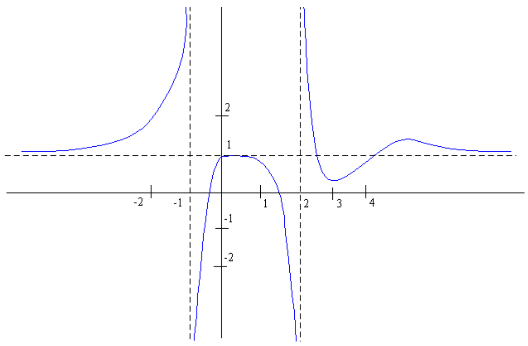
$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \infty$

4.- Una función y = f(x) tiene la gráfica siguiente, halla:

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$



Resolución:
Tal como se ve en la figura:

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

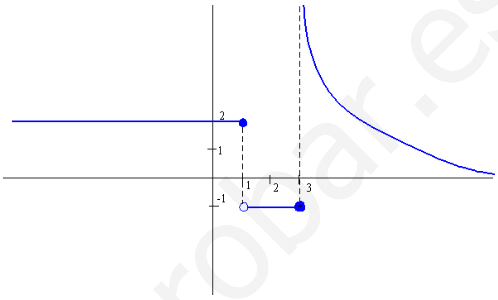
c) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

5.- Dada una función f cuya gráfica es:



a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

Resolución:

Tal como se ve en la figura:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1$

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -1$

d) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2}{1 - x^3}$

Solución: 0

2.- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2x - 7)$

Solución: $+\infty$

3.- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{1 - x^2}$

Solución: 0

4.- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2x - 4)$

Solución: $+\infty$

5.- $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x^3)$

Solución: $+\infty$

6.- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 7)$

Solución: $+\infty$

2.4.- CÁLCULO DE LÍMITES.

1.- Propiedades algebraicas del cálculo de límites

	$\lim [f(x) + g(x)]$	$\lim [f(x) - g(x)]$	$\lim [f(x) . g(x)]$	$\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$
$\lim f(x) = L$ $\lim g(x) = L'$	L+L'	L-L'	L.L'	L/L' si L'≠0 ∞ si L≠0, L'=0 (0/0) si L=0, L'=0
$\lim f(x) = \pm\infty$ $\lim g(x) = L'$	±∞	±∞	±∞(depende del signo de L')	±∞(depende del signo de L')
$\lim f(x) = L$ $\lim g(x) = \pm\infty$	± ∞	± ∞	± ∞ (depende del signo de L')	0
$\lim f(x) = \pm\infty$ $\lim g(x) = 0$	± ∞	± ∞	(± ∞.0)	± ∞
$\lim f(x) = 0$ $\lim g(x) = \pm\infty$	± ∞	± ∞	(0. ± ∞)	0
$\lim f(x) = \infty$ $\lim g(x) = \infty$	∞	(∞-∞)	∞	(∞/∞)
$\lim f(x) = -\infty$ $\lim g(x) = -\infty$	-∞	(∞-∞)	∞	(-∞/-∞)
$\lim f(x) = \infty$ $\lim g(x) = -\infty$	(∞-∞)	±∞	-∞	(∞/∞)
$\lim f(x) = -\infty$ $\lim g(x) = \infty$	(∞-∞)	-∞	-∞	(-∞/∞)

donde los valores comprendidos entre () indican indeterminaciones

2.- Indeterminaciones

Una indeterminación se produce cuando el límite no es posible hallarlo al aplicar las propiedades algebraicas de los límites y debemos resolverlo utilizando distintas técnicas. A continuación estudiamos los tipos de indeterminaciones.

- **Tipo** $\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)$

Se obtiene al dividir dos funciones cuyo valor tiende a cero en el punto.

Se resuelven:
- En el caso de funciones racionales desaparecen descomponiendo los polinomios que lo forman en factores y simplificando los factores comunes.
- En el caso de funciones irracionales se multiplica el numerador y denominador por la conjugada de la expresión en que aparece el radical.

- **Tipo** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Se obtiene al dividir dos funciones que tienden a infinito en el punto.

Se resuelven:

- En el caso de funciones racionales cuando $x \to \infty$, dividiendo numerador y denominador por el monomio de mayor grado:
  a) Si grado numerador > grado denominador, el resultado es ∞
  b) Si grado numerador > grado denominador, el resultado es 0
  c) Si grado numerador = grado denominador, el resultado es el cociente entre los coeficientes principales.

Es similar el caso de cocientes con radicales.

- **Tipo (∞-∞).**

Se obtiene al restar dos funciones, que tienden a infinito en el punto.

Se resuelven:
- En el caso de funciones racionales operando las expresiones.
- En el caso de funciones irracionales se multiplica el numerador y denominador por la conjugada de la expresión en que aparece el radical.

- **Tipo (1^{∞})**

Se obtiene al efectuar la potencia de dos funciones, una de las cuales tiende a uno y otra que tiende a infinito en el punto.

Se resuelve utilizando la fórmula

$$\lim_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to \infty} [f(x) - 1].g(x)}$$

- **Tipo (0. ∞).**

Se obtiene al efectuar al potencia de dos funciones, una de las cuales tiende a cero y otra que tiende a infinito en el punto.

Se resuelve:
operando ya que da lugar a indeterminaciones de las anteriores.

- **Tipo (∞^{0})**

Se obtiene al efectuar la potencia de dos funciones, una de las cuales tiende a cero y otra que tiende a infinito en el punto.

Se resuelve:
Tomando logaritmos para reducirlas a alguna de las indeterminaciones anteriores.

EJEMPLOS

1.- Calcula

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2}$$

Resolución:

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{\lim_{x \to 3} (x-3)^2} = \left(\frac{1}{0}\right)$$

Para calcular el límite se estudian los límites laterales de la función en $x_0 = 3$.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

Como los límites laterales coinciden

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$$

2.- Calcula

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$$

Resolución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\lim_{x \to 1} (x-1)} = \left(\frac{1}{0}\right)$$

Se estudian los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = +\infty$$

Como los dos límites laterales no coinciden, la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ no tiene límite cuando x tiende a 1.

3.- Calcula

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10}$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, lo resolvemos descomponiendo los polinomios en factores.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2+5)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x^2+5} = \frac{-4}{9}$$

4.- Calcula

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x+1}$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, siendo su límite:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

5.- Halla

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, que se resuelve multiplicando por la conjugada, y efectuando las operaciones aritméticas comunes.:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

6.- Calcula

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-5}{x-4}$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, En este caso, el grado del numerador, 2, es mayor que el grado del denominador, 1, por tanto el límite es ∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-5}{x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty$$

7.- Calcula

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5}{-x^2-4}$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. El grado del numerador es mayor que el grado del denominador, y los términos de mayor grado tienen signos distintos, por tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5}{-x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-1}=-\infty$$

8.- Calcula

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2-2x-5}{4x^2-4}$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. El grado del numerador es igual que el grado del denominador, por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2-2x-5}{4x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2}{4x^2} = -\frac{3}{4}$$

9.- Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x^3-4x+3}$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. El grado del numerador es menor que el grado del denominador, por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x^3-4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

10.- Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{4x^2}{x-1} - \frac{4x^2}{x+1}\right]$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo (∞-∞), siendo su límite:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2}{x-1} - \frac{4x^2}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+4x^2-4x^3+4x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2}{x^2-1} = 8$$

11.- Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-9}-x\right)$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo (∞-∞), que vamos a resolver multiplicando por la conjugada:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-9}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-9}-x).(\sqrt{x^2-9}+x)}{\sqrt{x^2-9}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x} = 0$$

12.- Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^x$$

Resolución:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4+5/x}{4+3/x}\right)^x = (1^\infty)$$

Es una indeterminación del tipo (1^∞). El límite será de la forma L = e^λ siendo $\lambda = \lim_{x\to\infty} [f(x)-1].g(x)$ Luego:

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3} - 1\right).x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+5-4x-3}{4x+3}\right).x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x+3} = \frac{1}{2}$$

es decir que

L = $e^{1/2} = \sqrt{e}$

13.- Calcular el valor de a para que $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2}$

Resolución:

Para hallar el valor de a efectuamos ambos límites, se igualan y se despeja en la ecuación resultante. Hallamos el primer límite:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4+5/x}{4+3/x}\right)^{x} = (1^{\infty})$$

El límite será de la forma e^{λ} siendo

$\lambda = \lim_{x\to\infty} [f(x)-1].g(x)$, llamando a este límite L_1 tenemos:

$$\lambda_1 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3} - 1\right).x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+5-4x-3}{4x+3}\right).x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x+3} = \frac{1}{2}$$

es decir que $L_1 = e^{1/2}$

- Hallamos el segundo límite:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4+1/x^2}{4+\pi/x^2}\right)^{ax^2} = (1^{\infty})$$

El límite será de la forma e^{λ} siendo $\lambda = \lim_{x\to\infty} [f(x)-1].g(x)$, llamando a este límite L_2 tenemos:

$$\lambda_2 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi} - 1\right).ax^2 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2+1-4x^2-\pi}{4x^2+\pi}\right).ax^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-\pi)ax^2}{4x^2+\pi} = \frac{a(1-\pi)}{4}$$

es decir que $L_2 = e^{\frac{a(1-\pi)}{4}}$

- Para obtener a basta igualar ambos límites: $e^{1/2} = e^{\frac{a(1-\pi)}{4}}$

como ambos términos de la ecuación son potencias de base e para que sean iguales tiene que serlo los exponentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{a(1-\pi)}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{(1-\pi)}$$

14.- Halla

$$\lim_{x\to 3} (x-2)^{\frac{x}{(x-3)^2}}$$

Resolución:

Es una indeterminación de la forma (1^{∞}) que resolvemos aplicando la fórmula

L = $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} [f(x)-1].g(x)}$

Los límites por la izquierda y la derecha son diferentes:

$$\lim_{x \to 3^-} (x-2)^{\frac{x}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 3^-} [(x-2)-1].\frac{x}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 3^-} (x-3).\frac{x}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x}{(x-3)}} = e^{-\infty} = 0$$

donde hemos utilizado la fórmula anterior y el hecho de que al tender el denominador a 3 por la izquierda es negativo y el numerador positivo.

$$\lim_{x \to 3^+} (x-2)^{\frac{x}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 3^+} [(x-2)-1].\frac{x}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 3^+} (x-3).\frac{x}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x}{(x-3)}} = e^{+\infty} = \infty$$

donde hemos utilizado la fórmula anterior y el hecho de que al tender el denominador a 3 por la izquierda es positivo y el numerador también.

15.- Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2 - 6x}{4x^2 - 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo (1^∞), siendo su límite:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2 - 6x}{4x^2 - 1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(\frac{4x^2-6x-4x^2+1}{4x^2-1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-6x+1}{4x^2-1}\right)\left(\frac{x^2+1}{x}\right)} = e^{-\frac{6}{4}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

16.- Halla

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+x}}.(x-1)$$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo ($0.\ \infty$), que se transforma en el tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+x}}.(x-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-2}{\sqrt{1+x}}$$

Dividiendo por el monomio de mayor grado (x), queda:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-2}{\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}} = \left(\frac{2}{0}\right) = +\infty$$

ya que el numerador y denominador son positivos.

17.- Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \left[x.L\left(\frac{2+x}{x}\right) \right]$$

Resolución

Es una indeterminación del tipo ($0.\ \infty$), que resolveremos transformándola en una del tipo $(1)^\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \left[x.L\left(\frac{2+x}{x}\right) \right] = \lim_{x\to\infty} \left[L\left(\frac{2+x}{x}\right)^x \right] = L\left[\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2+x}{x}\right)^x \right]$$

Hallamos el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{x}\right)^{x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{x}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2)} = e^{2}$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x.L\left(\frac{2+x}{x}\right)\right] = L(e^{2}) = 2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{2x1}$

Solución: ∞

2.- Calcula $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$

Solución: 2

3.- Calcula $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-2x-3}{4x-12}\right)^{\frac{2}{x-3}}$

Solución: $\sqrt{e}$

4.- Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

Solución: $\dfrac{4}{3}$

5.- Calcula razonadamente $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

Solución: 4

6.- Calcular razonadamente $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

Solución: $\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$

7.- Dada la función

$$f(x) = \left(\frac{x+4}{x}\right)^{2x}$$

halla su límite al tender hacia $+\infty$.

Solución: e^{8}

Calcula los siguientes límites:

8.- $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x+1)$

Solución: $+\infty$

9.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

Solución: 1

10.- $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-5x+6)$

Solución: 0

11.- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+x^2}{2+x^2}\right)^{x}$

Solución: 1

12.- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^{2x}$

Solución: 0

13.- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3}{x-3}$

Solución: No existe, $-\infty$ por la izda., $+\infty$ por la dcha.

14.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x-2}$

Solución: -2

Calcula los siguientes límites:

15.- $\lim\limits_{x\to o} (1+3x)^{\frac{1}{x^2}}$

Solución: No existe, 0 *por la izda., $+\infty$ por la dcha.*

16.- $\lim\limits_{x\to -\infty} x.(\sqrt{x^2+1}-x)$

Solución: $\dfrac{1}{2}$

17.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-6x+5}$

Solución: $-\dfrac{3}{4}$

18.- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}$

Solución: ∞

19.- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{2x-4}}{x^2-16}$

Solución: $-\dfrac{1}{16}$

20.- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

Solución: No existe, $-\infty$ por la izda., $+\infty$ por la dcha.

2.5.- INFINITÉSIMOS E INFINITOS

1.- Infinitésimos equivalentes

- Una función es un infinitésimo en el punto a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

- Se dice que f y g son infinitésimos equivalentes en x = a si

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

  Son infinitésimos equivalentes para $x\to 0$:
  - $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = x$
  - $f(x) = \text{tg } x$ y $g(x) = x$
  - $f(x) = L(1+x)$ y $g(x) = x$
  - $f(x) = e^x-1$ y $g(x) = x$
  - $f(x) = 1-\cos x$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$

- Se dice que f es un infinitésimos de orden superior a g en x = a si

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

  Cuanto mayor sea el orden del infinitésimo más rápidamente tiende a 0

2.- Infinitos equivalentes

- Se dice que f y g son infinitos equivalentes en x = a si

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

  Las funciones $f(x) = a_n x^n + .. + a_0$ y $g(x) = a_n x^n$ (n>0) son infinitos equivalentes cuando $x\to\infty$.

- Se dice que f es un infinito de orden superior a g en x = a si

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

  Cuanto mayor sea el orden del infinito más rápidamente tiende a $+\infty$

  Son infinitos de orden superior cuando $x\to\infty$:
  - $f(x) = a^x$ (a>1) a $g(x) = x^n$ (n>0)
  - $f(x) = x^n$ (n>0) a $g(x) = \ln x$
  - $f(x) = a^x$ (a>1) a $g(x) = \ln x$

EJEMPLOS

1.- Demuestra que $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ y g(x) = x son infinitésimos equivalentes para $x \to 0$.

Resolución

Para que f y g sean infinitésimos equivalentes en x = 0 ha de cumplirse:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-x} = 0$, se cumple que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, se cumple que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1-x}$ = 1, se cumple que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

2.- Demuestra que f(x) = x y g(x) = L(1+x) son infinitésimos equivalentes para x → 0.

Resolución

Para que f y g sean infinitésimos equivalentes en x = 0 ha de cumplirse:

- $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, se cumple que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} L(1+x) = L\left[\lim\limits_{x\to 0} (1+x)\right]$ = L(1) = 0, se cumple que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{L(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} L(1+x)^{\frac{1}{x}} = L\left[\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = L\left[e^{\lim\limits_{x\to 0}(x-1+1)\frac{1}{x}}\right] = L\left[e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}}\right] =$

= L(e) = 1, se cumple que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

3.- Demuestra que f(x) = x + 2 es un infinito de orden superior a g(x) = L(x+1).

Resolución

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(x+1)}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{L(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{L(x+1)}{x+1}\right]\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0.1 = 0$$

ya que en el primer producto L(x+1) mes un infinito de orden inferior a x+1.

4.- Calcula $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$

Resolución

Es una indeterminación del tipo (∞^0), que resolveremos transformándola en una del tipo (∞.0) tomando logaritmos

$$L\left[\lim_{x\to\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[L\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}Lx\right] = (-\infty.0)$$

Hallamos el valor del límite, sabiendo que Lx es un infinito de orden inferior a x,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{Lx}{x}\right] = 0.$

Finalmente

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = e^0 = 1$$

5.- Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\text{sen}(\pi x)}$

Resolución

Como x y sen x son infinitésimos equivalentes para $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\text{sen}(\pi x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\pi x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\pi} = 0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Demuestra que son infinitésimos equivalentes para $x\to 0$

a) $f(x) = x^2+x$ y $g(x) = L(x+1)$

b) $f(x) =$ sen x y $g(x) = L(x+1)$

2.- Determina en que puntos son infinitésimos equivalentes

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$g(x)=x-1$.

Solución: x=1.

3.- Demuestra que $f(x) =x$ y $g(x) = L(x+1)$ son infinitésimos equivalentes para $x\to 0$.

4.- Escribe una función equivalente a $f(x) =$ tg x en $x = 0$.

Solución: x, sen x

5.- Demuestra que

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$g(x) = x$

son infinitésimos equivalentes para $x\to 0$

6.- Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\,\text{sen}\,x + \text{tg}\,x}{2x}$

Solución: $\frac{3}{2}$

7.- Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\text{sen}\,x}{1-\cos x}$

Solución: 2

8.- ¿Son equivalentes $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^2+x-7$ en $+\infty$? ¿Por qué?

Solución: Sí. Polinomios de igual orden y con igual coeficiente principal.

9.- Calcula $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

Solución: $+\infty$

10.- Calcula $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{L(x^2+1)}{e^x}$

Solución: 0

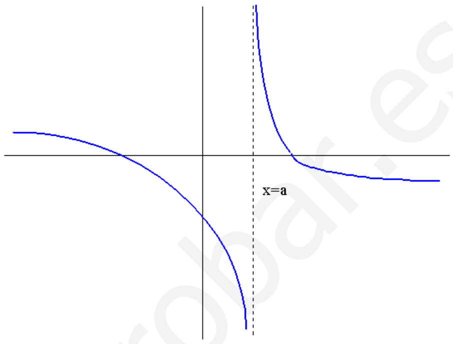
2.6.- ASÍNTOTAS

1.- Asíntotas verticales

Son rectas paralelas al eje de ordenadas de ecuación x = a, siendo a tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Si únicamente existe el límite por la izquierda o por la derecha y es $\pm\infty$, también se dice que existe una asíntota vertical.

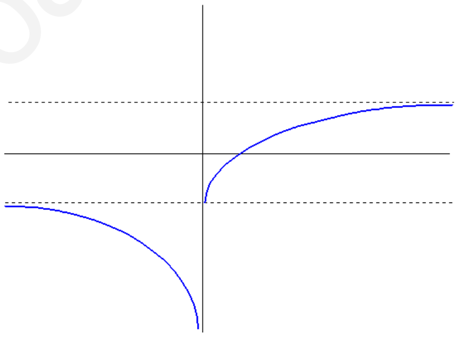
- Para estudiar la situación de la gráfica de la función respecto de la asíntota hay que hallar el valor de los límites laterales en el punto $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.



- En el caso de funciones que sean cocientes de otras se buscan los valores que anulen el denominador, comprobando que efectivamente son asíntotas.

2.- Asíntotas horizontales

Son rectas paralelas al eje de abscisas de ecuación y= b, siendo b = $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.



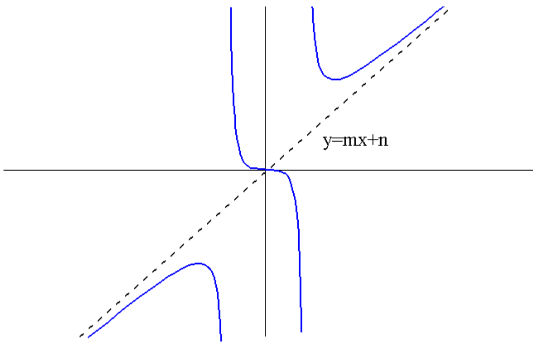
Para estudiar su situación respecto a la gráfica de la función hay que hallar el valor de f(x)-b para valores que se acercan a $\pm\infty$.

3.- Asíntotas oblicuas

Son rectas de ecuación y = mx + n, siendo

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $m\in\mathbb{R}-\{0\}$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$



Para estudiar su situación respecto a la gráfica de la función hay que hallar el valor de f(x) - [mx + n] para valores que se acercan a $\pm\infty$.

EJEMPLOS

1.- Estudia las asíntotas de la función

$$y = \frac{|x|}{1+x}$$

y realiza un esbozo gráfico de la posición de las asíntotas respecto de la función y de ésta.

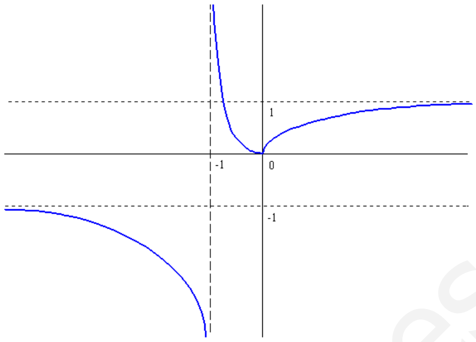
Resolución:

- Asíntotas verticales: se buscan en los valores que anulan el denominador, ya que son cocientes de polinomios. Estudiamos en x=-1.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} -\frac{x}{1+x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} -\frac{x}{1+x} = +\infty$$

Por la izquierda de -1 se acerca con valores negativos y por la derecha con valores positivos



- Asíntotas horizontales: las calculamos hallando los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{x}{1+x}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x}{1+x} = 1$$

Luego y =1 e y = -1 son asíntotas horizontales.

En el segundo caso f(x)-1 = $\frac{x}{1+x} - 1 = -\frac{1}{(1+x)}$ cuyo signo es negativo cuando x tiende a +∞ , luego se acerca a la función por debajo de ésta.

En el primer caso f(x) -(-1) = $-\frac{x}{1+x} + 1 = \frac{1}{(1+x)}$ cuyo signo es negativo cuando x tiende a -∞, luego se acerca a la función por debajo de ésta.

2.- Halla las asíntotas de la función

f(x) = $\mathbf{\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}}$

Resolución:

- Asíntotas verticales:
Estudiamos los valores en que se anulan el denominador:
$x^2+x-2 = 0 \Rightarrow x = -2$ y $x = 1$.

x = -2:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x^2-1)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -2}(x+1) = -1 \neq \infty$$

luego x = -2 no es asíntota

x = 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x+2} = 2 \neq \infty$$

luego x = 1 no es asíntota

- Asíntota horizontal:

  No tiene ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2} = \infty$

- Asíntota Oblicua: Hallamos los valores de m y n:

  $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-2x} = 1$

  $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2} - x \right) =$

  $= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3+2x^2-x-2-x^3-x^2+2x}{x^2+x-2} \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-2} = 1$

  Luego y = x+1 es una asíntota oblicua.

3.- Sea f la función dada por

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ para $|x| \neq 1$,

determina sus asíntotas.

Resolución:

La función es $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ para $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

- Asíntotas verticales: aquellas rectas verticales en las que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

  Como es un cociente buscamos los valores que anulan el denominador:

  $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to +1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty$

  La asíntotas son: x = -1, x = 1.

- Asíntotas horizontales: aquellas rectas en las que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \infty$

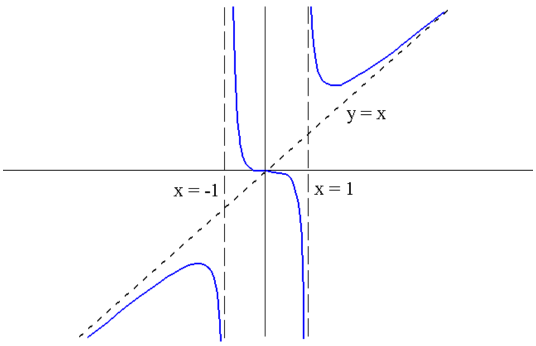
  no hay asíntota horizontal.

- Asíntotas oblicuas:

  $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x^3-x} = 1$

  $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3-x^3+x}{x^2-1} = 0$

  La ecuación es y = x



4.- Localiza las asíntotas de la función

f(x) = $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

y sitúa la gráfica de la función respecto de ellas.

Resolución:

- Asíntotas verticales: rectas en las que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores x = a que anulan el denominador:

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty \ .$$

  La ecuación es: x = 0.

  La situación de la asíntota respecto de la gráfica de la función es la siguiente:

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -\infty$$

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \infty$$

  Es decir que se acerca a -∞ por la izquierda y a +∞ por la derecha.

- Asíntotas horizontales: rectas de ecuación y = b en las que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

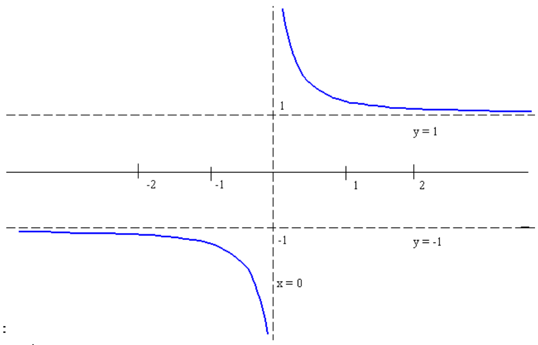
  Vamos a hallarlas en ambos lados:

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+1/x^2}}{1} = 1$$

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{(1)}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{\sqrt{u^2+1}}{-u} = -1$$

  (1) Hemos efectuado el cambio de variable u = -x para hallar el límite.

  Por lo tanto las asíntotas horizontales son:
  y = 1 a la derecha.
  y =-1 a la izquierda.

  para situarlas respecto de la gráfica veamos el signo de f(x)-b hacia la derecha:

  $$\text{signo}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - 1\right) = \text{signo}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}\right) : \ +$$

  que va por encima de la gráfica.

  Veamos el signo de f(x)-b hacia la izquierda

  $$\text{signo}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + 1\right) = \text{signo}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}\right) = \frac{+}{-} = -$$

  que va por debajo.

- Asíntotas oblicuas: no hay ya que:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = 0$$

5.- Halla las asíntotas de la función
f(x) = x^2e^{-x}

Resolución:
La función y = f(x) la podemos considerar como

$$f(x) = x^2e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$$

- Asíntotas verticales: son rectas en las que $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

  Como es un cociente buscamos los valores que anula el denominador:

  $e^x = 0 \Rightarrow x \longrightarrow -\infty$

  No hay asíntotas verticales

- Asíntotas horizontales: son rectas en las que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Vamos a hallarlas a ambos lados:

  $$b = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

  Indeterminación que resolvemos observando que en el numerador hay un infinito de orden inferior a la función del denominador, luego el límite tiende a cero:

  $$b = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

  si $x \to \infty$, la recta es y = 0

  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{u \to -\infty} \frac{(-u)^2}{e^{-u}} = \lim_{u \to -\infty} u^2 e^u = \infty$$

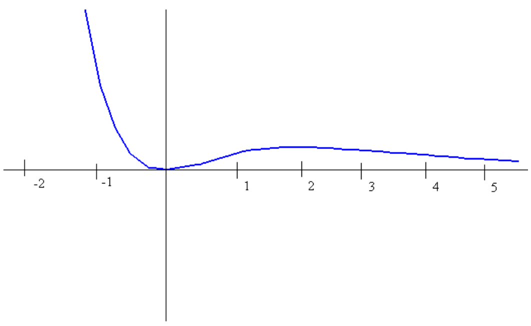
  luego si $x \to -\infty$, no hay asíntota horizontal, sino rama parabólica.

- Asíntotas oblicuas: sólo pueden existir para $x \to -\infty$. El límite será:

  $$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x\,e^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

  ya que el denominador es un infinito de orden superior.

  No hay por tanto asíntota oblicua.



6.- Dada la función

$$\mathbf{f(x) = \frac{e^{-x}}{(x+1)^2}}$$

estudia sus asíntotas

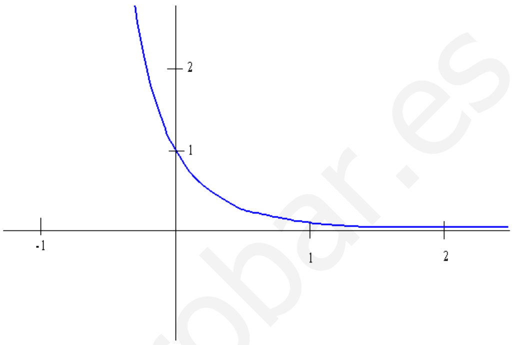
Resolución:

- Asíntotas verticales: rectas en las que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores que anula el denominador:

  $$\lim_{x \to -1} \frac{e^{-x}}{(x+1)^2} = +\infty$$

  La ecuación es x = -1 y en ambos lados toma el valor $+\infty$

- Asíntotas horizontales: son rectas en las que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Vamos a hallarlas a ambos lados:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{(x+1)^2} = \frac{e^{-\infty}}{\infty} = 0$$

  si $x \to \infty$, la recta es y = 0

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{(x+1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

  Indeterminación que resolvemos haciendo el cambio u = -x:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{u \to \infty} \frac{e^{u}}{(-u+1)^2} = \infty$$

  ya que el numerador es un infinito de orden superior que el denominador. Luego si $x \to -\infty$, no hay asíntota horizontal.

- Asíntotas Oblicuas

  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x(x+1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

  Indeterminación que resolvemos haciendo el cambio u = -x:

  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u \to \infty} \frac{e^{u}}{-u(-u+1)^2} = -\infty$$

  ya que el numerador es un infinito de orden superior que el denominador. Hay una rama parabólica si $x \to -\infty$.

7.- Localiza las asíntotas de

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}$$

y sitúa la gráfica de la función respecto de ellas.

Resolución:

- Asíntotas verticales: aquellas en que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. Como es cociente de funciones, debemos buscar valores que anulen el denominador:

  $\sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^2-1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

Al no estar definida la función en [-1,1], ya que x^2-1< 0, la situación de la asíntota respecto de la gráfica de la función será:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Se acerca a -1 por la izquierda con valor $+\infty$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Se acerca a 1por la derecha con valor $+\infty$

- Asíntotas horizontales: no tiene ya que

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

- Asíntotas oblicuas: son rectas de la forma y = mx + n con m = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y

n = $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

indeterminación que resolvemos multiplicando ambos términos por el conjugado del numerador:

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2 - x\sqrt{x^2-1}).(x^2 + x\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}.(x^2 + x\sqrt{x^2-1})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + (x^2-1)x} = 0$$

Existe pues una asíntota oblicua por la derecha: y =x

Para situarla respecto de la gráfica vemos el signo de f(x)-x hacia la derecha:

$$\underset{x\to\infty}{\text{signo}} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x\right] = \underset{x\to\infty}{\text{signo}} \left[\frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right] > 0$$

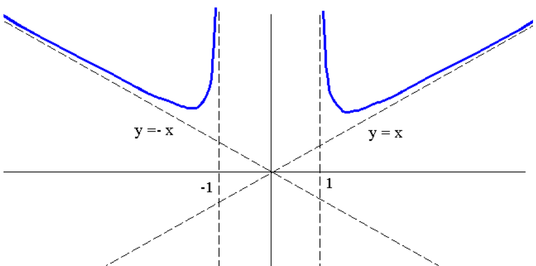
por lo tanto la función se acercará a la asíntota por encima

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{u\to\infty} \frac{-u}{\sqrt{u^2-1}} = -1$$

$$n = \lim_{x\to -\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + x\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^2 - u\sqrt{u^2-1}}{\sqrt{u^2-1}} = 0$$

Existe pues una asíntota oblicua por la izquierda: y =–x

Para situarla vemos el signo de



f(x)–x hacia la izquierda:

$$\underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right]=\underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left[\frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right]>0$$

por lo tanto la función se acercará a la asíntota por encima

8.- Localiza las asíntotas de la función f(x) = $L\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ y sitúa la gráfica de la función respecto de ellas.

Resolución:

- Asíntotas verticales: son rectas de ecuación x = a, siendo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

  Como es un logaritmo debemos buscar los valores que anulen la función cuyo logaritmo tomamos:

  $$\frac{x+1}{x+2} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

  $$\lim_{x\to-1} L\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = L\left(\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x+2}\right) = L(0) = -\infty$$

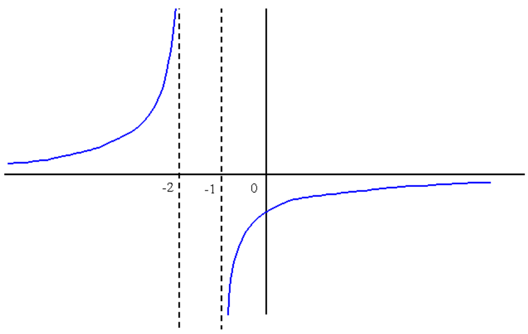
  Como la función de la que se toma el logaritmo es un cociente buscamos los valores que anula el denominador.

  $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$

  $$\lim_{x\to-2} L\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = L\left(\lim_{x\to-2}\frac{x+1}{x+2}\right) = L(\infty) = \infty$$

  por lo tanto en ambos casos tenemos asíntotas verticales.

  Al no estar definida la función en [–2, -1] ya que en ese intervalo $\frac{x+1}{x+2}$ <0 la situación de la asíntota respecto de la gráfica de la función viene dada por los límites exteriores, ya hallados. Se acerca a x = -2 por la izquierda con valores positivos y a x = -1 por la derecha con valores negativos.



- Asíntotas horizontales son aquellas rectas y = b tales que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

  Vamos a hallarlas a ambos lados:

  $$\lim_{x\to\infty} L\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = L\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+2}\right) = L1 = 0$$

  $$\lim_{x\to-\infty} L\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = L\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x+2}\right) = L1 = 0$$

  Por lo tanto la única asíntota horizontal es y = 0 a derecha e izquierda.

  Para situar la gráfica respecto de la asíntota veamos el signo de f(x)-b hacia la derecha:

$$\text{signo}\left[L\left(\frac{x+1}{x+2}\right)-L1\right]=\text{signo}\left[L\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]$$

que será negativo ya que $\frac{x+1}{x+2} < 1$, por lo tanto $L\left(\frac{x+1}{x+2}\right) < 0$

La función se acerca a la asíntota por debajo

Veamos ahora el signo de f(x)-b hacia la izquierda:

$$\text{signo}\left[L\left(\frac{x+1}{x+2}\right)-L1\right]=\text{signo}\left[L\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]$$

que será positivo ya que ya que $\frac{x+1}{x+2} > 1$, y por lo tanto $L\left(\frac{x+1}{x+2}\right) > 0$

La función se acerca a la asíntota por encima.

- Asíntotas oblicuas: no hay, ya que presenta asíntotas horizontales en $-\infty$ y ∞.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Localiza las asíntotas de las funciones y sitúa la gráfica de la función respecto de ellas.

1.- $y = \frac{2x+3}{x-2}$

Solución: AV: x=2, AH: y=2, AO: No tiene.

2.- $y = \frac{x^2-5x+1}{x^2-2}$

Solución: AV: $x=\pm\sqrt{2}$ *, AH: y=1, AO: No tiene.*

3.- $y = \frac{x^2-2x+1}{x+3}$

Solución: AV: x=-3, AH: No tiene, AO: y = x-5.

4.- $y = \sqrt{x^2+1}$

Solución: AV: No tiene, AH: No tiene, AO: y=±x.

5.- $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Solución: AV: No tiene, AH: y=±1, AO: No tiene

6.- $y = \frac{\text{sen}\, x}{x}$

Solución: AV: No tiene, AH: y=0, AO: No tiene

7.- y = ln(x-4)

Solución: AV: x=4, AH: No tiene, AO: No tiene

8.- $y = e^{x-3}$

Solución: AV: No tiene, AH: y=0, AO: No tiene

2.7.- ACTIVIDADES DEL TEMA

1.- Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^x$

Solución: e

2.- Calcula $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right)$

Solución: $\frac{1}{3}$

3.- Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} \right)$

Solución: $-\infty$

4.- Calcula $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Solución: 2

5.- Calcula $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

Solución: $\frac{3}{2}$

6.- Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2e^{5x}-2}{4}$

Solución: 0

7.- Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

Solución: 0

8.- Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$

Solución: 0

9.- Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x^2+1}$

Solución: 0

10.- Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{L\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{x}$

Solución: 0

11.- Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x}}$

Solución: ∞

12.- $\lim\limits_{x \to 2} (3-x)^{\frac{3}{x-2}}$

Solución: e^{-3}

13.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^3-6x^2}{4x^2-1}-\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

Solución: $-\dfrac{3}{2}$

14.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+x}\right)^{3x}$

Solución: e^{-3}

15.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

Solución: $-\dfrac{1}{2}$

16.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^2-4}{x}$

Solución: 4

17.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{x+1}\right)^{x}$

Solución: 1

18.- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

Solución: $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

19.- $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

Solución: $\dfrac{1}{2}$

20.- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

Solución: $\sqrt{e}$

21.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4-x}-2}$

Solución: -2

Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

22.- $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

Solución: AV: x=-1 AH: y=1, AO: No tiene

23.- $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

Solución: AV: x=2, AH: y=1, AO: No tiene

24.- $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

Solución: AV: x=-1, AH: No tiene, AO: y=x

25.- $f(x) = \frac{1}{x^3}$

Solución: AV: x=0, AH: y=0, AO: No tiene

26.- $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Solución: AV: x=1, AH: y=0, AO: No tiene

27.- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Solución: AV: x=1, AH: y=1, AO: No tiene

28.- $f(x) = \frac{x^2-6x+8}{x-4}$

Solución: AV: No tiene, AH: No tiene, AO: y=x-2

29.- $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-2}$

Solución: Asíntotas verticales: $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$ *; Asíntota oblicua: y = x.*

30.- $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Solución: AV: x=1, AH: y=0, AO: No tiene

31.- $f(x) = \frac{x^4-1}{x-1}$

Solución: AV: No tiene, AH: No tiene, AO: No tiene

32.- $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

Solución: AV: x=-1, x=1: y=1, AO: No tiene

33.- $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$,

Solución: AV: x=0, AH: y=-1,y=1, AO: No tiene.

34.- $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

Solución: Asíntotas verticales: x=2, x=-2; Asíntota oblicua: y=x.

35.- $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x^2-4}$

Solución: AV: x=-2,x=2, AH: y=1, AO: No tiene

36.- $y = e^{-2x}$

Solución: AV: No tiene, AH: y=0, AO: No tiene

TEMA 3

3.- CONTINUIDAD DE FUNCIONES

3.1.- FUNCIÓN CONTINUA

1.- Continuidad en un punto

Una función y = f(x) se dice que es continua en un punto de su dominio x = a si:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

- Si la función está definida en un entorno de a se cumple que:
  $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

  por lo tanto, cuando haya que estudiar si una función es continua en x = a seguimos los siguientes pasos:
  1) Averiguamos si la función está definida en x = a
  2) Estudiamos si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (deben existir los límites laterales y coincidir)
  3) Comprobamos si ambos valores coinciden: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

- Si una función está definida sólo en un punto a, entonces es continua en dicho punto.

- Si una función es continua en un punto a, entonces existe el límite en dicho punto, salvo que sea un punto aislado.

2.- Teoremas de continuidad en un punto

Teorema de conservación del signo

Si una función es continua en un punto a y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno de a en el que y=f(x) tiene el mismo signo que f(a).

Teorema de acotación

Si una función es continua en un punto a, entonces existe un entorno de a en el que f está acotada.

3.- Continuidad en un intervalo

- Una función es continua en un intervalo (a, b) si lo es en todos y cada uno de los puntos de dicho intervalo.

- Una función es continua en un intervalo [a, b] si lo es en todos y cada uno de los puntos de (a, b) y se cumple que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

EJEMPLOS

1.- Dada la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **definida de la forma**

$$\textbf{f(x)} = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x<0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 2x+1 & \text{si } 1<x \end{cases}$$

Halla los puntos en los que es continua.

Resolución:
Para que f sea continua basta que lo sea en los puntos x = 0 y x = 1, ya que antes y después las ramas son funciones polinómicas.

- En x = 0, tenemos que f(0) = 1. Hallemos los límites laterales:

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (-x^2+1) = 1$$

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (-x^2+1) = 1$$

  Es continua ya que coinciden los límites laterales en x = 0 y el valor de la función.

- En x = 1, tenemos que f(1) = 2. Hallemos los límites laterales:

  $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} (x^2+1) = 2$$

  $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (2x+1) = 3$$

  No es continua ya que no coinciden los límites laterales.

Luego es continua en R-{1}

2.- Estudia la continuidad de la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **definida por**
f(x) = $|2x - |3-2x||$

y represéntala gráficamente.

Resolución:
Escribimos la función y = f(x) como función definida a trozos, eliminando el valor absoluto:

$$|3-2x| = \begin{cases} 3-2x & \text{si } x<3/2 \\ 2x-3 & \text{si } x\ge 3/2 \end{cases}$$

$$|2x-|3-2x|| = \begin{cases} |2x-3+2x| & \text{si } x<3/2 \\ |2x-2x+3| & \text{si } x\ge 3/2 \end{cases} = \begin{cases} |4x-3| & \text{si } x<3/2 \\ 3 & \text{si } x\ge 3/2 \end{cases}$$

Siendo 4x-3 = 0 en x = $\frac{3}{4} < \frac{3}{2}$. Nos queda:

$$f(x) = |2x-|3-2x|| = \begin{cases} 3-4x & \text{si } x\le 3/4 \\ 4x-3 & \text{si } 3/4<x<3/2 \\ 3 & \text{si } x\ge 3/2 \end{cases}$$

Es una función continua por ser una función polinómica en

$$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Averigüemos la continuidad en los puntos de solapamiento:

- En $x = \frac{3}{4}$

  $\lim_{x \to 3/4^-} (3 - 4x) = 0 = f\left(\frac{3}{4}\right)$

  $\lim_{x \to 3/4^+} (4x - 3) = 0$

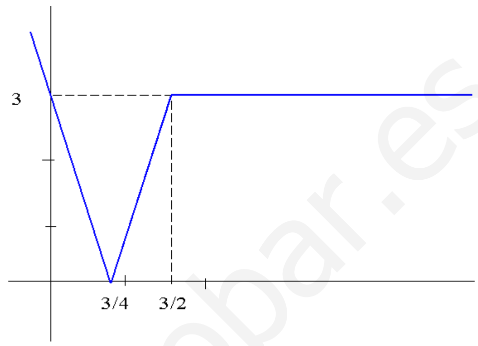
  es continua en $\frac{3}{4}$

- En $x = \frac{3}{2}$

  $\lim_{x \to 3/2^-} (4x - 3) = 3$

  $\lim_{x \to 3/2^+} 3 = 3 = f\left(\frac{3}{2}\right)$

  es continua en $\frac{3}{2}$.



Por lo tanto es continua en todo $\mathbb{R}$.

La gráfica es la de la figura, siendo la unión de tres segmentos que pasan por los puntos (0,3) y $\left(\frac{3}{4},0\right)$; $\left(\frac{3}{4},0\right)$ y $\left(\frac{3}{2},3\right)$ y la dada por y = 3.

3.- Halla el valor del parámetro a para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } x \le 1 \\ x + a, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$ y realiza un esbozo gráfico de dicha función.

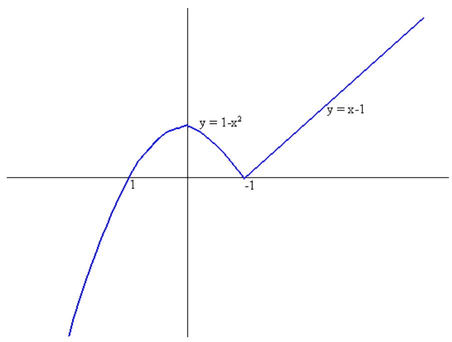
Resolución:

Como es una función definida a trozos en $\mathbb{R}$ y ambas ramas son polinómicas, será una función continua, salvo en los puntos de solapamiento.

El punto de solapamiento es x = 1:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (1 - x^2) = 0.$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + a) = 1+a.$



Como f(1) = $\lim_{x \to 1} (1 - x^2) = 0$, para que sea continua:

$1+a = 0 \Rightarrow a = -1$

La representación gráfica es la dad por dos ramas:
Una parábola convexa de vértice V = (0,1)
Una recta de pendiente 1 y que corta al eje de ordenadas en el punto (0,1).

Se obtiene la figura anterior.

4.- Sea la función

f(x) = $\begin{cases} \mathbf{x+1} & \mathbf{si\ x \leq 0} \\ \mathbf{ax+b} & \mathbf{si\ 0 < x < 1} \\ \mathbf{3x} & \mathbf{si\ x \geq 1} \end{cases}$

determina a y b para que y = f(x) sea continua.

Resolución:
Como es una función definida a trozos en ℝ y y las ramas son polinómicas, será una función continua excepto en los puntos de solapamiento. Los puntos donde puede haber problemas son x=0 y x=1:

- x = 0
  $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x+1) = 1.$
  $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (ax+b) = b.$

  Al ser f(0) = $\lim_{x \to 0} (x+1)$ = 1, para que sea continua obtenemos b = 1.

- x = 1
  $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (ax+1) = a+1.$
  $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} 3x = 3.$
  Como f(1) = $\lim_{x \to 1} 3x$ = 3, para que sea continua a+1 =3, obtenemos a=2.

Por lo tanto f es continua en todo ℝ para a = 2 y b = 1.

5.- Averigua si la función

f(x) = $\begin{cases} \mathbf{\sqrt{1-x^2},} & \mathbf{0 < x \leq 1} \\ \mathbf{\sqrt{1-(x-2)^2},} & \mathbf{1 < x \leq 2} \end{cases}$

es continua

Resolución:
Como es una función definida a trozos en [0,2] y ambas ramas son raíces cuadradas de polinomios, será una función continua, salvo en el punto de solapamiento, $x_0 = 1$. Se debe cumplir que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$, es decir:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1)$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \sqrt{1-(x-2)^2} = 0$

por lo tanto es continua en [0,2].

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Demuestra que la función f es discontinua en x = 0

f(x)= $\begin{cases} x+1, -1 \leq x \leq 0 \\ -x,\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

2.- ¿Cuánto ha de valer a para que la siguiente función sea continua?.

$$y = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

Solución: a=-8

3.- ¿Cuánto ha de valer a para que la siguiente función sea continua?.

$$y = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Solución: $a = \frac{1}{2}$

4.- Halla a y b para que la siguiente función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ 3 - a x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

Solución: a = 0

5.- Si f es una función que cumple $|f(x)| \le |x|$ para todo x, demuestra que:

(1) f(0) = 0.

(2) f es continua en 0.

6.- Estudia la continuidad de la función f(x) = $x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Redefine dicha función para que sea continua en $\mathbb{R}$.

Solución: No es continua en x=0.

$$f(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

7.- Representa la función $y = |x+3| + |x-1| - |2x-4|$. ¿Es continua dicha función?.

Solución: Es la función

$$f(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x \le -3 \\ 2x & \text{si } -3 < x \le 1 \\ 4x - 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$ *Sí es continua.*

8.- Halla **a** para que las siguiente función sea continua.

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 + a x + 1}{x - 1} & \text{si } x \ne 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Solución: No es posible

9.- Calculad **a**, **b** y **c**, para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{5} & \text{si } x < 1 \\ ax + 3 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x + b & \text{si } 2 \le x < 5 \\ c & \text{si } 5 \le x \end{cases}$$

Solución: $a = -\frac{29}{10}$, $b = -\frac{24}{5}$, $c = \frac{1}{5}$

3.2.- CONTINUIDAD DE FUNCIONES.

1.- Continuidad de funciones elementales.

Las funciones elementales son continuas en su dominio, es decir:

- Constantes son continuas en $\mathbb{R}$..
- Lineales son continuas en $\mathbb{R}$..
- Polinómicas en general son continuas en $\mathbb{R}$..
- Exponenciales a^x, a^{-x} son continuas en $\mathbb{R}$..
- sen x y cos x son continuas en $\mathbb{R}$..
- Lx y $\log_a x$ son continuas en $(0, \infty)$.
- $\sqrt{x}$ son continuas en $[0, \infty)$.

2.- Operaciones con funciones continuas

Las operaciones con funciones continuas en un punto x = a dan lugar a una función continua en dicho punto, siempre que tenga sentido la operación (el cociente de dos funciones continuas en x = a puede no estar definido en dicho punto).

Suma de funciones:

Si *f* y *g* son dos funciones continuas en un punto x = a su suma f(x) +g(x) es una función continua en dicho punto

Diferencia de funciones:

Si *f* y *g* son dos funciones continuas en un punto x = a su diferencia f(x) - g(x) es una función continua en dicho punto

Producto de funciones:

Si *f* y *g* son dos funciones continuas en un punto x = a su producto f(x) . g(x) es una función continua en dicho punto

Cociente de funciones:

Si *f* y *g* son dos funciones continuas en un punto x = a su cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ es una función continua, salvo que g(a) = 0.

Producto de una función por un número:

Si *f* es una función continua en un punto x = a su producto por un número a . f(x) es una función continua en dicho punto

Composición de funciones:

Si *f* es una función continua en x = a y *g* es continua en f(a), su composición $(g \circ f)(x)$ es una función continua en x = a.

EJEMPLOS

1.- Determina dónde es continua la función f(x) = x^2+sen x

Resolución:
Es continua en $\mathbb{R}$, ya que las funciones x^2 y sen x lo son.

2.- Determina dónde es continua la función f(x) = x^2. sen x

Resolución:
Es continua en $\mathbb{R}$, ya que las funciones x^2 y sen x lo son.

3.- Determina dónde es continua la función f(x) = $2x^2$ - sen x

Resolución:
Es continua en $\mathbb{R}$, ya que las funciones x^2 y sen x lo son.

4.- Determina dónde es continua la función f(x) = $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

Resolución:
Es continua en $\mathbb{R}$ - {0} pues las funciones x^2 y sen x lo son en $\mathbb{R}$ y x^2 se anula en x = 0.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Demuestra que la función f(x)=x^2+2x-1 es continua en $\mathbb{R}$.

2.- Halla donde es continua la función y = tg x.

Solución: $\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{(2n+1)\pi}{2} \,/\, n \in Z \right\}$

3.- Indica donde es continua en función:

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Solución: $\mathbb{R} - \{n\pi \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$

4.- Indica si es continua en x = 0 la función:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

Solución: No, ya que los límites laterales son distintos.

5.- Estudia la continuidad de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + a}$$

según los valores del parámetro a.
Solución:
Si a>0 la función es continua en $\mathbb{R}$.
Si a=0 la función es continua en $\mathbb{R}$-{0}.
Si a<0 la función es continua en $\mathbb{R}$.- $\left\{-\sqrt{-a}, \sqrt{-a}\right\}$

3.3.- DISCONTINUIDADES

1.- Definición

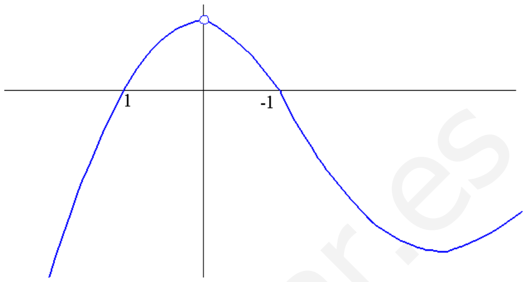
Una función es discontinua en un punto x = a cuando no existe el límite en dicho punto o no coincide dicho límite con el valor de la función (si está definida en el punto).

2.- Tipos

<u>Evitable</u>

La discontinuidad es evitable cuando existe límite en el punto x = a.

El límite se llama verdadero valor de la función en dicho punto.

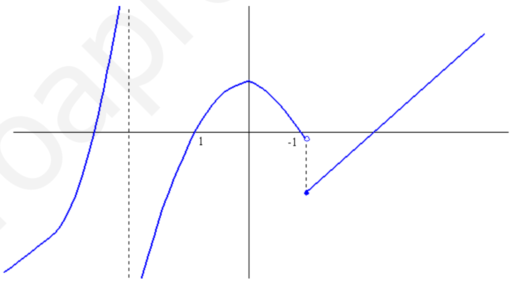


<u>Inevitable</u>

La discontinuidad es inevitable cuando no existe el límite de f en x = a.

- **1ª especie (de salto)**

La discontinuidad es inevitable de 1ª especie si los límites laterales existen y son distintos pero finitos (la diferencia entre ambos límites se llama salto de la función en dicho punto) o bien alguno de ellos o ambos valen infinito (en tal caso el salto es infinito).

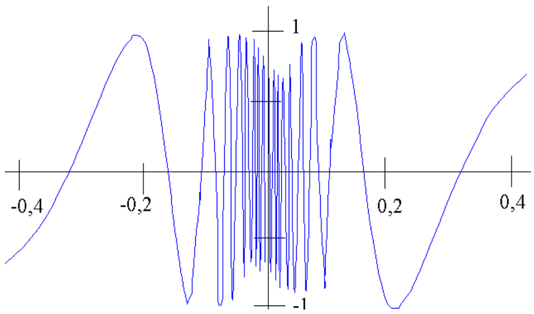


- **2ª especie (esencial)**

La discontinuidad es esencial cuando no existe alguno de los límites laterales.

Un ejemplo sencillo es, tal como se ve en la figura:

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ en x = 0.



EJEMPLOS

1.- Calcula a para que la función

$$f(x) = \frac{3x - 4}{x^3 + ax^2 + 8x - 4}$$

sea discontinua en x = 2. Halla y clasifica todas sus discontinuidades.

Resolución:
Para que sea discontinua, al ser un cociente de polinomios, el denominador ha de anularse:

$(2^3) + a(2^2) + 8(2) - 4 = 0 \Rightarrow \quad 20 + 4a = 0 \Rightarrow \quad a = -5$

quedando

$$f(x) = \frac{3x-4}{x^3-5x^2+8x-4}.$$

Los otros puntos donde se anula la función se hallan pos la Regla de Ruffini obteniéndose x=1 y x=2.

- En x = 1 tenemos:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x-4}{x^3-5x^2+8x-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x-4}{x^3-5x^2+8x-4} = +\infty$$

Discontinuidad inevitable de 1ª especie con salto infinito.

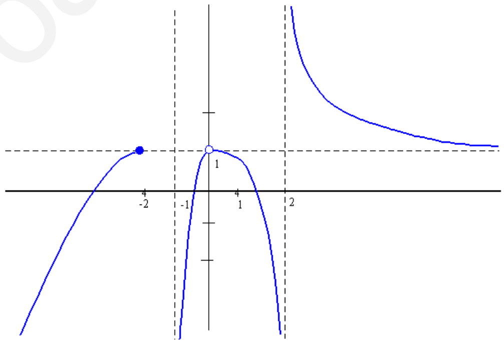
- En x = 2 tenemos:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x-4}{x^3-5x^2+8x-4} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x-4}{x^3-5x^2+8x-4} = \infty$$

Discontinuidad inevitable de 1ª especie con salto infinito.

2.- Una función y = f(x) tiene la gráfica siguiente:
a) ¿Cuál es su dominio?
b) ¿Dónde es continua y dónde discontinua?
c) Halla: $\lim_{x\to 1} f(x)$ **y** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
d) ¿Es inyectiva? ¿Es suprayectiva?
e) ¿Está acotada?



Resolución:
a) Observando la gráfica obtenemos que su dominio es:
D = $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$
b) Observando la gráfica obtenemos que es continua en:
C=$(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$

Los puntos de discontinuidad son:
x = -2, de salto infinito
x = -1, evitable
x = 2, de salto infinito

c) Los límites son:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

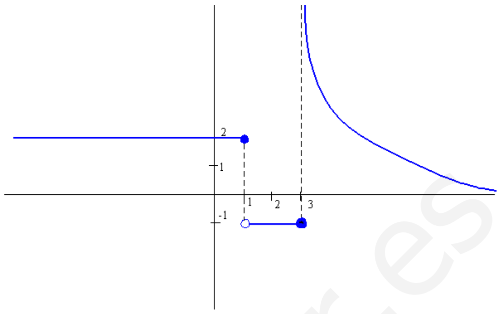
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$$

d) No es inyectiva, ya que existen valores con la misma imagen, en contra de que para cada valor de f(x) exista únicamente un valor de la variable independiente que se aplique en él.

Si es suprayectiva ya que su recorrido es todo $\mathbb{R}$, tal como se observa en la figura.

e) No está acotada superior ni inferiormente.

3.- Dada una función f cuya gráfica es:
a) Halla su dominio y su recorrido
b) Indica en qué puntos es discontinua y qué tipo de discontinuidad presenta en cada uno de ellos.
c) Obtén la expresión analítica de dicha función.



Resolución:
a) Observando la gráfica obtenemos el
- Dominio: R
- Recorrido: $\{-1\}\cup(0, \infty)$

b) Observando la gráfica obtenemos que es continua en:
$C = (-\infty, 1)\cup(1, 3)\cup(3,+\infty)$

Los puntos de discontinuidad son:
x = 1: inevitable de salto finito
x = 3: inevitable de salto infinito.

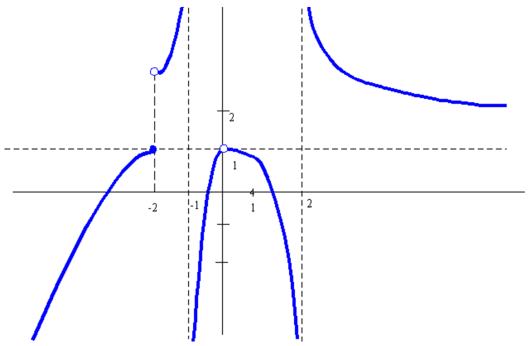
c) La expresión analítica es:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \leq 1 \\ -1 \text{ si } 1 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

4.- Una función y = f(x) tiene la gráfica siguiente:
a) Calcula el dominio y recorrido de f
b) Intervalos de monotonía
c) Extremos relativos
d) Asíntotas, si las posee
e) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to-2^-} f(x),\ \lim_{x\to-2^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to-1} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

f) Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades



Resolución:
a) Observando la gráfica obtenemos que su dominio es:
$D(f) = \mathbb{R}$-[-1,0,2}
$Im(f) = \mathbb{R}$

b) Es creciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,0)$
Es decreciente en $(0,2)\cup(2, \infty)$

c) No existen extremos relativos ya que en x=0 donde se podía alcanzar no cumplen las condiciones de extremo, pues no está definida en él.

d) Asíntotas verticales en x=-1 y x=2
Asíntota horizontal a la derecha en y=1

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2$
$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

f) Observando la gráfica obtenemos que es continua en:
C = $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,2)\cup(2, \infty)$

Los puntos de discontinuidad son:
x = -2, de salto finito
x = 0, evitable
x = -1 y x = 2, de salto infinito

5.- Pon un ejemplo de una función que tenga dos discontinuidades de distinta naturaleza (evitable, no evitable).

Resolución:

Tomamos f(x) = $\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$, las discontinuidades son:

- Discontinuidad evitable en x = 1, pues:
  $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

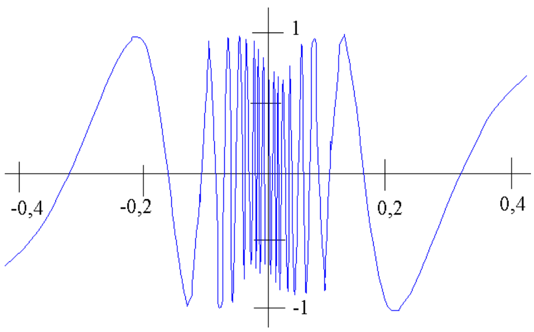
- Discontinuidad inevitable en x = 3, pues no tiene límite en x = 3, siendo sus límites laterales
  $$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$
  $$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

6.- Estudia la continuidad de la función f(x) = $\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en x= 0

Resolución:
Es una discontinuidad esencial ya que no existe

$\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

puesto que la función oscila en los alrededores del cero tomando valores comprendidos entre -1 y 1, es pues oscilante, tal como se ve en la figura adjunta.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = x - \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2 - x}$ y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.
Solución: Discontinuidad evitable en x=0, discontinuidad inevitable en x=1 y x=2.

2.- Estudia la continuidad de la función $f(x) = \left| \frac{x-3}{x} \right|$
Solución: Continua salvo en x= 0, en el que presenta discontinuidad inevitable con asíntotas convergentes.

3.- Demuestra que la función

$$f(x)= \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ -x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

es discontinua en x = 0

4.- Indica si la siguiente función tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución: x= 2, inevitable con salto finito de valor 1.

5.- Indicar si la siguiente función tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 0 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

Solución: x= 3, x=4 inevitable son salto finito

6.- Estudia la discontinuidad de la función

$f(x) = \frac{3x^2 - 9}{x - \sqrt{3}}$ en $x = \sqrt{3}$

Solución: discontinuidad evitable, valor verdadero 6 $\sqrt{3}$

7.- Prueba que la función

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+7x-8},$$

no es continua en **x=1** e indica que tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.
Solución: evitable

8.- Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Extiende la definición a todo R, de modo que sea continua.
Solución: en x= 0 discontinuidad inevitable de salto finito. No se puede extender.

9.- Halla los puntos de discontinuidad de las función siguiente y clasifícala:

$f(x)= -\frac{1}{x}$

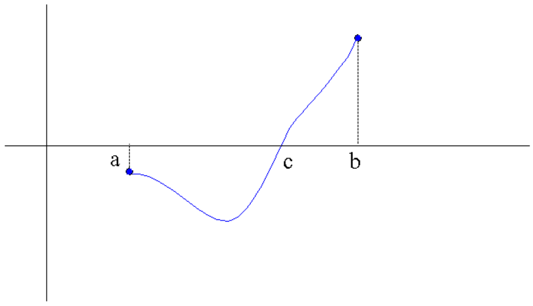
Solución: en x=0 discontinuidad inevitable con salto infinito

3.4.- TEOREMA DE BOLZANO Y VALORES INTERMEDIOS

1.-Teorema de Bolzano.

Sea y = f(x) una función real de variable real, continua en el intervalo [a, b] y tal que toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces existirá un punto c ε (a, b) tal que f(c) = 0.

$$\left.\begin{array}{l} \text{f es continua en } [a, b] \\ (f(a).f(b) < 0) \end{array}\right\} \Rightarrow f(c) = 0,\ c \in (a, b)$$

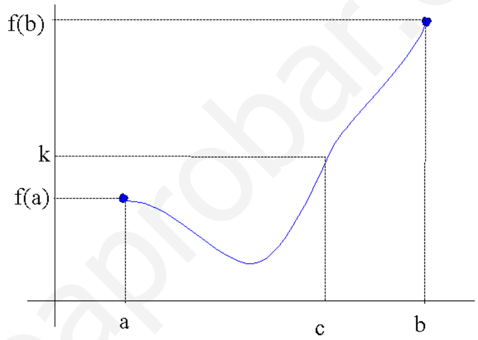


2.- Teorema de Darboux.

El teorema de Darboux o de los valores intermedios, dice que:

“Si y = f(x) es una función continua en [a, b], f tomará al menos una vez todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b)”.

Es decir si K es un valor comprendido entre f(a) y f(b), f(a) ≤ K ≤ f(b), existirá un valor c∈(a, b) tal que f(c) = K



EJEMPLOS

1.- La función

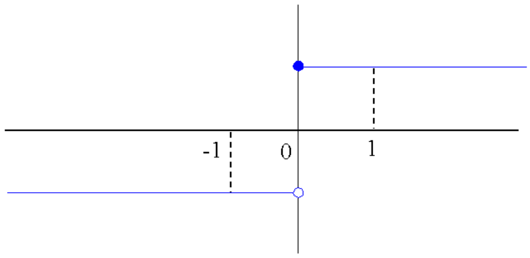
$$\textbf{f(x) =} \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

no corta al eje de abcisas en el intervalo [-1, 1]. ¿Contradice tal resultado el Teorema de Bolzano?.

Resolución:

Según el Teorema de Bolzano la función ha de ser continua en [a, b], entre otras hipótesis. La función valor absoluto es x para valores positivos y -x para valores negativos:

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x}, x < 0 \\ 1, x = 0 \\ \dfrac{x}{x}, x > 0 \end{cases}$$



Así pues la función f queda:

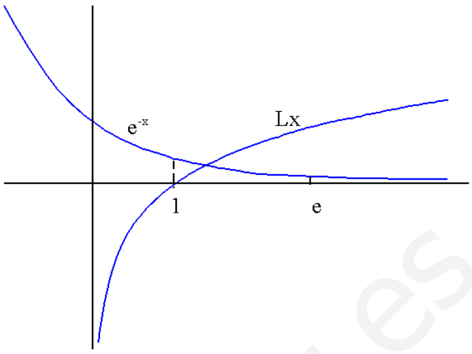
$$f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$$

que, evidentemente, no es continua en cero; por lo tanto no contradice el Teorema de Bolzano, ya que no cumple una de las hipótesis del teorema.

2.- ¿Existirá algún punto donde se corten las gráficas de las funciones $y = e^{-x}$ e $y = L(x)$? Sitúa el punto de corte (caso de que exista) con un error menor de una décima.

Resolución:

Si existe algún punto de corte entre ambas gráficas es porque en dicho punto coinciden los valores de las ordenadas y abcisas, es decir se cumple que f(x) =g(x). Para demostrar que eso ocurre basta construir la función



$h(x)= e^{-x} - \ln(x)$

y demostrar que se anula en algún punto utilizando el Teorema de Bolzano

Si, por ejemplo, tomamos el intervalo [1,e], la función es continua en dicho intervalo como suma de funciones continuas.

En los extremos los valores son:

$g(1) = e^{-1} - \ln(1) > 0$

$g(e) = e^{-e} - \ln(e) = \dfrac{1}{e^e} - 1 < 0$

Es decir que *el punto de corte se sitúa* en el intervalo (1, e). Con exactitud de una milésima basta considerar el intervalo [1,3; 1,4].

3.- ¿Puede existir una función que cumpla las siguientes condiciones:
a) Está acotada en [a, b],
b) f(a) < 0 y f(b) > 0,
c) $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \neq 0$.

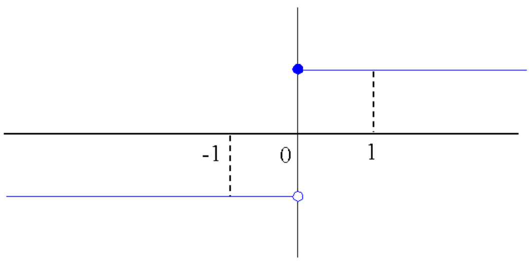
¿Contradice este resultado el Teorema de Bolzano?.
¿Y si se cambia la condición (a) por la de ser derivable la función?.

Resolución:

- Si, por ejemplo la función

  $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

  cumple las condiciones ya que está acotada en [a, b], f(a) < 0 y f(b) > 0, además no corta al eje de abcisas tal como se ve en la figura.



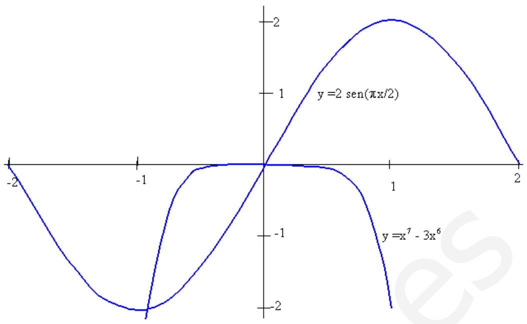
  Sin embargo no contradice el Teorema de Bolzano ya que las hipótesis de éste exigen que la función sea continua, no acotada.

- Si se cambia la condición a) por la de ser y = f(x) derivable (más restrictivo que continua) sí estaríamos en las hipótesis del Teorema de Bolzano. Si existiese tal función si contradiría el Teorema, pero no existe.

4.- Estudia si existe algún punto de corte de las gráficas de las funciones $y = x^7 - 3x^6$ e $y = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Resolución:

Si existe algún punto de corte entre ambas gráficas es porque en dicho punto coinciden los valores de las ordenadas y abcisas, es decir se cumple que f(x) =g(x). Para demostrar que eso ocurre basta construir la función $h(x) = x^7-3x^6 -2.\mathrm{sen}(\pi x/2)$ y demostrar que se anula en algún punto.



Si por ejemplo tomamos el intervalo [2,3], la función es continua en dicho intervalo como suma de funciones continuas (monomios y senos). En los extremos los valores son:

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^7 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^6 - 2\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

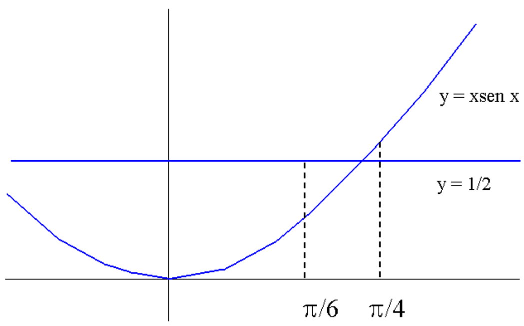
$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Utilizando el Teorema de Bolzano podemos concluir que existe un punto $c \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en el que se cortan ambas gráficas.

5.- Prueba que la gráfica de la función f(x) =x sen x se corta con la de $g(x) = \frac{1}{2}$ en algún punto. Sitúa dicho punto. ¿En qué teorema se basa este resultado?. Enúncialo.

Resolución:

Como sabemos, por el Teorema de Bolzano, si una función continua toma valores de distinto signo en un intervalo, existirá algún punto interior de dicho intervalo donde la función se anule.



Construyamos la función:
h(x)= f(x)-g(x)= xsenx-1/2

- Es continua en $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, ya que es producto y suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

- En $\frac{\pi}{6}$: $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} < 0$

En $\frac{\pi}{4}$: $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{2} > 0$

Por lo tanto existe algún punto interior a dicho intervalo $c \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ donde h(c) = 0. En ese punto:

$c \text{ sen } c - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow c \text{ sen } c = \frac{1}{2}$

es decir, f(x) y g(x) se cortan en $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$, por lo tanto queda resuelto el problema.

6.- Si f es continua en [0,1] y verifica 0 < f(x) < 1, $\forall x \in$ [0, 1], demuestra que existe un c$\in$(0,1) tal que f(c) = c.

Resolución:
Construyamos la función auxiliar h(x)=f(x)-x, como h es la diferencia de dos funciones continuas, h será continua en el intervalo [0,1]

Como en los extremos se cumple:
h(0) = f(0) -0 = f(0) $\Rightarrow$ h(0) > 0
h(1) = f(1) -1 < 0
en ambos casos por ser 0 < f(x) < 1

El Teorema de Bolzano nos dice que habrá un valor c$\in$(0,1) tal que h(c)=0, luego:
h(c) = f(c) - c = 0 $\Rightarrow$ f(c) = c.

7.- Consideramos la función
f(x) = $\frac{x}{\text{senx}}$.

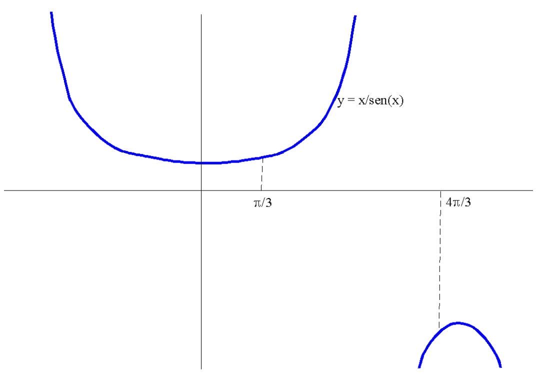
Comprueba que en el intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ cumple la condición $f\left(\frac{\pi}{3}\right).f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ < 0 y sin embargo no existe f(c) = 0 en dicho intervalo. ¿Contradice esto el Teorema de Bolzano?.

Resolución:
El Teorema de Bolzano dice que "si y = f(x) es una función real de variable real, continua en el intervalo [a, b] y con valores en los extremos del intervalo, tales que f(a).f(b)<0, entonces existirá un punto c$\in$(a, b) tal que f(c) = 0".

Comprobemos que $f\left(\frac{\pi}{3}\right).f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$<0:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\pi}{3}}{\text{sen}\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} > 0$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\frac{\pi}{3}}{\text{sen}\frac{4\pi}{3}} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} < 0$$



por lo tanto es cierto.

Comprobemos que f(c) $\neq$ 0, para c$\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$:

Si f(c) = 0 $\Rightarrow$ $\frac{c}{\operatorname{sen} c}$ = 0 $\Rightarrow$ c = 0.

pero 0$\notin\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$, por lo tanto f(c) $\neq$ 0 en dicho intervalo, como queríamos demostrar.

No contradice el Teorema de Bolzano, porque no se cumple la segunda hipótesis, ya que f no es continua en el intervalo $\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ pues no es continua en x_0 = π, ya que en dicho punto existe una discontinuidad de salto:

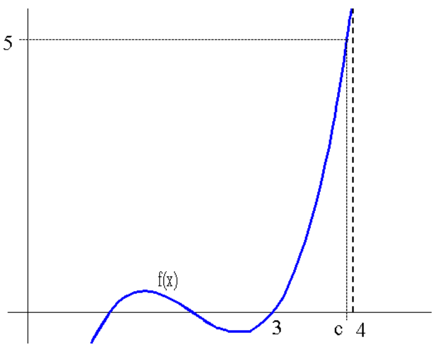
$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-}\left[\frac{x}{\operatorname{sen}x}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+}\left[\frac{x}{\operatorname{sen}x}\right] = -\infty$$

8.- Dada la función f(x) = x^3-6x^2+11x-6, razona si f toma alguna vez el valor 5 cuando x$\in$[3,4]

Resolución:
Los valores en los extremos son:
f(3) = 3^3-6.3^2+11.3-6 = 0
f(4) = 4^3-6.4^2+11.4-6 = 6

Como f es continua en todo $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, en particular lo será en el intervalo cerrado [3, 4] y por aplicación del teorema de los valores intermedios la función tomará todos los valores comprendidos entre f(3) = 0 y f(4) = 6, al menos una vez, en el intervalo [3, 4].



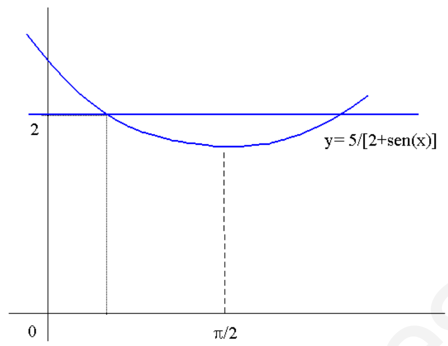
Luego, al menos en un punto del intervalo [3, 4] tomará el valor 5, es decir existe a$\in$(3,4) tal que f(a) = 5

9.- ¿Alcanza la función f(x) = $\frac{5}{2+\operatorname{sen}x}$ el valor 2 en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$? Justifica la respuesta y halla el valor donde se alcanza, caso de ser posible.

Resolución:
Es una aplicación del Teorema de los valores intermedios, ya que si f es continua en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ y 2 es un valor comprendido entre f(0) y f$\left(\frac{\pi}{2}\right)$, existirá un valor c$\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ tal que f(c) = 2.

La función f sí es continua, ya que es un cociente de funciones, siendo la función denominador siempre positiva ($|\text{sen } x| < 1$); por lo tanto basta comprobar los valores extremos:

$f(0) = \frac{5}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{3}$



Como $\frac{5}{3} < 2 < \frac{5}{2}$, estamos en las condiciones del Teorema, luego existe el valor c buscado.

Su valor será:

$$2 = \frac{5}{2+\text{sen}c} \Rightarrow \text{sen } c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Demuestra que la ecuación

$$x \cos\frac{x}{2} + 15 \text{ sen } x = 15$$

tiene alguna raíz real.

2.- La función y = tg x toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [π/4,3π/4] y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el Teorema de Bolzano?
Solución: No lo contradice, ya que no es continua en el intervalo

3.- Prueba que la siguiente ecuación tiene alguna solución real.

$$x^{50} + \frac{133}{1+x^2+\text{sen}^2 x} = 70$$

Solución: está en (-1, 0)

4.- Demuestra que existe un número real tal que sen x = x-1
Solución: está en (1, 2), teorema de Bolzano.

5.- Demuestra que la ecuación x^5-5x-1= 0, tiene, al menos, tres raíces reales.
Solución: están en los intervalos (-2,-1), (-1,0) y (1,2)

6.- Enuncia el Teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que todo número positivo, a, tiene una raíz cuadrada.

7.- ¿Es cierto que una ecuación polinómica de grado tres tiene al menos una raíz real?. Razona la respuesta e ilustra la situación con un ejemplo.

8.- ¿Se puede afirmar que la ecuación sen x+2x-1=0 tiene al menos una raíz real? Si es así, halla un intervalo en el que se encuentre dicha raíz y aproxímala hasta las décimas.
Solución: Sí, [0,4; 0,5].

9.- Si y = f(x) es continua en [1,9] y además f(1) = -5, f(9) > 0 ¿podemos decir que la función g(x) = f(x)+3 tiene un cero en el intervalo [1, 9]?
Solución: Sí

10.- Demuestra que la ecuación x = cos x, tiene una solución real.

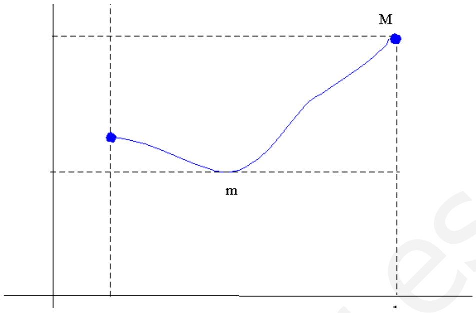
3.5.- TEOREMA DE WEIERSTRASS

1.- Teorema de acotación en un intervalo cerrado

Sea f una función real de variable real, continua en el intervalo [a, b]; entonces está acotada en dicho intervalo.

2.- Teorema de Weierstrass

Si y = f(x) es una función real de variable real continua en el intervalo [a, b], entonces la función alcanza el máximo, M, y el mínimo absolutos, m, en dicho intervalo.

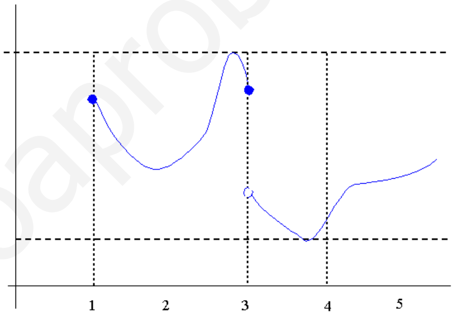


EJEMPLOS

1.- La función, cuya gráfica es la de la figura, está acotada en el intervalo [1, 4]; sin embargo no es continua en dicho intervalo. ¿Contradice este hecho el teorema de acotación?

Resolución:
El teorema de acotación en un intervalo cerrado sólo asegura la acotación de f si es continua.

No impide que dicha función pueda estar acotada en otras circunstancias, tal como se ve en la gráfica.



2.- Se considera la función

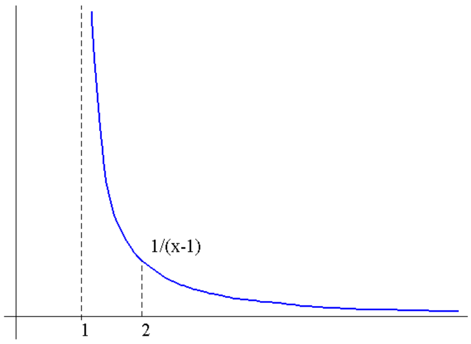
$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

definida en el intervalo (1,2].
a) ¿Está acotada en dicho intervalo?
b) ¿Tiene algún máximo o mínimo absoluto?
c) ¿Contradice este resultado el teorema de Weierstrass?.

Resolución:
a) No está acotada superiormente ya que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$.

Sí está acotada inferiormente ya que, por ejemplo, 1 es una cota inferior, puesto que $\forall x \in (1,2]$, $f(x) \geq 1$.

b) Si, tiene un mínimo absoluto, ya que el ínfimo se alcanza en 2, que pertenece al intervalo.



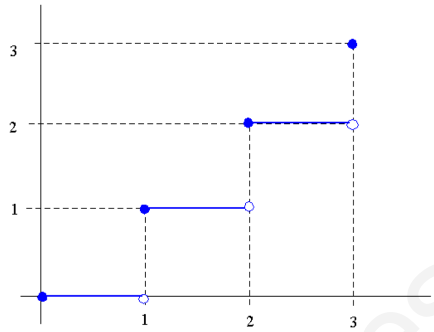
No tiene máximo pues no está acotada superiormente.

c) No lo contradice, pues no es continua en un intervalo cerrado, sino en (1,2].

3.- Se considera la función f(x) = E(x) definida en el intervalo [0,3]. ¿Verifica las hipótesis del teorema de Weierstrass?. ¿Está acotada en dicho intervalo? ¿Alcanza el máximo y el mínimo en ese intervalo? ¿Contradice este resultado el teorema de Weierstrass?.

Resolución:

La función f no verifica las hipótesis del teorema de Weierstrass ya que no es continua en el intervalo [0, 3]. Tal como se ve en la figura los puntos de abscisa x = 1, x = 2 y x = 3 tiene discontinuidad de salto finito.



Sí está acotada tanto superiormente (cota 3) como inferiormente (cota 0).

Si alcanza el máximo en (3,3) y alcanza el mínimo en todos los puntos del intervalo [0,1) y vale 0.

No contradice este resultado el teorema de Weierstrass (cumple la tesis aun no cumpliendo la hipótesis) lo contradiría en caso contrario.

4.- La función
f(x) = tg x

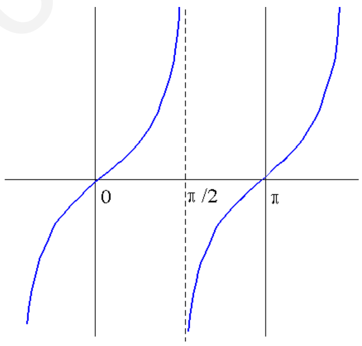
no tiene máximo absoluto en [0, π]. ¿Contradice este hecho el teorema de Weierstrass?.

Resolución:

No lo alcanza ya que en x = $\frac{\pi}{2}$ se verifica que:

$$\lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pi/2^+} f(x) = -\infty$$



luego no se alcanza ni el máximo ni el mínimo absolutos en el intervalo considerado.

No contradice este resultado el teorema de Weierstrass, ya que no es continua en el intervalo [0, π].

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

definida en el intervalo (3,7), ¿Está acotada superiormente?, ¿Contradice este resultado el teorema de Weierstrass?. Enuncia dicho teorema.
Solución: No está acotada superiormente. No contradice el Teorema.

2.- ¿Está acotada la función f(x)= 2/x en el intervalo (0,1]?. ¿Tiene máximo y mínimo?
Solución: Acotada inferiormente, no superiormente. No existe máximo y si existe mínimo.

3.- Sea f una función de la que se sabe que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}, \ldots, f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$$

Si f es continua en el origen ¿cuánto vale f(0)?
Solución: 0

4.- Si f es continua en x=5 y f(5)=3, razonar si las siguientes afirmaciones son o no ciertas:
a) y = f(x) está acotada en su dominio
b) Existe E(5,r) tal que f(x)>0
c) Existe E(5,r) tal que f(x)<0
d) No podemos asegurar nada ya que desconocemos la expresión de f(x).
Solución: b) cierta, a), c) y d) falsas.

5.- ¿Son ciertas las siguientes proposiciones?
a) Toda función acotada en $\mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$.
b) Toda función continua en $\mathbb{R}$ es acotada en $\mathbb{R}$.
Razona las respuestas, en caso negativo, pon un ejemplo.
Solución: Son falsas ambas.

6.- ¿Son ciertas las siguientes proposiciones?
a) Toda función continua en [a, b] está acotada en (a, b).
b) Toda función continua en (a, b) está acotada en (a, b).
c) Toda función continua en [a, b] alcanza el máximo y mínimo en (a, b).
Razona las respuestas, en caso negativo, pon un ejemplo.
Solución: a) cierta, b) y c) falsas.

7.- ¿Es continua la función

$$f(x) = \frac{4}{x}$$

en el intervalo cerrado [0, 3]. ¿Y en el intervalo [1, 3]? ¿Está acotada en estos intervalos?
Solución: No. Sí. No está acotada en [0,3]. Sí en [1,3]

8.- Se considera la función

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

definida en el intervalo (-2,2). ¿Es continua en todos los puntos de dicho intervalo? ¿Contradice este resultado el teorema de Weierstrass?.
Solución: Sí, No.

9.- Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

definida en el intervalo (-0,5]. ¿Cumple las hipótesis del teorema de Weierstrass?. Determina si está acotada superior o inferiormente, y si tiene un máximo o mínimo.
Solución: No, No. No.

10.- Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

definida en el intervalo [-0,5]. ¿Cumple las hipótesis del teorema de Weierstrass?. Determina si está acotada superior o inferiormente, y si tiene un máximo o mínimo.
Solución: No, No, Tiene mínimo pero no máximo.

3.6.- ACTIVIDADES DEL TEMA

1.- Se define una función de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in Z \\ 1 & \text{si } x \notin Z \end{cases}$$

Representa la función y di en qué puntos es discontinua.
Solución: En todos los números enteros

2.- Demuestra que

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

es discontinua en x = 2. Halla una función que coincida con f en todo el dominio de f y sea continua en x=2
Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

3.- Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x}{x} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

halla **a** para que sea continua en x = 0.
Solución: a = 3.

4.- Halla **a** y **b** para que la siguiente función sea continua.

$$y = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ ax + b & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$$

Solución: $a = \dfrac{1}{\pi}$, $b = -\dfrac{1}{2}$.

5.- Dibuja la gráfica de una función continua en R-{1,5}.

6.- Determina la constante **a** para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x < 1 \\ ax + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Sea continua en x=1. Representa la función para este valor de **a**.
Solución:a=-1

7.- Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } x = 0$$

Solución: en discontinuidad evitable.

8.- Halla los puntos de discontinuidad de la función siguiente y clasifícalos:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$$

Solución: en $x=\pm\sqrt{3}$ *discontinuidad inevitable con salto infinito*

9.- Si una función posee límite no finito en un punto ¿puede la función ser continua en dicho punto?
Solución: No

10.- Dibuja la gráfica de una función que tenga una discontinuidad evitable en x = -2 y una discontinuidad inevitable en x = 2.

11.- Representa una función que tenga una discontinuidad evitable en x = 0, una discontinuidad inevitable de salto finito en x = +1 y una discontinuidad inevitable de salto infinito en x = 3.

12.- Representa la función

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x < -1 \\ x^2 - 2 \text{ si } -1 \le x < 1 \\ x \text{ si } x \ge 1 \end{cases}$$

Estudia en qué puntos es discontinua y clasifica sus discontinuidades.
Solución: Discontinua de salto finito en x=1.

13.- Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < -1 \\ x+1 \text{ si } -1 \le x \le 1 \\ 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f y clasifica sus discontinuidades.
Solución: Discontinua de salto finito en x=-1.

14.- Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y donde sea discontinua indica de qué tipo.
Solución: Discontinua de salto finito en x = 1.

15.- Dibuja una función acotada en [1, 3], tal que f(1) > 0, f(3) < 0 y no exista un valor intermedio del intervalo (1, 3) tal que f(c) = 0

16.- Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \le 1 \\ e^x - e \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es su dominio?
b) Representa gráficamente f.
c) Estudia la continuidad de f en x =1,
Solución: a) $\mathbb{R}$*, c)Continua*

17.- Se considera en el plano la recta x=2. Encuentra dos funciones cuyas gráficas admitan a dicha recta como asíntota y tengan distintas posiciones respecto de ella. Representa dichas posiciones.

18.- Calcula a para que la función

$$f(x) = \frac{2x - 4}{x^2 + ax + 2}$$

presente una discontinuidad evitable en x=2. Estudia la continuidad de f, para este valor de a, en todo $\mathbb{R}$ y clasifica las discontinuidades que presente.
Solución: a=-3.
En x=1 es discontinua de salto infinito.
En x=2 es discontinuidad evitable con verdadero valor 2.

19.- Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < -1 \\ x+1 \text{ si } -1 \le x \le 1 \\ 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Estudia la continuidad de f y clasifica sus discontinuidades.
Solución: Continua en $\mathbb{R}$-{-1}. En x=-1 es discontinua de salto finito.

20.- Prueba que la ecuación
tg x = x

tiene una raíz en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

21.- La función
y = tg x - cos x

toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el Teorema de Bolzano?
Solución: No lo contradice, ya que no es continua en el intervalo

22.- Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

definida en el intervalo [3, 5]. ¿Cumple las hipótesis del teorema de Weierstrass?. Determina si está acotada superior o inferiormente, y si tiene un máximo o mínimo.
Solución: Sí, Sí. máximo en x = 3 y mínimo en x = 5.

23.- ¿Es continua la función

$$f(x) = \frac{4}{x-1}$$

en el intervalo cerrado [1, 4]. ¿Y en el intervalo [2, 4]? ¿Está acotada en estos intervalos?
Solución: No. Sí. No está acotada en [1, 4]. Sí en [2, 4]

24.- Se considera la función

$$f(x) = \frac{2}{x-3}$$

definida en el intervalo (-3, 3). ¿Es continua en todos los puntos de dicho intervalo? ¿Contradice este resultado el teorema de Weierstrass?.
Solución: Sí, No.

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA

MATEMÁTICAS II LOGSE

Antonio López García
Juan Fernández Maese
Angeles Juárez Martín

Índice Temático

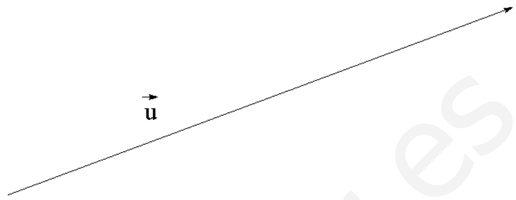
TEMA 1

1.- VECTORES

1.1.- VECTORES. OPERACIONES CON VECTORES

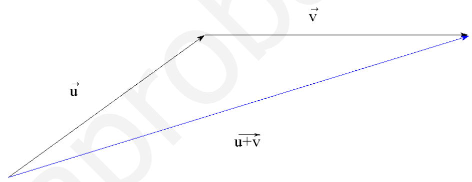
1.- Vectores.

Un vector $\vec{u}$ es un segmento orientado que se caracteriza por la longitud o módulo del vector, la dirección o recta que lo contiene y el sentido u orientación de la recta.

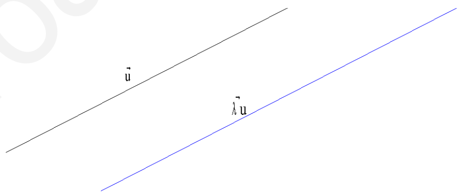


2.- Operaciones con vectores.

- La **suma de dos vectores** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u}+\vec{v}$ cuyo origen coincide con el de $\vec{u}$ y su extremo con el de $\vec{v}$, situando éste en el extremo de $\vec{u}$.



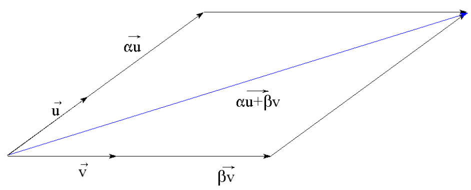
- El **producto de un número** λ **por un vector** $\vec{u}$ es otro vector cuyo módulo es el de $\vec{u}$ por el del valor absoluto del número λ, su dirección la de la recta que contiene al vector $\vec{u}$ y sentido el de $\vec{u}$ si $\lambda>0$ o el contrario si es negativo.



3.- Combinación lineal de vectores.

Un vector $\vec{u}$ es combinación lineal de otros dados $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ si existen una familia de escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R$ tales que

$$\vec{u} = \acute{a}_1\vec{u}_1 + \acute{a}_2\vec{u}_2 + ... + \acute{a}_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \acute{a}_i\vec{u}_i$$



4.- Dependencia e independencia lineal de vectores.

Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** o ligado si uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los restantes. En caso contrario se dice que son **linealmente independientes** o libres. El **rango** de un conjunto de vectores es el número máximo de vectores de dicho conjunto linealmente independientes.

5.- Base de un espacio vectorial

- Un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ de V es un **sistema generador** si cualquier vector de V se puede poner como combinación lineal del sistema.

- Un conjunto de vectores B es **base** de un espacio vectorial V si se cumple que son linealmente independientes y forman un sistema generador de V.

- La **base canónica** de R^3 es la formada por los vectores {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}.

- **Dimensión** del espacio vectorial V es el número de elementos de una base de V.

6.- Coordenadas un vector

- Dado un vector $\vec{u}$ de V y una base B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$, llamamos **coordenadas** de $\vec{u}$ en la base B a los escalares que expresan $\vec{u}$ como combinación lineal de los vectores de B:
$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + ... + \alpha_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i \Leftrightarrow \alpha_1, ..., \alpha_n$ son la coordenadas de $\vec{u}$.

- Si de un vector $\overrightarrow{AB}$ conocemos las coordenadas de su origen A = $(a_1, a_2, ... a_n)$ y su extremo B = $(b_1, b_2, ... b_n)$ las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$

7.- Operaciones con vectores expresados en coordenadas.

- La **suma de dos vectores** $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ es otro vector tal que:
$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$ con propiedades:
- Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} =. \vec{u}$
- Elemento opuesto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

- El producto de un vector $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ por un número λ es otro vector tal que:
$\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, ..., \lambda_n)$ con propiedades:
- Pseudoasociativa: $(\lambda\mu)\vec{u} = \lambda(\mu\vec{u})$
- Elemento unidad: $1.\vec{u} = \vec{u}$.
- Distributivas: $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$ y $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

- El conjunto de vectores de V tiene estructura de espacio vectorial por cumplir las propiedades anteriores respecto a la suma y el producto por escalares. El conjunto $\mathbb{R}^3$ posee estructura de espacio vectorial.

EJEMPLOS

1.- Suma (3, 3, 2) y (1, 1, -1) y efectúa el producto de (2, 2, 3) por 3.

Resolución:
Para sumar vectores se suman las coordenadas correspondientes:
(3, 3, 2) + (1, 1, -1) = (3+1, 3+1, 2-1) = (4, 4, 1)

para multiplicar por un número se multiplican las coordenadas por el número:
3.(2, 2, 3) = (6, 6, 9)

2.- Estudia la dependencia lineal de los vectores (4, 12) y (2, 6).

Resolución:
Serán dependientes si podemos poner un vector como producto del otro por un número :

$(4,12) = a(2,6) \Rightarrow \begin{cases} 4 = 12a \\ 2 = 6a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

Lo que es cierto, ya que se cumplen ambas ecuaciones para el mismo valor

3.- Estudia la dependencia lineal de los vectores (1, 2) y (3, 4).

Resolución:
Serán dependientes si podemos poner un vector como producto del otro por un número :

$(1, 2) = a(3, 4) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 3a \\ 2 = 4a \end{cases}$

Como no se cumplen ambas ecuaciones para ningún valor de a, ambos vectores son independientes.

4.- Estudia la dependencia lineal de los vectores (3, 3, 2), (1, 1,-1) y (2, 2,3).

Resolución:
Serán dependientes si podemos escribir un vector como combinación lineal de los restantes:
$(3, 3,2) = a(1, 1,-1) + b(2, 2, 3) \Rightarrow (3, 3, 2) = (a+2b, a+2b, -a+3b)$

identificando componentes, queda $\begin{cases} 3 = a + 2b \\ 3 = a + 2b \\ 2 = -a + 3b \end{cases}$

Con solución a = 1, b = 1. Por lo tanto el vector (3, 3, 2) es combinación lineal de los otros dos, y los vectores dados son linealmente dependientes.

5.- Estudia la dependencia lineal de los vectores (1, 2, 3), (2, 1, 3) y (1, 0,1).

Resolución:
Serán dependientes si el determinante formado por los tres vectores es nulo:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1+6+0) -(3+0+4) = 0$

Por lo tanto los vectores dados son linealmente dependientes.

6.-)Qué relación debe existir entre a y b para que los vectores $\vec{u}$ = (a,–3, 1), $\vec{v}$ = (3, b, 5), $\vec{w}$ = (1, -4,3) sean linealmente independientes?

Resolución:
Para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes el determinante formado por sus coordenadas ha de ser no nulo:

$\begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 3 & b & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (3ab -12 -15) - (b –20a -27) = 3ab -b +20a$

Luego para que sean independientes: $3ab -b +20a \neq 0$

7.- Prueba que los vectores (0, 1, 1), (1, 0, 1) y (1, 1, 0) forman una base y, si es posible, calcula las coordenadas del vector (1, 2, 3) respecto de la base anterior.

Resolución:
Para que los vectores sean linealmente independientes el determinante formado por sus coordenadas ha de ser no nulo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+1+1) - (0+0+0) = 2 \neq 0$$

luego los tres vectores son linealmente independientes y como su número coincide con la dimensión de $\mathbb{R}^3$ formarán una base de dicho espacio.

Para hallar las coordenadas de (1, 2, 3) respecto de la base anterior, debemos expresarlo como combinación lineal de la base:
(1, 2, 3) = a(0, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0)

operando e igualando componentes queda el sistema:

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ a + c = 2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 1 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

siendo los otros valores c = 0 , a =2, luego las nuevas coordenadas son: (2,1,0)

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Determina los valores a y b para que el vector (1, 4, a, b) sea combinación lineal de los vectores (1, 2, -1, 2) y (0, 1, 2, 1).
Solución: a = 3, b = 4.

2.- Determina los valores a y b para que el vector (a, -2, 1, b) sea combinación lineal de los vectores (1, 2, 3, 4) y (-1, 0, -2, 3).
Solución: a = 1, b = -10.

3.- Comprueba que los vectores (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1) son linealmente independientes.

4.- Demuestra que los vectores (1, a, b), (0, 1, c) y (0, 0, 1) son linealmente independientes para cualquier valor de a, b y c.

5.- Demuestra que los vectores (a, b) y (c, d) son linealmente independientes sí y solo sí $ad - bc \neq 0$.

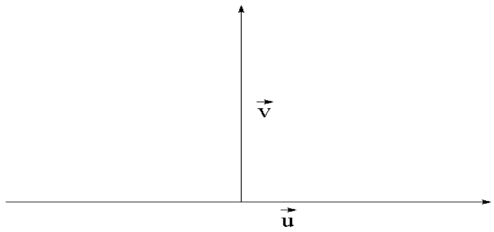
6.-) El vector (2, 1, 3, -7) es combinación lineal de los vectores (1, 3, 3, 0) y (2, 1, 5, 2)?
Solución: No

7.- Se consideran los vectores (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1)
a) Demuestra que forman una base de $\mathbb{R}^3$
b) Halla las coordenadas de la base canónica respecto de dicha base.
Solución: $\vec{e_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{e_2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{e_3} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

8.- Calcula el vector (a, b, c) sabiendo que es combinación lineal de vectores (0, 1, 1) y (0, 2, 3) y además a- b + c= 2, b + c = 12.
Solución: a = 0, b = 5, c = 7.

1.2.- PRODUCTO ESCALAR

1.- Definición.



- El producto escalar de $\vec{u} = (x, y, z)$ y $\vec{v} = (x', y', z')$ es el número:
  $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})$
- Su expresión analítica en una base ortonormal es:
  $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

2.- Propiedades.

- No negatividad: $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$
- Conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- Distributiva: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- Pseudoasociativa: ë $(\vec{u}\cdot\vec{v})$ = (ë $\vec{u})\cdot\vec{v}$ = $\vec{u}$.(ë $\vec{v}$)
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$

3.- Módulo de un vector. Vector unitario.

- El módulo de un vector es el escalar $|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Un vector es **unitario** si su módulo vale 1. Para hallar un vector unitario de la misma dirección que uno dado $\vec{u} \neq 0$ basta multiplicar dicho vector por el inverso de su módulo.

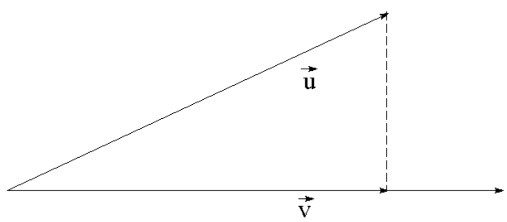
4.- Ángulo de dos vectores. Ortogonalidad de vectores.

- El coseno del **ángulo de dos vectores** no nulos es
  $$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}.$$
- Su expresión analítica en una base ortonormal:
  $$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$
- Dos vectores no nulos son **ortogonales** si su producto escalar es nulo: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}.\perp\vec{v}$

5.- Proyección de un vector sobre otro.

La proyección de un vector $\vec{u}$ sobre otro $\vec{v}$ es un vector con la dirección $\vec{v}$ y cuyo módulo será el producto escalar de ambos dividido entre el módulo del segundo:

$$|proy_v\,\vec{u}| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow proy_v\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\vec{v}$$



EJEMPLOS

1.- Dados los vectores $\vec{u}$ = (1, 2, 3) y $\vec{v}$=(2, -1, 4) calcula: a) Su producto escalar, b) El módulo de cada vector, c) El ángulo que forman

Resolución:
a) Producto escalar

$\vec{u}.\vec{v}$ = 1.2+2.(-1)+3.4 = 12

b) Módulo de cada vector

$$\left|\vec{u}\right| = +\sqrt{1^2+2^2+3^2} = +\sqrt{14}$$

$$\left|\vec{v}\right| = +\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2} = +\sqrt{21}$$

c) Hallemos el coseno del ángulo que forman y, a partir de éste, dicho ángulo:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{12}{\sqrt{14}.\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \Rightarrow (\vec{u},\vec{v}) = \text{arc cos}\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$$

2.- Halla la proyección del vector $\vec{u}$ = (2, -3, 4) sobre el vector $\vec{v}$ = (1, 2, 2).

Resolución:

$$\left|proy_v\vec{u}\right| = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{2.1+(-3).2+4.2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{proy}_v\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}\vec{v} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left|\vec{v}\right|}\vec{v} = \frac{4}{3}.\frac{1}{3}(1,2,2) = \left(\frac{4}{9},\frac{8}{9},\frac{8}{9}\right)$$

3.- Comprueba si los vectores $\vec{u} = \left(0,-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ y $\vec{v}$ = (2, 1, 2) son unitarios.

Resolución:
Para que un vector sea unitario su módulo debe ser la unidad:

$\left|\vec{u}\right| = +\sqrt{0^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}$ = 1, es un vector unitario.

$\left|\vec{v}\right| = +\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2} = +\sqrt{21}$, no es un vector unitario.

4.- Encuentra un vector perpendicular a $\vec{u}$ = (2, -1, 4).

Resolución:
Dos vectores no nulos son perpendiculares si su producto escalar es nulo. En general se trataría de localizar un vector $\vec{v}$ = (x, y, z) que cumpla 2x -y +4z= 0. Hay infinitas soluciones, por ejemplo: (1, 6,1), (2, 4, 0). En general (x, 2x+4z, z) con x, z∈𝕊

5.- Obtén un vector perpendicular a $\vec{u}$ = (3, -1, 2) y a $\vec{v}$ = (1, 0, 3).

Resolución:

Para obtener un vector $\vec{w}$ = (x, y, z) que sea perpendicular a dos dados, obligamos a que los productos escalares con cada uno de ellos sean cero:

$\vec{u}.\vec{w} = 0 \Rightarrow (3, -1, 2).(x, y, z) = 3x - y + 2z = 0$

$\vec{v}.\vec{w} = 0 \Rightarrow (1, 0, 3).(x, y, z) = x + 3z = 0$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones homogéneas con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y + 2z = 0 \\ \quad x \quad + 3z = 0 \end{array}\right\}$$

El rango del sistema es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, luego es compatible indeterminado. Pasamos una de las incógnitas al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = -2z \\ \quad x = -3z \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones. Si fijamos z = 1 obtenemos x = -3, y =–7, es decir, el vector $\vec{w}$ = (-3, -7, 1) y en general $\vec{w}$ = (-3λ, -7λ, λ) con $\lambda \in \mathbb{R}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dados los vectores $\vec{u}$ = (2, 3, -6) y $\vec{v}$ = (6, -1, 0), calcula los módulos de ambos vectores, su producto escalar y el coseno del ángulo que forman

Solución: $\left|\vec{u}\right| = 7,\ \left|\vec{v}\right| = +\sqrt{37},\ \vec{u}.\vec{v} = 9,\ \cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{9}{7\sqrt{37}}$

2.- Dados los vectores $\vec{u}$ = (2, 3, -6) y $\vec{v}$ = (6, -1, 0), calcula:

a) Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

b) Halla la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

Solución: a) $\text{proy}_{v}\vec{u} = \dfrac{9}{37}(6,-1,0)$, *b)* $\text{proy}_{u}\vec{v} = \dfrac{9}{49}(2,3,-6)$

3.- Comprueba si los vectores $\vec{u}$ = (1, 0, 0), $\vec{v}$ = (0, 1, 0) y $\vec{w}$ = (0, 1, 0) son ortogonales. Halla sus módulos.

Solución: Son ortogonales y sus módulos son: $\left|\vec{u}\right| = 1,\ \left|\vec{v}\right| = 1,\ \left|\vec{w}\right| = 1.$

4.- Sean $\left|\vec{u}\right| = 2$, $\left|\vec{v}\right| = 3$, si $(\vec{u},\vec{v})$ = 45E determina la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Solución: $\text{proy}_{v}\vec{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{v}$, $\text{proy}_{u}\vec{v} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\vec{u}$.

5.- Dados los vectores $\vec{u}$ = (1, 2, -1) y $\vec{v}$ = (-1, 2, 3), halla los productos a) $\vec{u}.\vec{u}$, b) $\vec{v}.\vec{v}$ y c) $\vec{u}.\vec{v}$

Solución: a) $\vec{u}.\vec{u}$ = 6, b) $\vec{v}.\vec{v}$ = 14, c) $\vec{u}.\vec{v}$ = 0.

6.- Halla el valor de a para que $\vec{v}$ = (a, 2, 3) sea ortogonal al vector $\vec{u}$ = (2, 3, -6).

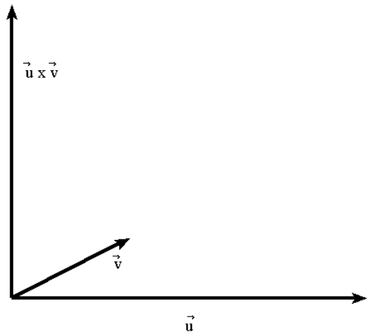
Solución: a = 6.

1.3.- PRODUCTO VECTORIAL

1.- Definición.

Dados dos vectores $\vec{u} = (x, y, z)$ y $\vec{v} = (x', y', z')$, se define el vector producto vectorial como un vector tal que su:

- módulo: $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v}\right| \text{sen}(\vec{u}, \vec{v})$
- dirección: perpendicular a la de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- sentido: el de un sacacorchos dextrógiro que gire desde $\vec{u}$ hasta $\vec{v}$.

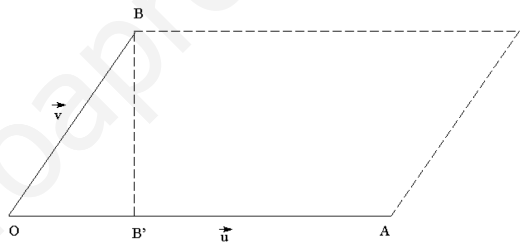


La expresión analítica del producto vectorial en una base ortonormal es:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{e_3}$$

2.- Interpretación geométrica.

El módulo del producto vectorial coincide con el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y las paralelas a ambos vectores trazadas por sus extremos.



3.- Propiedades

- Anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- Distributiva: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $\text{ë}\,(\vec{u} \times \vec{v}) = \text{ë}\,(\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \text{ë}\,(\vec{v})$
- $\vec{u} \times \text{ë}\,(\vec{u})$, $\forall \lambda \in R$

EJEMPLOS

1.- Calcula el producto vectorial de $\vec{u} = (2, -3, 1)$ y $\vec{v} = (-3, 1, 2)$.

Resolución:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-7, -7, -7)$$

2.- Calcula algún valor de a para que el producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (1, 2, a)$ y $\vec{v} = (1, a, 0)$ tenga la dirección del eje 0Z.

Resolución:

Para que el producto vectorial tenga la dirección del eje OZ las dos primeras coordenadas han de ser nulas:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = (-a^2, a, a-2)$$

$(-a^2, a, a-2) = k(0, 0, 1) \Rightarrow a^2 = k.0,\ a = k.0,\ a-2 = k(1) \Rightarrow a = 0.$

3.- Calcula un vector unitario que sea perpendicular simultáneamente a $\vec{u} = (2, -3, 1)$ y $\vec{v} = (-3, 1, 2)$.

Resolución:

El vector $\vec{u} \times \vec{v}$ será perpendicular simultáneamente a ambos vectores:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-7, -7, -7)$$

Para que sea unitario obligamos a que su módulo sea 1. Como:

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + (-7)^2} = 7\sqrt{3}$$

tomamos como vector: $\vec{w} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{\left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v}\right|} = \dfrac{(-7, -7, -7)}{7\sqrt{3}} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, calcula los módulos de ambos vectores y su producto vectorial

Solución: $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{11}$, . $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{29}$, $\vec{u} \times \vec{v} = (7, -14, 7)$

2.- Calcula el producto vectorial de $\vec{u} = (1, 7, -3)$ por $\vec{v} = (-5, 0, 4)$.

Solución: $\vec{u} \times \vec{v} = (28, 11, 35)$.

3.- Dados los vectores $\vec{w} = (3, -1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, 1)$ halla el producto vectorial de ambos vectores. Comprueba que es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución: $\vec{u} \times \vec{v} = (-2, -2, 4)$

4.- Calcula los valores a y b para que (a, b, 1) sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = (3, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, 2, -1)$.

Solución: $a = -1$, $b = \dfrac{3}{2}$

5.- Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, comprueba que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2\,\vec{u} \times \vec{v}$.

6.- Halla dos vectores unitarios que sean ortogonales a $\vec{u} = (2, -2, 3)$ y $\vec{v} = (3, -3, 2)$.

Solución: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

1.4.- PRODUCTO MIXTO

1.- Definición.

Dados tres vectores $\vec{u}$ = (x, y, z), $\vec{v}$ = (x', y', z') y $\vec{w}$ = (x'', y'', z'') se define el producto mixto como el escalar:

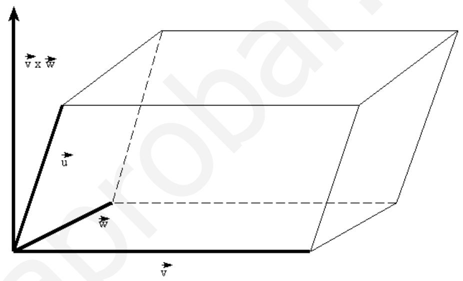
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \, x \, \vec{w})$

Su expresión analítica en una base ortonormal es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

2.- Interpretación geométrica.

La interpretación geométrica del producto mixto de tres vectores es el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y las paralelas a ellas por sus extremos.



3.- Propiedades.

- Permutación circular: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$
- Transposición: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$
- Distributiva: $[\vec{u} + \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$
- Producto por número real: $[\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$
- El producto mixto de tres vectores es nulo, si y sólo si, los tres vectores son linealmente dependientes (es decir coplanarios).

EJEMPLOS

1.- El vector c es perpendicular a los vectores a y b, que forman un ángulo de 30°, si $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 3$ y $|\vec{w}| = 3$, calcula $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Resolución:

Aplicando la definición del producto mixto:

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = \vec{w} \cdot (\vec{u} \, x \, \vec{v}) = |\vec{w}| \cdot |\vec{u} \, x \, \vec{v}| \cos(0^\circ)$ ó

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = \vec{w} \cdot (\vec{u} \, x \, \vec{v}) = |\vec{w}| \cdot |\vec{u} \, x \, \vec{v}| \cos(180^\circ)$

ya que $\vec{u} \, x \, \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, su dirección será la de $\vec{w}$, que es también perpendicular a ambos. Si tiene el mismo sentido, el ángulo determinado es 0° y, si es de sentido contrario, 180°. Así, queda:

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = |\vec{w}| \cdot |\vec{u} \, x \, \vec{v}| (\pm 1) = \pm |\vec{w}| \cdot |\vec{u} \, x \, \vec{v}| \operatorname{sen}(30^\circ) = \pm 6.3.3.\frac{1}{2} = \pm 27$

2.- Calcula el producto mixto de $\vec{u}$ = (3, -7, 4), $\vec{v}$ = (2, 1, 5) y $\vec{w}$ = (7, 4, -2).

Resolución:
Por aplicación directa de la definición:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-6+32-245) - (28+60+28) = -335.$$

3.- Comprueba que los vectores $\vec{u}$ =(2, 2, 2), $\vec{v}$ = (3, 1,-1) y $\vec{w}$ = (-2, 1, 4) son linealmente dependientes:

Resolución:
Para comprobarlo basta comprobar que su producto mixto es nulo:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (8+4+6) - (-4-2+24) = 0$$

5.- Determina los valores de a para los que son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$ = (1, a, a), $\vec{v}$ = (a, 1, a) y $\vec{w}$ = (a, a, 1)

Resolución:
Los vectores son linealmente dependientes si su producto mixto es nulo:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 2a^3 - 3a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ ó } a = \frac{1}{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula el producto mixto de $\vec{u}$ = (2, 1, 3), $\vec{v}$ = (1, 2, 3) y $\vec{w}$ = (-1, -1, 0).
Solución: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 6$

2.- Demuestra la identidad $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

3.- Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores tales que sus módulos son iguales. Calcula los valores máximo y mínimo absolutos de su producto mixto.
Solución: valor máximo $|\vec{u}|^3$, *valor mínimo* $-|\vec{u}|^3$

4.- Dados los vectores $\vec{u}$ = (7, 4, -5), $\vec{v}$ = (-2, 5, -3), $\vec{w}$ = (0, 7, 4) y $\vec{t}$ = (8, 23, -19). Calcula los productos mixtos: a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}]$
Solución: a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 389$, *b)* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}] = 0$.

5.- Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores linealmente independientes. Indica cual producto mixto es nulo: a) $[\vec{u} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}]$, b) $[\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}]$, c) $[\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}, \vec{w} - \vec{u}]$
Solución: a) No nulo, b) $-[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$, *c) Es nulo, d)* $2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$

1.5.- EJERCICIOS DEL TEMA

1.- Determina los valores a y b para que el vector $\vec{w}$ = (a, 1, b, -5) sea combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ = (2, 1, 0, 4) y $\vec{v}$ = (-1, 1, -1, 2).
Solución: a = $-\frac{9}{2}$ *, b =* $-\frac{23}{2}$.

2.- Dados los vectores $\vec{u}$ = (1, 1, 0, m), , $\vec{v}$ = (3, -1, n, -1) y $\vec{w}$ = (-3, 5, m, -4), halla los valores de m y n para que dichos vectores sean linealmente dependientes.
Solución: m ¹ -2, n ¹ 1.

3.- Dados los vectores $\vec{u}$ = (2, 1, 2) y $\vec{v}$ = (6, -3, 0), halla un tercer vector $\vec{w}$ que sea linealmente dependiente de los anteriores y ortogonal a u.
Solución: (2a, -2a, -a)

4.-)Qué relación debe existir entre a y b para que los vectores $\vec{u}$ = (a, -3, 1), $\vec{v}$ = (3, b, 5) y $\vec{w}$ = (1, –4, 3) sean linealmente independientes?
Solución: 3ab – b + 20 ¹ 0.

5.- Se consideran los vectores $\vec{u}$ = (-5, 2, 8, -16), $\vec{v}$ = (-5, 3, 17, -14) y $\vec{w}$ = (1, 1, 11, 6). Expresa $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
Solución: $\vec{u} = \frac{7}{8}\vec{v} - \frac{5}{8}\vec{w}$

6.- Demuestra que los vectores $\vec{u}$ = (1, 1, 0), $\vec{v}$ = (1, 0, 1) y $\vec{w}$ = (0, 1, 1) son linealmente independientes y expresa el vector (1, 2, 3) como combinación lineal de dichos vectores.
Solución: (1, 2, 3) = $\vec{v} + 2\vec{w}$

7.-)Para qué valor, o valores, de a son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$ = (2, -3, 1), $\vec{v}$ = (-4, 6,-2) y $\vec{w}$ = (a, 1, 2)?. Justifica la respuesta.
Solución: Para cualquier valor de a.

8.- Determina los valores de a para los que los vectores $\vec{u}$ = (-2, a, -1), $\vec{v}$ = (5, 0, 6) y $\vec{w}$ = (3,–2, 4) son linealmente independientes y, si es posible, expresa (2, 2, 2) como combinación lineal de (-2, 6,-1), (5, 0, 6) y (3,-2, 4).
Solución: Linealmente independientes si a ¹ -7.(2, 2, 2) = 0.(-2, 6, -1) +1.(5, 0, 6) -1.(3, -2, 4).

9.-)Determina los valores de a para que los vectores $\vec{u}$ = (-2, a, -1), $\vec{v}$ = (5, 0, 6) y $\vec{w}$ = (3, 2,–4) sean linealmente independientes?.
Solución: a ¹ $\frac{7}{19}$.

10.- Dados los vértices A = (1, a, 0), B = (3, 0, 1) y C = (0, -5, 2) determina el valor de a para que el triángulo ABC sea rectángulo en A.
Solución: a = 0, ó a = -5

11.- Dados los vectores $\vec{u}$ = (2, -1, a) y $\vec{v}$ = (b, -2, -2) determina los valores de a y b tales que hacen que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
Solución: a = 2, b = 1

12.- Dados los vectores $\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, -3)$ y $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$,)que relación deben satisfacer a y b para que el módulo de $\vec{w}$ sea la unidad?
Solución: $4a^2 + 10b^2 = 1$.

13.-)Son unitarios los vectores $\vec{u} = \left(\frac{3}{5},\ 0,\ \frac{4}{5}\right)$, $\vec{v} = \left(0, -\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ y $\vec{w} = (1, 1, 1)$?

Solución: No lo es $\vec{w}$ *, sí los demás.*

14.- Da un vector perpendicular a $\vec{u} = (3, -1, 5)$
Solución: Hay infinitos, en general (a, 3a+5c, c). Por ejemplo (1 ,3, 0) y (0, 5, 1).

15.- Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (2 – a + b, 1 + a - b, 1 - b)$ sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 0, 2)$ y $\vec{v} = (2, 1, -1)$.
Solución: a = 4, b = 0.

16.- Obtén un vector perpendicular a los vectores $\vec{u} = (3, -1, 2)$ y $\vec{v} = (1, 0, 3)$.
Solución: En general (-3c, -7c, c).

17.- Si $|\vec{u}| = 10$, $|\vec{v}| = 10$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 20$ halla el ángulo que forman ambos vectores.

Solución: 0°

18.- Un vector de módulo 10 se descompone en suma de otros dos de módulos iguales y que forman un ángulo de 45E. Halla el módulo de cada de los vectores sumandos.
Solución: $10(2-\sqrt{2})$

19.- Si se cumple la igualdad $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ a))se puede asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$? b) ¿y que son iguales las proyecciones ortogonales de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sobre $\vec{u}$? c) ¿y la de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y $\vec{w}$?
Solución: a) $\vec{u}$ *puede ser distinto de* $\vec{w}$ *, b)* $\text{proy}_u \vec{v} = \text{proy}_u \vec{w}$, c) $\text{proy}_v \vec{u} = \text{proy}_v \vec{w}$

20.- Si $\vec{u} = (\vec{v}\,.\,\vec{w}).\vec{t} - (\vec{v}\,.\,\vec{t}).\vec{w}$)es seguro que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares?
Solución: Sí.

21.- Halla las proyecciones del vector $\vec{u} = (2, -1, 1)$ sobre los ejes de coordenadas.
Solución: a) $proy_i\,\vec{u} = (2, 0, 0)$, $proy_j\,\vec{u} = (0, -1, 0)$, $proy_k\,\vec{u} = (0, 0, 1)$.

22.- Puede haber vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que: a) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$. b) $|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}| = |\vec{u}.\vec{v}|$.

Solución: a) $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ *¹ -3. b)* $\vec{u}$ *o* $\vec{v}$ *nulos o que tengan la misma dirección.*

23.- Sean $|\vec{u}| = 2$, = $|\vec{v}| = 3$ si $(\vec{u}.\vec{v}) = 150E$ determina la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

Solución: $\text{proy}_v \vec{u} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{v}$

24.- Halla un vector perpendicular a $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 0)$ y cuyo módulo sea 2.
Solución: $\left(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right)$

25.- Dados los vectores $\vec{u} = (3, -1, 1)$ y $\vec{v} = (2, -3, 1)$ halla el producto $\vec{u} \times \vec{v}$ y comprueba que es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

26.- Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores. Demuestra que $[\vec{u}-\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}-\vec{u}] = 0$.

27.- Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores. Demuestra que $[\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{u}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

28.- Sean los vectores $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{e_1}+\sqrt{3}\vec{e_2})$, $\vec{v} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e_1}-\vec{e_2})$ y $\vec{w} = \vec{e_3}$. Comprueba que forman una base ortogonal de V^3. Halla las coordenadas de $\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}$ respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, siendo $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$ y $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$.

Solución: $\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1\right)$

29.- Sean A = (1, 1, 0), B = (-1, -1, -1) y C = (2, 2, 0) tres puntos. Halla las coordenadas de D para que ABCD sea un paralelogramo.
Solución: D = (4 ,4, 1) ó D = (0, 0, -1)

30.- Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 3, -1)$, halla los vectores:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$,

b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$,

c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

Solución: a) $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 2, 8)$, *b)* $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (-14, -9, 1)$, *c)* $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (-26, 15, -7)$

31.- Sean los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ y $\vec{w} = (0, 1, 1)$, halla $[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w} \times \vec{u}]$.

Solución: $[\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w} \times \vec{u}] = 4$

32.- Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores. Demuestra que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + á\,\vec{u} + â\,\vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

33.- Sean los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$ y $\vec{w} = (0, 1, 1)$, demuestra que son linealmente independientes.

34.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & a & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ indica los valores de a para los cuales las tres filas de A representan vectores linealmente independientes
Solución: Para cualquier valor de a.

35.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -2 & a & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ indica los valores de a para los cuales las tres filas de A representan vectores linealmente independientes
Solución: Para a ¹ -7, es decir a Î 5 ⊟{-7}.

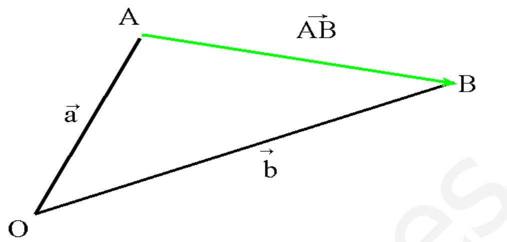
35.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}$ indica los valores de a para los cuales las tres filas de A representan vectores linealmente independientes
Solución: Para a ¹ 1.

TEMA 2

2.- RECTAS Y PLANOS

2.1.- PUNTOS Y VECTORES

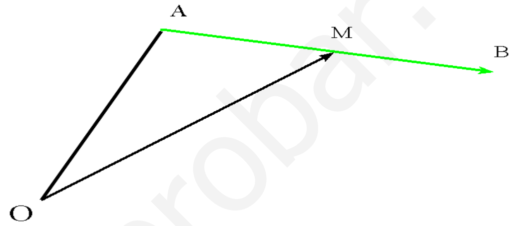
1.- Coordenadas de un vector



Las coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$ siendo A =(x_1, y_1, z_1) y B = (x_2,y_2,z_2):

$\overrightarrow{AB}$ = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)

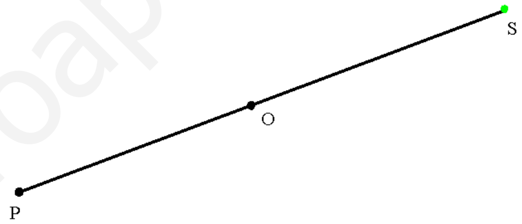
2.- Punto medio de un segmento



El punto medio de un segmento de extremos A= (x_1, y_1, z_1) y B = (x_2, y_2, z_2):

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}, \frac{x_3+y_3}{2} \right)$$

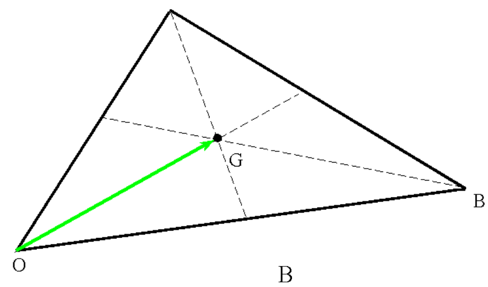
3.- Punto simétrico de otro dado.



El simétrico S=(s_1,s_2,s_3) de otro P= (p_1,p_2,p_3) respecto de M = (m_1,m_2, m_3) es:

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{p_1+s_1}{2}, \frac{p_2+s_2}{2}, \frac{p_3+s_3}{2} \right)$$

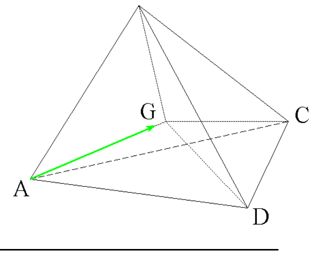
4.- Baricentro de un triángulo.



El baricentro de un triángulo de vértices A=(x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2) y C =(x_3, y_3, z_3) viene dado por el punto G tal que:

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3} \right)$$

5.- Baricentro de un tetraedro.



El baricentro de un tetraedro de vértices A = (x_1, y_1, z_1), B=(x_2, y_2, z_2), C =(x_3, y_3, z_3) y D =(x_4, y_4, z_4) es G tal que:

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4} \right)$$

EJEMPLOS

1.- Halla coordenadas y punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$ con A = (3,-1,5) y B=(4, 7,-11)

Resolución:

- Coordenadas del vector: $\overrightarrow{AB}$ = (4-3, 7-(-1), 11-5) = (1,8,-16)
- Punto medio: $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{3+4}{2}, \frac{-1+7}{2}, \frac{5-11}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, 3, -3 \right)$

2.- Halla el punto simétrico del punto P = (3, 3, 3) respecto de M = (-1, 1, 2)

Resolución:
Si Q tiene de coordenadas (a, b, c) se habrá de verificar:
$-1=\frac{3+a}{2} \Rightarrow$ a =-5, $1=\frac{3+b}{2} \Rightarrow$ b = -1, $2=\frac{3+c}{2} \Rightarrow$ c = 1
El punto pedido es Q = (-5,-1,1)

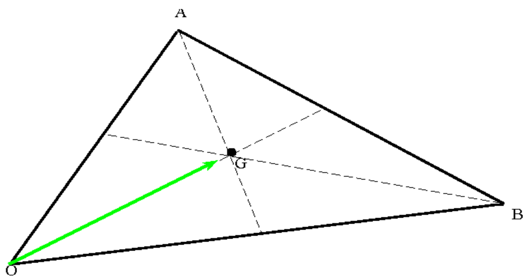
3.- Sea B el punto simétrico de A =(2, 0, 1) respecto del punto P = (1, -1, 1), determina las coordenadas de dicho punto.)Cuál debe ser el valor de a para que el segmento determinado por B y C = (1, a, 3) sea perpendicular al determinado por A y B?

Resolución:

- Para que B=(a, b, c) sea simétrico de A respecto de P, debe ser el punto medio del segmento $\overline{AB}$:
  $1=\frac{2+a}{2} \Rightarrow$ a = 0 , $-1=\frac{0+b}{2} \Rightarrow$ b =-2, (a, b, c), $1=\frac{1+c}{2} \Rightarrow$ c = 1
  es decir que el punto simétrico es B = (0, -2, 1)

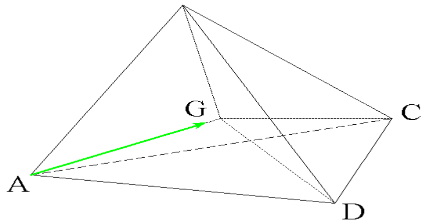
- Para que los segmentos pedidos sean perpendiculares el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ ha de ser nulo. Como dichos vectores son:
  $\overrightarrow{AB}$ = (0-2, 2-0, 1-1) = (-2,2,0) y
  $\overrightarrow{CD}$ = (1-0, a-(-2), 3-1) = (1, a+2, 2)
  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ = (-2, 2, 0).(1, a+2, 2) = -2.1 + 2(a+2) + 0.2 = 2+2a
  que igualando a 0 da el valor de a: 2+2a = 0 $\Rightarrow$ a = -1

4.- Halla las coordenadas del baricentro del triángulo ABC siendo A=(3,–1,5), B = (4, 7, -11) y C = (2, 2, 2)



Resolución:
Se suman los valores de las coordenadas de A, B y C y se dividen por 3:
$$\left(\frac{3+4+2}{3}, \frac{-1+7+2}{3}, \frac{5-11+2}{3}\right) = \left(3, \frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

5.- Halla las coordenadas del baricentro del tetraedro ABCD siendo A = (3, 1, 5), B = (4, 7, -11), C= (2, 2, 2) y D = (1, 0, 1).



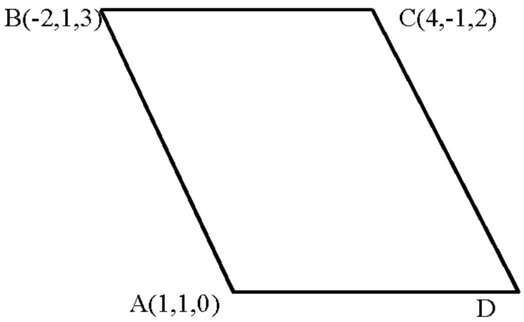
Resolución:
Se suman los valores de las coordenadas de A, B, C y D y se dividen por 4:
$$\left(\frac{3+4+2+1}{4}, \frac{-1+7+2+0}{4}, \frac{5-11+2+1}{4}\right)=\left(\frac{5}{2}, 2, -1\right)$$

7.- Tres vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD tienen por coordenadas A = (1, 1, 0), B = (-2, 3, 1), y C = (4, -1, 2). Determina las coordenadas del cuarto vértice D y averigua si es un rectángulo o no.

Resolución:

Si el vértice es D = (a,b,c), los vectores $\overrightarrow{AB}$= (–3,2, 1) y $\overrightarrow{DC}$ = (4-a, -1-b, 2-c) han de ser iguales:

4-a = 3 ⇒ -a =-7 ⇒ a = 7
-1-b = 2 ⇒ -b = 3 ⇒ b =-3
2-c = 1 ⇒ -c =-1 ⇒ c = 1
por lo tanto el punto es D = (7,-3,1)



Para que sea un rectángulo el producto escalar de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ ha de ser nulo. Como los vectores son $\overrightarrow{AB}$=(-3, 2, 1) y $\overrightarrow{BC}$= (6, 4, -1).el producto es $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ = -3.6 +2.4+1.(-1) = -18+8-2 = -12 ≠ 0, no es un rectángulo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dados los puntos A = (1, 2, 3), B = (-1, 3, 0), C = (3, 4, -5) y D = (1, 0, 5)
Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$.
Solución: $\overrightarrow{AB}$ = (-2, 1, -3), $\overrightarrow{BC}$ = (4, 1, -5), $\overrightarrow{CD}$ = (-2, -4, 10), $\overrightarrow{DA}$ = (0, 2, -2), $\overrightarrow{AC}$ = (2, 2,-3)

2.- Dados los puntos A = (1, 2, 3), B = (-1, 3, 0), C = (3, 4, -5) y D = (1, 0, 5)
Halla el punto medio de los segmentos AB, BC, CD, DA, AC.
Solución: M = $\left(0,\ \frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, N = $\left(1,\ \frac{7}{2},-\frac{5}{2}\right)$, O = *(2, 2, 0)*, P = *(1, 1, 4)*, Q = *(2, 3, -1)*.

3.- Halla las coordenadas de los puntos que dividen en tres segmentos iguales el segmento de extremos A = (3, -5, 1) y B = (-3, 1, 13)
Solución: M = (1,-3, 5) y N = (-1,-1, 9),

4.- Sean A = (1, -3, 5), B = (0, 7, 2) y C = (-1, 5, 6) los vértices de un triángulo. Calcula las coordenadas de los puntos medios de cada segmento y del baricentro del triángulo.
Solución: Puntos medios $\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 6, 4\right)$ *y* $\left(0, 1, \frac{11}{2}\right)$ *Baricentro: G =* $\left(0, 3, \frac{13}{3}\right)$

5.- Sean A(2,-1,3), B(0,4,1) y C(1,1,0) los vértices de un triángulo. Calcula las coordenadas de los del baricentro del triángulo.
Solución: B = $\left(1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

6.- Dado el vector $\overrightarrow{AB}$ = (2, 3, 4) y el punto B = (5, -3, 7), halla las coordenadas del punto A.
Solución: A = (3, -6, 3)

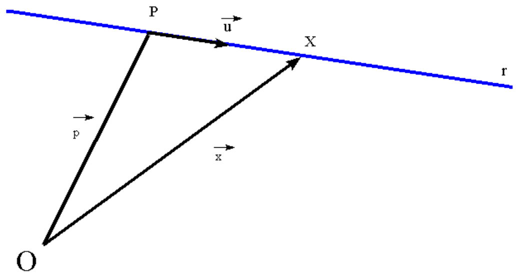
7.- Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A = (1, 0, 0) y B = (0, 1, 0) y las del centro M = (0, 0, 1). Halla las coordenadas de los vértices C y D.
Solución: C = (-1, 0, 2), D = (0, -1, 2).

8.- Las coordenadas de los puntos medios de un triángulo ABC son M = (1, 0, 0), N = (0, 1, 0) y P = (0,0, 1). Halla las coordenadas de los vértices A, B y C.
Solución: A = (1, 1,-1), B = (-1, 1, 1) C = (1, -1, 1)

10.- En un triángulo ABC el baricentro es G = (1, 2, 1). El punto medio de $\overrightarrow{BC}$ es M = (2, 4, 6) y el punto medio de $\overrightarrow{AC}$ es N = (3, 2, 1). Halla las coordenadas de A, B y C.
Solución: A(-1,-2,9), B(-3,2,1), C(7,6,11)

2.2.- RECTAS.

1.-Ecuaciones de la recta.



Una recta queda determinada mediante un punto P y un vector director $\vec{u}$.

- **Vectorial**: $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\,\vec{u}$

- **Paramétricas**:
$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda\, u_1 \\ y = p_2 + \lambda\, u_2 \\ z = p_3 + \lambda\, u_3 \end{cases}$$

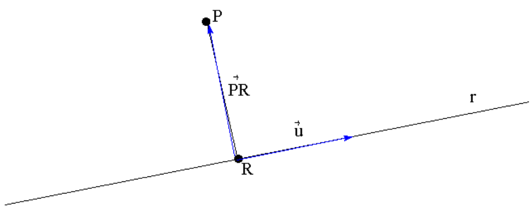
- **Continua**: $\dfrac{x - p_1}{u_1} = \dfrac{y - p_2}{u_2} = \dfrac{z - p_3}{u_3}$

- **Que pasa por dos puntos**: $\dfrac{x - p_1}{q_1 - p_1} = \dfrac{y - p_2}{q_2 - p_2} = \dfrac{z - p_3}{q_3 - p_3}$

- **Implícita**: Viene dada como intersección de dos planos:
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

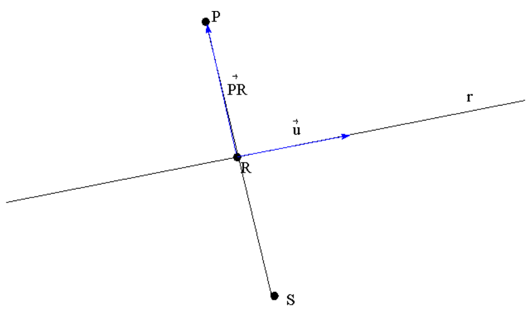
2.- Proyección ortogonal de un punto sobre una recta.

La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r es el pie de la perpendicular trazada a la recta desde el punto.
Para hallarlo se escoge el punto genérico de la recta R y se obliga a que el vector $\overrightarrow{PR}$ y el director de la recta $\vec{u}$ sean ortogonales.



3.- Punto simétrico de uno dado respecto a una recta.

El punto simétrico de uno dado P respecto a una recta r es el simétrico respecto a la proyección del punto P sobre la recta.
Se determina el punto R donde la perpendicular trazada a la recta desde el punto corta a ésta. A continuación el problema se reduce a hallar el punto simétrico de P respecto de R.



4.- Puntos alineados.

Dos o más puntos están alineados cuando pertenecen a la misma recta. Si A, B, C,...Z están alineados se cumple que $rg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \ldots, \overrightarrow{AZ}) = 1$

EJEMPLOS

1.- Obtén las ecuaciones de la recta que pasa por P = (0, 1, -3) y es paralela al vector $\vec{u}$ = (1, -5, 0).

Resolución

- La ecuación vectorial de la recta es::
  (x, y, z) = (0, 1, -3) + λ(1, -5, 0) = (λ, 1-5λ, -3)

- De aquí se pueden obtener las ecuaciones paramétricas:
  $$\begin{cases} x = \quad l \\ y = 1 - 5l \\ z = -3 \end{cases}$$

- Despejando λ e igualando las ecuaciones, se obtiene la ecuación continua:
  $$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+3}{0}$$

2.- Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por A =(1, 7, 3) y B = (2, -1, -8), y da dos puntos de ella, distintos de los anteriores.

Resolución

Tomamos como vector de posición $\overrightarrow{OA}$ = (1, 7, 3) y como vector director $\overrightarrow{AB}$ de coordenadas $\overrightarrow{AB}$ = (2 -1, -8) - (1 -7, -8 -3) = (1, -8, -11). Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1 + \ l \\ y = 7 - 8l \\ z = 3 - 11l \end{cases}$$

Para obtener puntos de la distintos de los anteriores damos valores a λ:
λ = 1: x = 2, y = -1, z =-8. C = (2, -1, -8).
λ =-1: x = 0, y =15, z =14. D = (0, 15,1 4).

3.- Comprueba si alguno de los puntos A = (1, 0, -1), B = (-2, 17, -1) y C = (1, 0, 0) pertenece a la recta r: $\begin{cases} \mathbf{x = \ 1 -\ \ddot{e}} \\ \mathbf{y = \ 0 + 3\ddot{e}} \\ \mathbf{z \ = -1} \end{cases}$

Resolución

- El punto A sí pertenece a la recta ya que se obtiene para λ = 0.

- Para el punto B hallemos λ en las coordenada x: -2 = 1-λ ⇒ λ = 3. sustituimos en la coordenada y ya que z efectivamente vale -1, como y=3(3) = 9 B pertenece a la recta.

- El punto C no pertenece a la recta ya que z ≠ -1.

4.- Encuentra un vector director de la recta

r: $\begin{cases} \mathbf{2x - y + 3z + 4 = 0} \\ \mathbf{x + 2y - z - 11 = 0} \end{cases}$

Resolución

La recta está dada en forma implícita. el vector director $\vec{u}$ de la recta es el producto vectorial de los vectores $\vec{n}_1$ = (2, -1, 3) formado por los coeficientes de la 1ª ecuación y $\vec{n}_2$ = (1, 2, -1) formado por los coeficientes de la 2ª:

$$\vec{n}_1 x\, \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 5, 5) \approx (-1,1,1)$$

5.- Halla las ecuaciones de la recta r: $\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ x + 2y - z - 11 = 0 \end{cases}$ en forma paramétrica y continua.

Resolución

Tomamos z = λ, obteniendo el sistema compatible indeterminado:

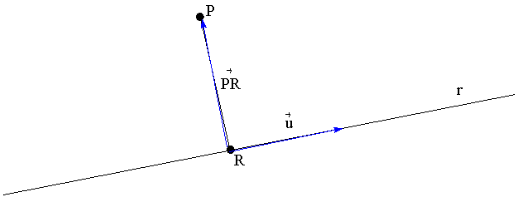
$$\begin{cases} 2x - y = -4 - 3l \\ x + 2y = 11 + l \end{cases}$$

Cuya solución da las ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases} x = 3/5 - \text{ë} \\ y = 26/5 + \text{ë} \\ z = \text{ë} \end{cases}$$

La ecuación continua es: $\frac{5x-3}{-5} = \frac{5y-26}{5} = \frac{5z}{5}$

6.- Halla la proyección ortogonal del punto A = (2, 0,1) respecto de la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$



Resolución

El punto genérico de r es (1+2λ, λ, 1+λ) y por lo tanto $\overrightarrow{PR}$ = (-1+2λ, λ, λ). Obligamos a que el producto escalar del vector $\overrightarrow{PR}$ y el vector director de la recta $\vec{u}$ (2,1,1) sea nulo:

$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow$ 4λ-2+λ+λ = 6λ- 2 = 0 ⇒ λ = $\frac{1}{3}$

Sustituyendo el valor de λ en la ecuación de la recta obtenemos el punto:

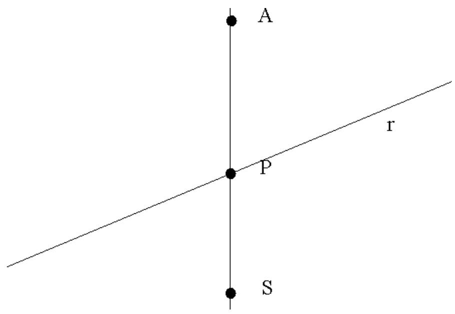
$$\begin{cases} x = 1 + 2.(1/3) \\ y = 1/3 \\ z = 1 + 1/3 \end{cases}$$

el punto pedido es P = $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

7.- Halla el punto simétrico del punto A = (2, 0, 1) respecto de la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$

Resolución

Se determina el punto P donde la perpendicular trazada a la recta desde el punto corta a ésta. Dicha recta pasa por un punto de r y su vector director ha de ser perpendicular a $\overrightarrow{AP}$. El punto genérico de la recta es (1+2t, t,1+t) y por lo tanto $\overrightarrow{AP}$ será (-1+2t, t, t) y obligando a que el producto de ambos vectores sea nulo:



$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow$ (-1+2t, t, t).(2, 1, 1) = 4t-2+t+t = 6t- 2 = 0 $\Rightarrow t = \frac{1}{3}$

El punto buscado es P = $\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

Sólo falta hallar el simétrico de A = (2, 0, 1) respecto del punto P:

$\frac{5}{3} = \frac{2+x}{2} \Rightarrow$ x = $\frac{4}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{0+y}{2} \Rightarrow$ y = $\frac{2}{3}$

$\frac{4}{3} = \frac{1+z}{2} \Rightarrow$ z = $\frac{5}{3}$

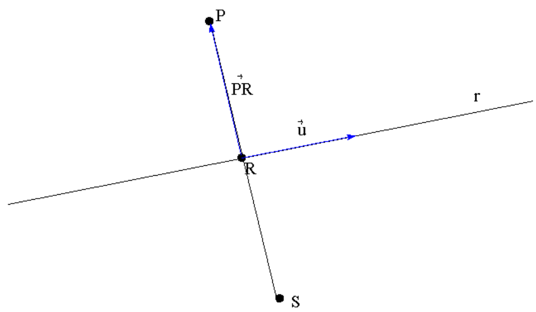
El punto simétrico es: S = $\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$

8.- Calcula el simétrico del punto P=(1,0,1) respecto de la recta r: $\begin{cases} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y + z = 0} \end{cases}$

Resolución

Ponemos la recta en forma paramétrica tomando z = λ:

$\begin{cases} x = 2 \\ y = \quad l \\ z = \ -l \end{cases}$



Su vector director es $\vec{u}$ = (0, 1, -1) y un punto genérico es R = (2, λ, -λ). El vector que une los puntos P y R es $\overrightarrow{PR}$ = (1,λ, –1–λ). Como ambos vectores han de ser perpendiculares:

$\overrightarrow{PR}\cdot\vec{u}$ = (1, λ, -1-λ).(0, 1, -1) = 1+2λ = 0 $\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

El punto buscado es R = $\left(2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Se halla el simétrico de P = (1, 0, 1) respecto del punto R:

2 $= \frac{1+x}{2} \Rightarrow$ x = 3,

$-\frac{1}{2} = \frac{0+y}{2} \Rightarrow$ y = -1,

$\frac{1}{2} = \frac{1+z}{2} \Rightarrow z = 0$

El punto simétrico es S = (3, -1, 0)

9.- Comprueba si están alineados los puntos:
A = (1, 2, 3), B = (2, 3, 4), C = (0, 1, 2) y D = (-1, 0, 1)

Resolución

Cuatro puntos A, B, C y D están alineados se cumple que rg($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$) = 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

El rango es evidentemente 1 ya que las tres filas son proporcionales.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A = (1, 2, -1) y tiene la dirección del vector $\vec{u}$ = (-1, 0, 1). Escríbela en forma vectorial y paramétrica.

Solución: (x, y, z) = (1, 2, -1) + λ (-1, 0, 1) , $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

2.- Encuentra un vector director de la recta

r: $\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Solución: (-5, 5, 5)

3.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A = (1, 2, 3) y tiene la dirección del vector $\vec{u}$ = (-2, 1, 0). Escríbela en forma vectorial, paramétrica y continua.

Solución: (x, y, z) = (1, 2, 3) + λ*(-2,1,0)*

4.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A= (2, 3, 4) y es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ = (2, 0, 6) y $\vec{v}$ = (3, 0, 1)

Solución: (x, y, z) = (2, 0, 6) + λ*(3, 0, 1)*

5.- Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A = (2, 3, 4) y B = (1, 3, -2) en forma vectorial, paramétrica y continua.

Solución: (x, y, z) = (2, 3, 4) + λ*(-1,0,6)*

6.- Dado el triángulo de vértices A = (2, 2, 4), B = (3, 6, 7) y C = (-3, 2 -1), halla la ecuación de la mediana que parte del vértice A en forma continua:

Solución: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-1}$

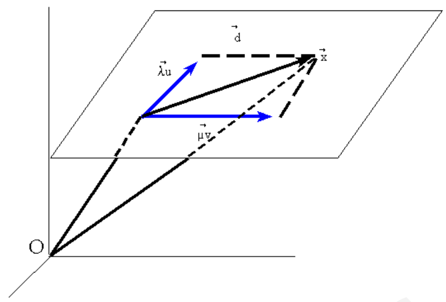
7.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A = (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta r: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x \quad + z = 2 \end{cases}$

Solución: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$

2.3.- PLANOS.

1.- Ecuaciones del plano.

Un plano queda determinado mediante un punto P y dos vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



- **Vectorial**: $\vec{x} = \vec{p} + ë\,\vec{u} + ì\,\vec{v}$

- **Paramétricas**: $\begin{cases} x = p_1 + l\,u_1 + m\,v_1 \\ y = p_2 + l\,u_2 + m\,v_2 \\ z = p_3 + l\,u_3 + m\,v_3 \end{cases}$

- **Implícita o general**: $\begin{vmatrix} x - p_1 & u_1 & v_1 \\ y - p_2 & u_2 & v_2 \\ z - p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + cz + d = 0$

- **Normal**:

  Siendo $\vec{n}$ = (A, B, C) el vector normal del plano y X = (x_1, y_1, z_1) un punto del plano:
  $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

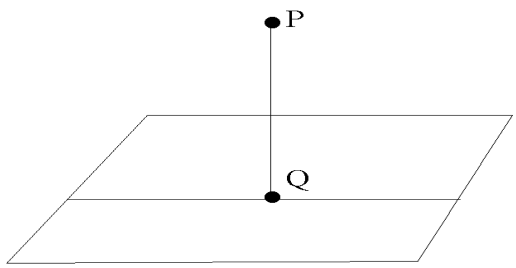
- **Segmentaria**: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

- **Que pasa por tres puntos**: $\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

2.- Proyección ortogonal de un punto sobre un plano.

La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π es la intersección con el plano de la perpendicular trazada a éste desde P.

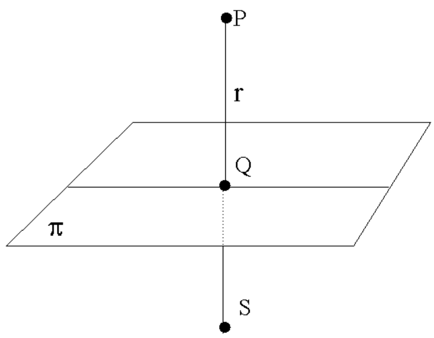
Se escoge la recta r cuyo vector director es el vector característico del plano y pasa por el punto P y se resuelve el sistema formado con la ecuación del plano.



3.- Punto simétrico de un punto respecto a un plano.

El punto simétrico de uno dado P respecto a un plano π es el punto simétrico respecto a la proyección del punto P sobre el plano.

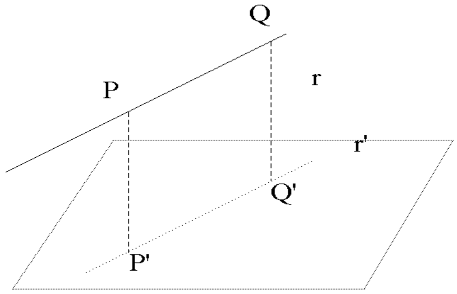
Se determina el punto Q donde la perpendicular trazada a el plano desde el punto corta a éste. A continuación el problema se reduce a hallar el punto simétrico de P respecto de Q.



4.- Proyección ortogonal de una recta r sobre un plano.

La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano π es una recta contenida den dicho plano que se determina mediante la proyección de los puntos de la recta sobre π.

Para hallarla se escogen dos puntos de la recta r y se proyectan sobre el plano. la recta r' buscada es la que determinan ambos.



5.- Puntos coplanarios.

Cuatro o más puntos del espacio son coplanarios cuando pertenecen al mismo plano. Si A, B, C,...Z son coplanarios se cumple que rg($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, ..., $\overrightarrow{AZ}$) = 2

EJEMPLOS

1.- Halla las ecuaciones del plano determinado por el punto P = (1, 2, 1) y los vectores directores $\vec{u}$ = (1, 0, 1) y $\vec{v}$ = (0, 1, 1)

Resolución

- Vectorial: (x, y, z) = (1,2,1) +λ(1,0,1) +μ(0,1,1)
- Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + ë \\ y = 2 \quad + ì \\ z = 1 + ë + ì \end{cases}$
- Implícita o general: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi$: x +y -z -2 = 0

2.- Halla la ecuación general del plano que pasa por el punto P = (1, 2, 1) y es perpendicular a la recta $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{-2}$

Resolución

La ecuación es el producto del vector $\overrightarrow{QX}.\vec{n}$, siendo Q un punto de la recta y $\vec{n}$ el vector normal al plano, que será paralelo al vector director de la recta. Si Q = (1, 3, 0) tenemos que $\overrightarrow{QX}$ = (x - 1, y - 2, z -1) y $\vec{n}$ = (-1, 4, -2), luego
(-1, 4, -2).(x - 1, y - 2, z-1) = 0 ⇒ -1.(x - 1) +4.(y - 2) - 2(z - 1) = 0

La ecuación del plano es π ≡ x - 4y + 2z +5 = 0

3.- Dados los puntos A = (1, 2, 0), B = (1, 5, a), C = (3, 3, 1) y D = (2, 4, -3), halla los valores de a para los que los cuatro estén sobre el mismo plano.

Resolución

Los puntos A, B, C y D están en un mismo plano si rg($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$) = 2, que ocurre si el determinante formado por sus coordenadas es nulo. Como los vectores son $\overrightarrow{AB}$ = (0, 3, a), $\overrightarrow{AC}$ = (2, 1, 1) y $\overrightarrow{AD}$ = (1,2,-3), tenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4a+3 -a +18 = 0 \Rightarrow 3a = -21$$

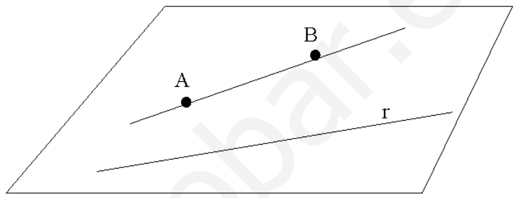
Los cuatro puntos están sobre un mismo plano si a = -7

4.- Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta determinada por los puntos A = (1, 3, 2) y B = (0, 1, 3) y a la recta s: $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = -3 \\ 2x - y - z = -3 \end{array}\right.$ **sabiendo que el punto P= (2, 1, 2) pertenece al plano.**

Resolución

Al ser el plano paralelo a ambas rectas, contiene representantes de los vectores directores de éstas. Un vector director de la recta determinada por A y B es:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ = (-1, -2, 1).



Un vector director de la recta s es el obtenido mediante el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta.

$$\vec{v} = \vec{n}_1 x \, \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (0, -1, -3)$$

Para hallar el plano en forma implícita o general debemos calcular el determinante formado los dos vectores directores y el que uniría un punto genérico del plano con el punto P = (2, 1, 2) igualando el resultado a 0, es decir:

$$\pi = \begin{vmatrix} -1 & 0 & x-2 \\ -2 & -1 & y-1 \\ 1 & -3 & z-2 \end{vmatrix} = 7(x - 2) - 3(y - 1) + (z - 2) = 0$$

El plano pedido es: π: 7x -3y + z -13 = 0

5.- Comprueba si el punto P = (15, 2, 7) pertenece al plano

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} x = 3 - 5ë + ì \\ y = 1 - ë \\ z = \quad ì \end{array}\right.$$

Resolución

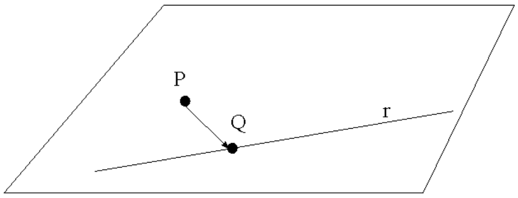
Ponemos la ecuación del plano en forma general. Sustituyendo μ = z, y λ =1-y queda la ecuación x = 3-5(1-y)+z $\Rightarrow$ x-5y-z+2 = 0

El punto pertenece al plano, ya que cumple la ecuación: 15-5.2-7+2 = 0.

6.- Calcula la ecuación del plano π que contiene a la recta r / $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{array}\right.$ **y al punto P = (1, 1, 0).**

Resolución

Se hallan las ecuaciones paramétricas de la recta despejando y tomando como parámetro y = λ:



$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2l \\ y = \quad l \\ z = 3 - \ l \end{cases}$$

La recta pasa por el punto Q = (-1, 0, 3), y tiene el vector director $\vec{u}$ = (2, 1, -1).

El plano pasa por el punto P = (1,1,0) y tiene vectores directores $\vec{u}$ = (2, 1,-1) y $\overrightarrow{PQ}$ = (-2,-1,3). Luego las ecuaciones paramétricas del plano π son:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\text{ë} - 2\text{ì} \\ y = \quad 1 + \text{ë} - \text{ì} \\ z = \qquad -\text{ë} + 3\text{ì} \end{cases}$$

la ecuación implícita es: x +2y -3 = 0

7.- Halla la ecuación del plano π perpendicular a los planos π_1: x-2y+z-1=0 y π_2: 2x - y-z+3=0, que contiene al punto P(2,-1,0).

Resolución

El plano es perpendicular a los planos dados y su vector característico $\vec{n}$ es perpendicular a ambos vectores característicos $\vec{n}_1$ =(1,–2,1) y $\vec{n}_2$ = (2, -1, -1):

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (3, 3, 3)$$

La ecuación del plano buscado es 3x+3y+3z + D = 0. Como el punto P=(2,-1,0) pertenece a él, debe verificar su ecuación:
3A2 + 3A(-1) + 3A0 + D = 0 ⇒ D = -3

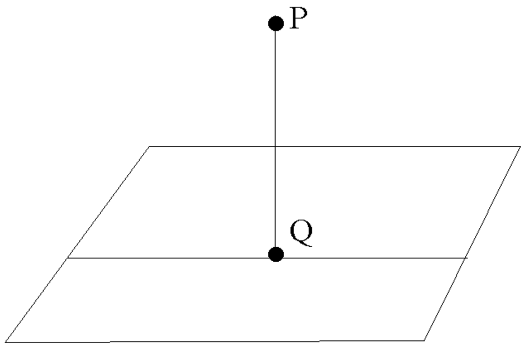
La ecuación de π es 3x + 3y + 3z - 3 = 0 ⇒ : π ≡ x + y + z - 1 = 0

8.- Halla la proyección ortogonal del punto P = (3, 2, 1) respecto del plano x + y + z + 3 = 0

Resolución

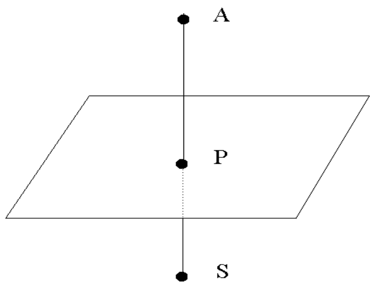
La recta perpendicular al plano que pasa por el punto P = (3, 2, 1) y tiene como vector director $\vec{v}$ = (1, 1, 1) es:

r: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{1}$



con punto genérico (3+ λ, 2+λ, 1+λ)
El punto buscado, Q, es la intersección de la recta dada y el plano anterior.
3+ λ+ 2+λ + 1+λ +3 = 0 ⇒ 3λ+9 = 0 ⇒ λ = -3 ⇒ Q = (0, -1, -2)

9.- Halla el punto simétrico de A = (3, 2, 1) respecto del plano x+y+ z+21 =0



Resolución
Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto A = (3, 2, 1) y tiene como vector director $\vec{v}$ =(1, 1, 1).

r: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$

con punto genérico (3+ λ, 2+λ, 1+λ)

El punto es la intersección de la recta dada y el plano anterior:
3+ λ+ 2+λ + 1+λ +21 = 0 ⇒ 3λ+27 = 0 ⇒ λ = -9

El punto es P = (-6, -7, -8).

Sólo falta hallar el simétrico de A = (3, 2,1) respecto de P = (-6,-7,-8):

-6 = $\frac{p_1 + x}{2}$ ⇒ x = -15

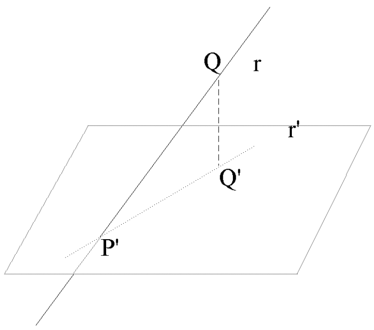
-7 = $\frac{p_2 + y}{2}$ ⇒ y = -16

-8 = $\frac{p_3 + z}{2}$ ⇒ z = -17

El punto buscado es S = (-15, -16, -17)

10.- Halla la proyección ortogonal de la recta t: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ sobre el plano π:2x-y+z+1 = 0.

Resolución
Obtenemos P’ resolviendo el sistema formado por las ecuaciones del plano π y las de la recta r. Sustituyendo en la ecuación del plano un punto genérico de la recta (1+λ, 2+λ, -1+λ):
2(1+λ)-2(2+λ)+(-1+λ)+1=0⇒2λ=0 ⇒λ=0



El punto es P’ = (1, 2, -1)

El punto Q de la recta lo obtenemos, por ejemplo, para λ = 1; es Q = (2, 3, 0).

Para obtener Q’, se efectúa la intersección de la recta que pasa por Q perpendicular al plano π con dicho plano. Un punto genérico de la recta es (2+2λ, 3-λ, λ). Sustituyendo en la ecuación del plano:

2(2+2λ) -(3-λ) +λ +1 = 0 ⇒ 6λ+2= 0 ⇒ λ = $-\frac{1}{3}$

Obteniendo el punto Q’ = $\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

La recta t' pedida es la que pasa por los puntos P’ y Q’, es decir, que pasa por P’ = (1, 2, –1) y tiene como vector director $\overrightarrow{P'Q'} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ≈ (1, 4, 2).

La recta es:

$$\begin{cases} x = 1 + l \\ y = 2 + 4l \\ z = -1 + 2l \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P = (2, 3, 5) y es paralelo a los vectores $\vec{u}$ = (-1, –2, –3) y $\vec{v}$ = (1, 3, 5)
Solución: x - 2y + z - 1= 0

2.- Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A = (3, -1, 5), B = (1, 0, 0) y C =(0, 3,-4).
Solución: 11x-3y-5z-11=0

3.- Comprueba si el punto P = (1, 5, 10) pertenece al plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 2 - l + m \\ y = 3 - 2l + 3m \\ z = 5 - 3l + 5m \end{cases}$

Solución: Sí pertenece

4.- Calcula a para que el punto P = (2, a, 7) pertenezca al plano 2x - 5y + 3z - 11 = 0
Solución: $a = \dfrac{14}{5}$

5.- Escribe las ecuaciones paramétricas del plano 2x - y + 3z = 11.

Solución: $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \text{ë} + 3\text{ì} \\ y = 11\text{ë} \\ z = 3 + 3\text{ë} - 2\text{ì} \end{cases}$

6.- Halla la ecuación del plano determinado por el punto P = (1, 2, 3) y los vectores $\vec{u}$ =(2, -1, 5) y $\vec{v}$ = (3, 2, 4)
Solución: -2x+y+z-3 = 0

7.- Halla la ecuación del plano determinado por el punto P = (1, 0, 1) y los vectores $\vec{u}$ =(1, -1, 0) y $\vec{v}$ = (0, 3, 2)
Solución: 2x+2y-3z+1 = 0

8.- Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A = (3, -1, 2) y cuyo vector normal es $\vec{n}$ = (2, 1, 8)
Solución: 2x+y+8z-21 = 0

9.- Un plano tiene como vectores directores $\vec{u}$ = (1, 0, 1) y $\vec{v}$ = (0, 1, 1). Halla el vector normal al plano.
Solución: $\vec{n}$ *= (-1, -1, 1)*

10.- Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A = (3, 2, -1) y B = (4, 0, 2) y es perpendicular al plano x - 5y + 2z – 6 = 0.
Solución: 11x+y-3z-38 = 0.

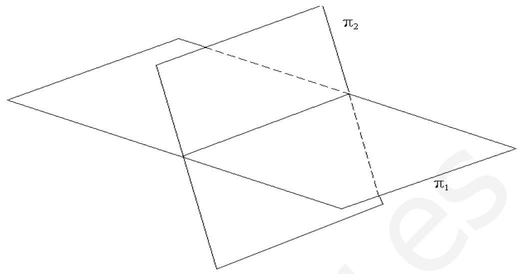
11.- Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y por los puntos A = (2, 3, 1) y B = (5, 0, 4).
Solución: 4x-y-5z = 0

2.4.- POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Dados los planos π_1: Ax + By + Cz + D =0 y π_2: A'x + B'y + C'z + D' = 0 formamos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

1.- Planos secantes.

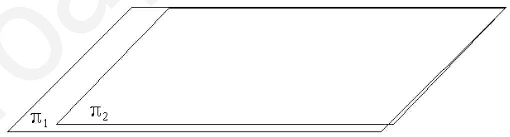


Dos planos son secantes cuando tienen una recta en común. El sistema formado por los planos ha de ser compatible indeterminado. Su solución será una recta.
rg(M) = 2 y rg(M*) = 2

2.- Planos paralelos.

Dos planos son paralelos cuando no tiene ningún punto en común. El sistema formado por los planos ha de ser incompatible.
rg(M) = 1 y rg(M*) = 2

3.- Planos coincidentes.



Dos planos son coincidentes cuando tienen todos los puntos en común. El sistema formado por los planos ha de ser compatible indeterminado. Su solución será un plano.
rg(M) = 1 y rg(M*) = 1

4.- Haz de planos paralelos

Dado un plano de ecuación general π: Ax + By +Cz + D = 0, los planos paralelos al mismo son de la forma Ax + By + Cz + k = 0 ya que el vector normal de todos ellos será $\vec{n}$ = (A, B, C).

EJEMPLOS

1.- Estudia la posición relativa de los planos
π_1: x - 3y + 4z - 11 = 0
π_2: 4x - 12y + 16z + 40 = 0

Resolución:
Las matrices del sistema y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -12 & 16 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -11 \\ 4 & -12 & 16 & 40 \end{pmatrix}$$

Como rg(M) = 1 y rg(M*) = 2, los planos son paralelos.

2.- Calcula la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (1, 2, 3). Haz lo mismo para el punto $\left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$.)Existe alguna relación

entre los dos planos que has determinado? Explica lo que ocurre si se hace lo mismo para cualquier punto de la forma (t, 2t, 3t) siendo t un número real cualquiera. Justifica todas las respuestas.

Resolución:

El plano cuyo punto más cercano al origen es (1,2,3) tiene como vector normal $\vec{u} = (1,2,3)$ ya que está sobre la perpendicular trazada desde el punto al plano:

$1.(x-1) +2(y-2)+3.(z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x+2y+3z-14 = 0$

Si el punto más próximo al origen fuera $\left(-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2}\right)$ el plano π' pedido tiene como vector perpendicular $\vec{n}' = \left(-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2}\right)$ y pasa por el punto $\left(-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2}\right)$:

$-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-1(y+1)-\frac{3}{2}\left(z+\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x+2y+3z+7 = 0$

Los planos π y π' son paralelos, pues lo son sus vectores característicos. Si se realiza la misma operación para puntos de una recta de la forma (t, 2t, 3t), siempre se obtienen planos paralelos, pues los vectores asociados a los planos obtenidos serán proporcionales al vector (1, 2, 3), vector director de la recta

3.- Estudia la posición relativa de los planos
π_1: x + y - 5z +4 = 0
π_2: 3x - y + 2z - 1 = 0

Resolución:

Escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Como rg(M) = 2 y rg(M*) = 2, los planos se cortan en la recta:

$$\begin{cases} x+y-5z+4=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

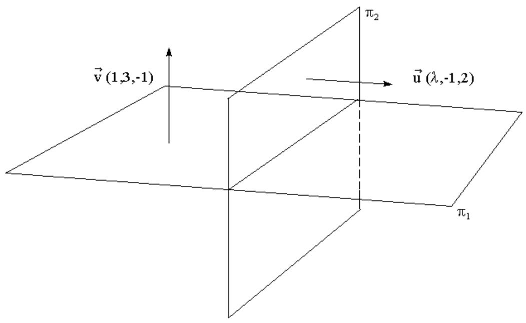
4.- Considera los planos de ecuaciones
π_1 /λx -y +2z = 1, π_2 /x +3y -z = -(λ +1), π_3 /3x +λy +z = -λ.
a) Determina para qué valores de λ son π_1 y π_2 perpendiculares y, en ese caso, halla un vector perpendicular a ambos planos.
b) Determina para qué valores de λ los tres planos contienen una recta común y determina las ecuaciones paramétricas de la misma.-

Resolución:

a) Para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares, los vectores asociados o característicos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ han de ser también perpendiculares y por lo tanto su producto escalar ha de ser cero:

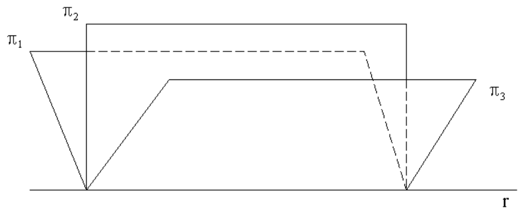
$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow (\lambda, -1, 2).(1, 3, -1) = 0$

$\lambda -3 -2 = 0 \Rightarrow \lambda = 5$



No existe un vector que sea perpendicular a la vez a los dos planos, pues los que son perpendiculares a π_1 serán paralelos a π_2 y viceversa.

b) Para que tres planos contengan una recta r común, es necesario que el sistema formado por sus ecuaciones sea compatible indeterminado.



$$\begin{cases} \lambda x - y + 2z = 1 \\ x + 3y - z = -\lambda - 1 \\ 3x + \lambda y + z = -\lambda \end{cases}$$

y que sus soluciones sean los puntos de una recta. Aplicando el Teorema de Rouché los rangos de la matriz de los coeficientes y la ampliada son 2.

M = $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ y M* = $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -\lambda-1 \\ 3 & \lambda & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

Como rg(M) = 2 su determinante ha de ser nulo:

Det(M) = $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & \lambda & 1 \end{vmatrix}$ = 0 $\Rightarrow$ $\lambda^2 + 5\lambda - 14 = 0$ $\Rightarrow \lambda = 2$ ó $\lambda = -7$

- Si $\lambda = -7$, rg(M) = 2 pues $|M|$ = 0 y hay un menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$=-20≠0

  pero el rango de M* = 3, ya que orlando el menor no nulo con las columnas del término independiente obtenemos el determinante:

  $\begin{vmatrix} -7 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & -7 & 7 \end{vmatrix}$ = 9(-49 - 3) ≠ 0

  el sistema es incompatible y el valor λ=-7 no nos sirve.

- Si λ =2, rg(M) = 2 pues $|M|$ = 0 y hay un menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ = 7 ≠ 0

  y el rango de M* = 2, ya que orlando el menor no nulo con las columnas de término independiente tenemos el determinante:

  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ = 0

  para λ=2 los tres planos contienen una recta común:

  $$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 2z = 1 \\ x + 3y - z = -3 \\ 3x + 2y + z = -2 \end{array}\right\}$$

  Basta obtener la recta determinada por π_1 y π_2, tomando z = λ

  $$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 2z = 1 \\ x + 3y - z = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 - 2z \\ x + 3y = -3 + z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 - 2\lambda \\ x + 3y = -3 + \lambda \end{array}\right\}$$

  Restando a la 2ª ecuación la primera:

  $-7y = 7 - 4l \Rightarrow y = -1 + \frac{4}{7} l$

  Sustituyendo en la segunda ecuación el valor de y:

  $x = -3y - 3 + \lambda = 3 - \frac{12}{7}\lambda - 3 + \lambda = -\frac{5}{7}\lambda$

La recta r es

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{5}{7}\text{ë} \\ y = -1+\frac{4}{7}\text{ë} \\ z = \text{ë} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -5\text{ë} \\ y = -1+4\text{ë} \\ z = 7\text{ë} \end{array}\right.$$

5.- Determina la ecuación del haz de planos paralelos a π: x + y + z + 2 = 0 y la ecuación del plano que pasa por el punto P = (1, 0, 1).

Resolución:
La ecuación del haz de planos paralelos será: $x + y + z + k = 0$

Sustituyendo los valores del punto P en el plano, ya que pertenece a éste:
$1+0+1+k = 0 \Rightarrow 2+k = 0 \Rightarrow k = -2$

La ecuación del plano pedido será:
$\pi' \equiv x + y + z - 2 = 0$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos:
π_1: $3x - y + 2z - 1 = 0$
π_2: $x + y - 5z + 4 = 0$
Solución: $r/ \frac{x}{3} = \frac{y-1}{17} = \frac{z-1}{4}$

2.- Estudia la posición relativa de los planos:
π_1: $x + y - 5z + 4 = 0$
π_2: $-3x - 3y + 15z - 1 = 0$
Solución: Los planos son paralelos y distintos

3.- Sean dos planos de ecuaciones π_1:$ax+9y-3z = 8$ y π_2:$x+ay-z = 0$. Sea r la recta intersección de ambos, si existe. Determina el valor de a para que:
a) Los planos sean paralelos.
b) Los planos sean perpendiculares.
c) La recta corte al plano OXY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea $\sqrt{2}$
Solución: a) a = 3, b) a= $-\frac{3}{10}$ *, c) a=7,-7,1 y –1.*

4.- Halla la ecuación del plano π perpendicular a los planos π_1:$x - 2y + z - 1 = 0$ y π_2: $2x-y-z+3=0$, que contiene al punto P=(2,-1,0).
Solución: x+y+z-1 = 0

5.- Estudia la posición relativa de los planos
π_1: $x + y - 5z + 4 = 0$
π_2: $-3x - 3y + 15z + 12 = 0$
Solución: Los planos coinciden

6.- Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P = (1, 1, 1) y es paralelo al plano $3x-5y+z-5 = 0$
Solución: 3x-5y+z+1 = 0.

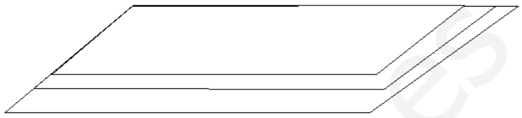
2.5.- POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Dados los planos π_1:Ax + By + Cz + D=0, π_2:A'x + B'y + C'z +D'=0, π_3:A"x + B"y + C"z + D"=0 formamos la matriz asociada al sistema y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

1.- Planos coincidentes

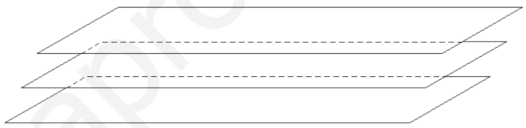
Tres planos son coincidentes cuando el sistema ha de ser compatible indeterminado.
rg(M) = rg(M*) = 1



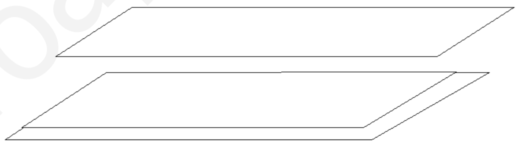
2.- Planos paralelos

Tres planos son paralelos cuando no tienen ningún punto en común y además dos de ellos tienen el vector característico proporcional. El sistema ha de ser incompatible: rg(M) = 1, rg(M*) = 2.

- Si los términos independientes de las ecuaciones no son proporcionales entre si los tres planos son paralelos.



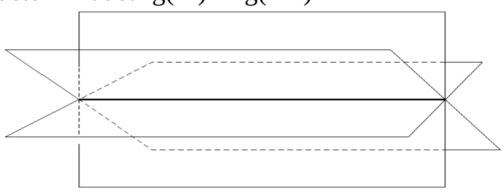
- Si los términos independientes de las ecuaciones de dos planos son proporcionales, dos de ellos coinciden y el otro plano es paralelo a los anteriores.



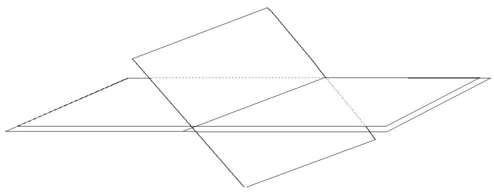
3.- Planos secantes en una recta

Tres planos son secantes en una recta cuando tienen infinitos puntos en común. El sistema formado por los planos ha de ser compatible indeterminado: rg(M) = rg(M*) = 2

- Si los vectores característicos de dos planos no son proporcionales entre si, los tres planos se cortan a lo largo de una recta, que será la arista común.



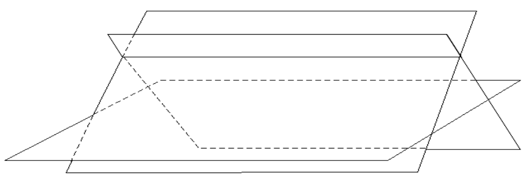
- Si los vectores característicos de dos planos son proporcionales entre si pero no lo son al tercero, dos de los planos serán coincidentes y cortan al otro a lo largo de una arista común.



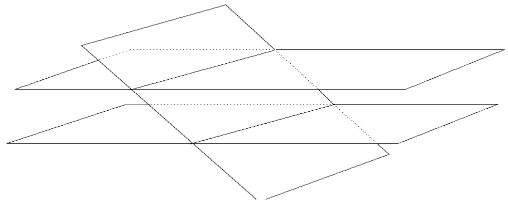
4.- Planos secantes dos a dos

Tres planos son secantes dos a dos formando rectas cuando no tienen ningún punto en común. El sistema formado por los planos ha de ser incompatible: rg(M) = 2, rg(M*) = 3

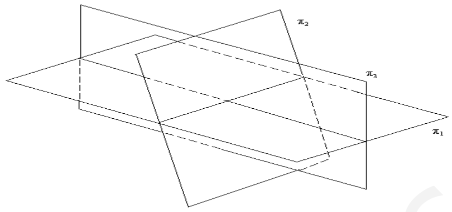
- Si los vectores característicos de dos planos no son proporcionales se cortan los planos formando rectas dos a dos.



- Si los vectores característicos de dos planos son proporcionales entre si, pero no al tercero, un plano corta a los otros dos a lo largo de rectas paralelas.

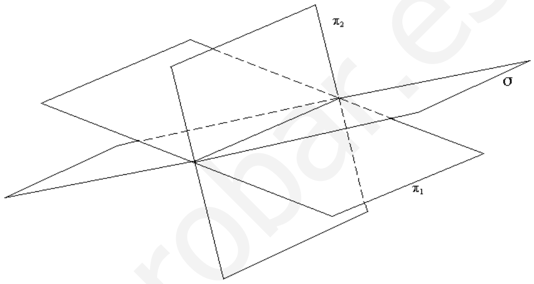


5.- Planos secantes en un punto



Tres planos son secantes en un punto cuando tienen un punto en común. El sistema ha de ser compatible determinado.
rg(M) = rg(M*) = 3

6.- Haz de planos secantes



Dados dos planos de ecuaciones π_1:Ax+By+Cz+D= 0, π_2: A'x+B'y+C'z+D'=0 con el rango de la matriz formada por sus coeficientes igual a 2 se llama haz de planos secantes al conjunto de planos que pasan por la recta base del haz siendo su ecuación:
$\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')=0$,
$\lambda,\mu\in \mathbb{R}$

EJEMPLOS

1.- Interpreta la intersección de los planos

$$\begin{cases} \mathbf{x + y - z = a} \\ \mathbf{x - y + 2z = 1} \\ \mathbf{2x + y + az = 0} \end{cases}$$

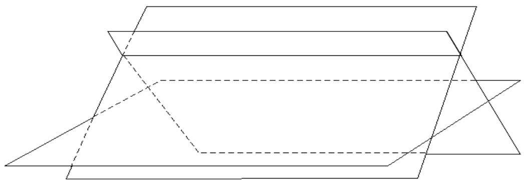
según los valores del parámetro a. Halla la intersección para a = 1.

Resolución:
Formamos las matrices del sistema y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

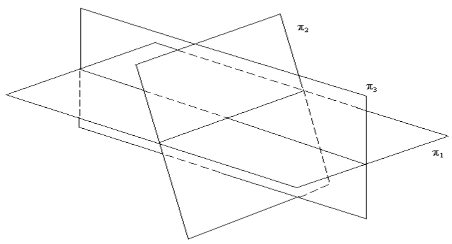
- Como det(M)=-2a-1 basta que a= $-\frac{1}{2}$ para que rg(M) = 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ y rg(M*) = 3, ya que orlando el menor no nulo con las columnas de término independiente tenemos un determinante no nulo.

  Como los vectores característicos no son proporcionales los tres planos se cortan dos a dos



- Para a = 1, det(M) = -3 $\neq$ 0, por lo tanto rg(M) = rg(M') = 3.

  Resolviendo el sistema obtenemos que los tres planos se cortan en el punto $\left(\frac{5}{3}, -2, -\frac{4}{3}\right)$



2.- Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta

r: $\begin{cases} \mathbf{x+y+z=1} \\ \mathbf{x-y=2} \end{cases}$

Resolución:
El plano buscado pertenece al haz de rectas de base r de ecuación:
$\lambda(x+y+z-1) +\mu(x-y-2) = 0$

Si pasa por (0,0,0) verifica la condición:
$\lambda(-1) +\mu(-2) = 0 \Rightarrow \lambda = -2\mu$

Sustituyendo valores:
$-2\Phi(x+y+z-1) +\mu(x-y-2) = 0$

luego el plano buscado es
$\pi \equiv x+3y+2z = 0$

3.- Considera los planos en el espacio de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{x+\ \ y+\ \ z=8} \\ \mathbf{ax+2y+bz=4} \\ \mathbf{ax+by+az=4} \end{cases}$$

describe su posición relativa según los valores de a y b y halla su intersección en el caso a = 1, b = 2.

Resolución:
Para estudiar la posición relativa de los planos, discutimos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ a & 2 & b & 4 \\ a & b & a & 4 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & b \\ a & b & a \end{vmatrix} = -(b-a)^2$$

- Si $a \neq b \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(A') = 3$, el sistema tendrá solución única y los tres planos se cortarán en un único punto formando un triedro.

- Si a = b la matriz de coeficientes y la ampliada son:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ a & 2 & a & 4 \\ a & a & a & 4 \end{pmatrix}$$

  orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix}$ con la columna de términos independientes obteniendo $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ a & 2 & 4 \\ a & a & 4 \end{vmatrix} = 4(2a^2-5a+2) = 0 \Rightarrow a = 2$ ó $a = \frac{1}{2}$

- Si a = b = 2 $\Rightarrow$ rg(A) =1, rg(B) =2 pues $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. El sistema es incompatible. Los planos π_2 y π_3 coinciden y π_1 sería paralelo a ellos.

- Si a = b = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(B) =2. El sistema es compatible indeterminado. Los planos π_1 y π_3 coinciden y π_2 los corta según una recta.

- Si a = b $\neq \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ $\Rightarrow$ rg(A) = 2, rg(B) =3. El sistema es incompatible Los planos π_1 y π_3 son paralelos y π_2 los corta.

- Si a = 1, b = 2:

  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = -1.

  Que es un sistema compatible determinado que resolvemos por Gauss:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

  con solución x = 12, y = -4, z = 0

4.- Discute la posición de los tres planos siguientes según los valores del parámetro a y calcula la intersección para a = -1.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{ax + y + z = a} \\ \mathbf{x + ay + z = a + 2} \\ \mathbf{x + y + az = -2(a+1)} \end{array}\right\}$$

Resolución:

Estudiamos cómo es el sistema formado por sus tres ecuaciones:

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$

- Si a $\neq$ 1 y a $\neq$-2 el sistema es compatible determinado rg(A) = rg(A*) = 3. Los tres planos se cortan en un punto.

- Si a = 1 el sistema es incompatible ya que rg(A) = 1 y rg(A*) = 2. Los tres planos son paralelos.

- Si a = -2 el sistema es compatible indeterminado: rg(A) = rg(A*) = 2. Los planos se cortan en una recta.

- Para a = -1 el sistema es compatible determinado y lo resolvemos utilizando el método de Cramer.

  $|A| = a^3-3a+2=(-1)^3-3(-1)+2=4$

  $A_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = (-1+0+1)-(0-1-1) = 2

$$A_y = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1-1+0)-(1+0+1) = -2$$

$$A_z = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+1-1)-(1-1+0) = 0$$

$$x = \frac{A_x}{|A|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$y = \frac{A_y}{|A|} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$z = \frac{A_z}{|A|} = \frac{0}{4} = 0$$

Determinando el punto $P = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

5.- Discute la intersección de los siguientes planos según los valores del parámetro a y halla su intersección cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{ax + y + z = a} \\ \mathbf{x + ay + z = 1} \\ \mathbf{x + y + az = 1} \end{array}\right\}$$

Resolución:
El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3-3a+2 = (a-1)^2(a+2)$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado.
  Hallamos su solución utilizando la Regla de Cramer:

  $$A_x = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \Rightarrow x = \frac{A_x}{|A|} = \frac{(a-1)^2(a+2)}{(a-1)^2(a+2)} = 1,$$

  $$A_y = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \Rightarrow y = \frac{A_y}{|A|} = \frac{0}{(a-1)^2(a+2)} = 0,$$

  $$A_z = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow z = \frac{A_z}{|A|} = \frac{0}{(a-1)^2(a+2)} = 0.$$

  Es decir, cualquiera que sea el valor de a la solución es (1,0,0)

- Si a = 1, las tres ecuaciones coinciden, luego es un sistema compatible indeterminado, es decir, son tres planos coincidentes.
  $x + y + z = 1$

- Si a = -2, queda un sistema compatible indeterminado que resolvemos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde hemos cambiado la 1ª por la 3ª filas y hemos restado a la 2ª fila la 1ª fila y a la 3ª fila la suma de la 1ª y la 2ª. Queda el sistema:

$$\left.\begin{matrix} x+y-2z=1 \\ -3y+3z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z=y \\ x-y=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z=y \\ x=1+y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=1+l \\ y=l \\ z=l \end{cases}$$

6.- Tres planos cuyas ecuaciones son

$$\begin{cases} \mathbf{x-\ \ y+3z=\ 0} \\ \mathbf{ax+ay-\ \ z=\ 0} \\ \mathbf{4x+\qquad 5z=\ 0} \end{cases}$$

se cortan en una recta r.)Cuánto vale a?

Resolución:

Si los planos se cortan en una recta r el sistema formado por sus ecuaciones debe ser compatible indeterminado. El rango de la matriz de coeficientes debe ser 2. El determinante de la matriz de coeficientes ha de ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ a & a & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5a+4-12a+5a = -2a+4 = 0 \Rightarrow a=2$$

- Si $a\in \mathbb{R}-\{2\}$, rg(A) = rg(A*) = 3 el sistema es compatible determinado. Los tres planos se cortan en un único punto (el origen de coordenadas).

- Si a = 2 tenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+2 = 4 \neq 0$, luego rg(A)= rg(A*)= 2<3 que es el número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado, cortándose los tres planos en una recta.

7.- Considera los planos en $\mathbb{R}^3$ dados por las ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{(a+1)x+\qquad y+\qquad z=a^2+3a} \\ \mathbf{x+(a+1)\,y+\qquad z=a^3+3a^2} \\ \mathbf{x+\qquad y+(a+1)\,z=a^3+3a^2} \end{cases}$$

a) Describe su posición relativa según los valores del parámetro a.
b) Halla su intersección en el caso a =-3.

Resolución:

a) Para estudiar la posición relativa de los planos, estudiamos la compatibilidad o no del sistema formado por sus ecuaciones en función del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} = (a+1)^3 +1 +1 -3(a+1) = a^3 +3a^2 = a^2(a+3)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & a^2+3a \\ 1 & a+1 & 1 & a^3+3a^2 \\ 1 & 1 & a+1 & a^4+3a^2 \end{pmatrix}$$

- Si $a \neq 0$, $a \neq -3$ rg(A)= rg(A*) =3, por lo tanto el sistema es compatible determinado, y los tres planos se cortan en un punto formando un triedro.

- Si a = 0 el sistema se reduce a una única ecuación x+y+z = 0, es decir, los tres planos son coincidentes.

- Si a = -3 queda el sistema $\left.\begin{array}{r} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right\}$. Como rg(A*) =2 y el sistema es homogéneo tendrá infinitas soluciones, los planos se cortan en una recta.

b) Calculamos su intersección cuando a = -3. El sistema será equivalente a

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

que es la ecuación de una recta.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Estudia la intersección de los planos cuyas ecuaciones son la siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=15 \\ x+y-z=1 \\ 2x-y=6 \end{array}\right.$$

Solución: Es el punto (7, 8, 14)

2.- Estudia la intersección de los planos cuyas ecuaciones son la siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y=1 \\ -2x+3y+z=-1 \\ x-y=3 \end{array}\right.$$

Solución: Es el punto $P = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{17}{3}\right)$

3.- Estudia la intersección de los planos cuyas ecuaciones son la siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=4 \\ x+2y=5 \\ 5x+5y-z=14 \end{array}\right.$$

Solución: Es la recta $(5-2\lambda, \lambda, 11-5\lambda)$

4.- Estudia la intersección de los planos cuyas ecuaciones son la siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y=5 \\ x-3z=4 \\ 4x+y-6z=10 \end{array}\right.$$

Solución: Los planos se cortan dos a dos, formando un prisma, no tienen ningún punto común.

5.- Estudia la intersección de los planos cuyas ecuaciones son la siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y-2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x-5y-3z=0 \end{array}\right.$$

Solución: Es el origen de coordenadas.

6.- Los tres planos cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+az=1 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+3y-2z=1 \end{array}\right\}$$

Se cortan en una recta a) ¿Cuánto vale a?
b) Determina el simétrico del punto P = (1, 0, 1) respecto de la recta del apartado anterior.
Solución: a) p º x+y+3z-4 = 0, b) Es el punto S = (-1, 2, 1)

7.- Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ x-y+z=8 \\ 3x-y+az=-2a \end{array}\right\}$$

Determina si existe y, en este caso, calcula el valor del parámetro a para el cual los tres planos determinados por las ecuaciones del sistema se cortan en una línea recta
Solución: a = 1.

8.- Considera los planos de ecuaciones
π_1: x + βy + z = 0,
π_2: 2x -3y + z-5 = 0
π_3: x + y-2z-15 = 0,
Determina β de forma que los tres planos tengan una recta en común.
Solución: β = -2

9.- Determina el valor de a para el cual los planos cuyas ecuaciones se dan a continuación contienen una misma recta;

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ ay+z=0 \\ x+(a+1)y+az=a+1 \end{array}\right\}$$

Solución: a = 0

10.- Determina el valor de a para el cual los planos cuyas ecuaciones se dan a continuación contienen una misma recta;

$$\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ ay+z=0 \\ x+(a+1)y+z=a+1 \end{array}\right\}$$

Solución: a = 0

11.- Estudia según los valores de a la posición de los planos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & x+(a+1)y & + & z & = & 0 \\ & & x+ & & y+(a+1)z & = & 0 \\ (a+1)x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Solución: Si a ¹ 0 y a ¹ -3 los tres planos se cortan en el origen de coordenadas.
Si a = 0 se trata de tres planos coincidentes.
Si a = -3 Se trata de tres planos que se cortan en una recta formando un haz de planos.

12.- Estudia la intersección de los siguientes planos según los valores del parámetro a e interpreta geométricamente el resultado;

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-4z=3 \\ ax+5y-az=6 \\ 15x+5ay-30z=3 \end{array}\right\}$$

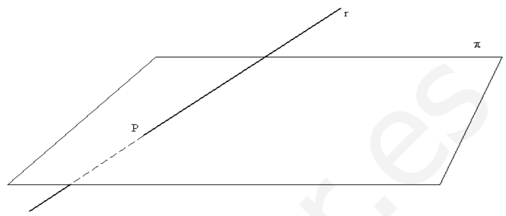
Solución: Si a ¹ 2, a ¹ -5 la solución es única.
Si a = 2 los tres planos no tienen ningún punto común, se cortan dos a dos.
Si a = -5 los tres planos se cortan según una recta.

2.6.- POSICIONES RELATIVAS DE PLANO Y RECTA

Para estudiar las posiciones de una recta r: $\begin{cases} x = p_1 + l\, u_1 \\ y = p_2 + l\, u_2 \\ z = p_3 + l\, u_3 \end{cases}$ con vector director $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y un punto P = (p_1, p_2, p_3) y un plano π: Ax + By + Cz + D = 0 de vector normal $\vec{n}$ = (A, B, C) estudiamos el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{n}$.

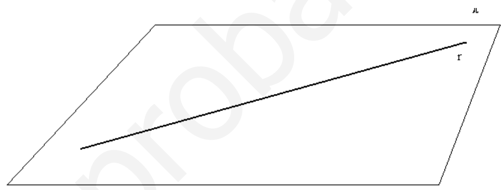
1.- Recta y plano secantes.

Se cortan cuando tienen un único punto común. El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$.



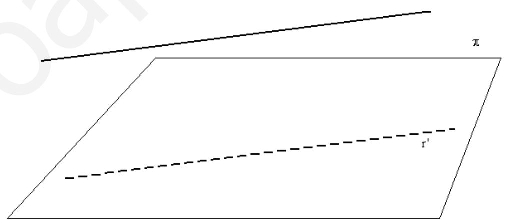
2.- Recta contenida en el plano.

La recta está contenida en el plano cuando todos los puntos de la recta pertenecen al plano. El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ y además $P \in \pi$



3.- Recta y plano paralelos.

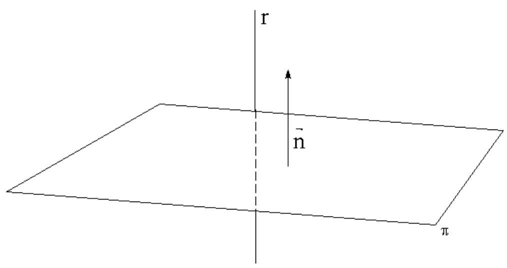
La recta y el plano son paralelos cuando no tienen ningún punto común. El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ y además $P \notin \pi$.



4.- Recta perpendicular a un plano

La recta r perpendicular a un plano π: Ax+By+Cz+D = 0 tiene como vector director a $\vec{n}$ = (A, B, C), vector normal de π. Como pasa por el punto P = (a, b, c), exterior al plano las ecuaciones son:

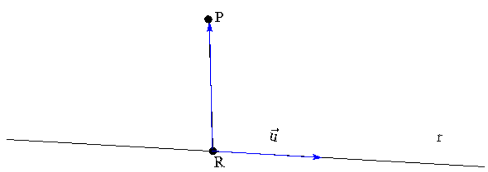
$$\begin{cases} x = a + A\,l \\ y = b + B\,l \\ z = c + C\,l \end{cases}$$



5.- Recta perpendicular a una recta

Tomamos el vector director de r, $\vec{u}$, y un punto genérico, R. La recta perpendicular pedida, s, pasa por el punto P, siendo normales los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PR}$: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$

Se sustituye λ en $\overrightarrow{PR}$ para obtener el vector director de la recta s y se toma como vector director $\vec{v}$ uno paralelo a $\overrightarrow{PR}$.



EJEMPLOS

1.- Estudia la posición relativa del plano π: x - 3y + 5z + 11 = 0 y la recta

$$r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + 6\lambda \end{cases}$$

Resolución:

El vector director de la recta r es $\vec{u}$ = (-2, -1, 6) y el asociado al plano π es $\vec{n}$ = (1, –3, 5). Como el producto $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$, r corta a π. Para hallar la intersección sustituimos las coordenadas del punto genérico de la recta en la ecuación del plano:

$3 - 2\lambda - 3(1-\lambda) + 5(4+6\lambda) + 11 = 0 \Rightarrow 31+31\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

La recta corta al plano en el punto:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3 - 2(-1) = 5 \\ y = 1 - (-1) = 2 \\ z = 4 + 6(-1) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow P = (5, 2, -2)$$

2.- Estudia la posición relativa del plano π:x - 3y - 6z = 5 y la recta

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Resolución:

El vector director de la recta r es $\vec{u}$ = (3,-1,1) y el asociado al plano π es $\vec{n}$ = (1,–3,–6). El producto $\vec{u}.\vec{n}$ = (3, -1, 1). (1, -3, -6) = 0 luego r y s coinciden o son paralelos. Como el punto P=(2,1,0) no pertenece al plano pues 2–3.1–6.0=5 ≠ 0 la recta y el plano son paralelos.

3.- Encuentra el valor de a para que la recta definida por

$$r: \begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ -2x + 4y - 2z = 6 \end{cases}$$

esté incluida en el plano π: 2x+y+z=-1

Resolución:

Para que la recta esté incluida en el plano que el vector director de la recta y el vector normal del plano han de ser perpendiculares. A continuación se halla un punto cualquiera de la recta y se comprueba que pertenece al plano.

El vector director de la recta es el producto vectorial:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & a & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-2a-4,\ 4,\ 12+2a)$$

Obligamos a que sea perpendicular al vector característico del plano $\vec{n}$=(2,1,1)

$\vec{u}.\vec{n} = 0 \Rightarrow (-2a-4, 4, 12+2a).(2,1,1) = -4a-8+4+12+2a = 0 \Rightarrow -2a+8 = 0 \Rightarrow a = 4$

Escogemos ahora un punto cualquiera de la recta, para ello tomamos y = 0, quedando el sistema:

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ -2x - 2z = 6 \end{cases}$$

con soluciones z = -5, x = 2, es decir el punto P = (2, 0, -5)

Se comprueba que el punto anterior pertenece al plano: 2.2 + 0 + (-5) = -1

4.- Dada la recta

$$\mathbf{r :} \begin{cases} \mathbf{x + y = 1} \\ \mathbf{x + z = -1} \end{cases}$$

determina el valor del parámetro a para que el plano π: x+ay-z-3 = 0 sea:
a) Paralelo a r.
b) Perpendicular a r. Calcula en este caso el punto de corte entre r y π
c) Razona si existe algún valor para que r esté contenida en π

Resolución:
Las ecuaciones paramétricas de la recta se hallan despejando x y tomando ésta como parámetro:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

a) Para que r y π sean paralelos ha de ocurrir que el vector director de la recta $\vec{u}$ y el vector característico del plano $\vec{n}$ sean perpendiculares:
$\vec{u} . \vec{n}$ = 0 $\Rightarrow$ (1, a, -1).(1, -1, -1) = 0 $\Rightarrow$ 2-a = 0 $\Rightarrow$ a = 2

b) Si la recta es perpendicular al plano su vector director ha de ser paralelo al vector normal de éste, es decir, con coordenadas proporcionales:

$-\frac{1}{1} = \frac{1}{a} = -\frac{1}{1} \Rightarrow$ a = -1

El punto de corte se obtiene sustituyendo un punto genérico de la recta en la ecuación del plano:
λ– (-1-λ) + 1+λ -3 = 0 $\Rightarrow 3\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Sustituyendo λ = 1 en r obtenemos el punto P = (1, 0, -2)

c) Sí r está contenida en π el vector director de la recta ha de ser perpendicular al plano y además estar incluido en el plano un punto de ésta. Esto sucede si a = 2, pues el punto P = (-1,2,0) de la recta verifica la ecuación del plano

5.- Considera las rectas

$$\mathbf{r :} \begin{cases} \mathbf{4x + 5y + 7z = 7} \\ \mathbf{3x + 2y + 4z = 3} \end{cases}, \quad \mathbf{s : \{x = y -1 = -z\}.}$$

Comprueba que están en el mismo plano π y halla la ecuación de éste.

Resolución:
Si r y s son coplanarias, los vectores directores de ambas junto con el vector $\overrightarrow{PQ}$, con P$\in$r y Q$\in$s, son linealmente dependientes:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (6, 5, -7)$$

Para hallar el punto P de r tomamos z = 0 y queda el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases},$$

obteniendo el punto P = $\left(\frac{1}{7}, \frac{9}{7}, 0\right)$

El vector director de s es (1,1,-1) y Q = (0,1,0) por lo tanto $\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}, 0\right)$

El determinante

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1/7 & -2/7 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

luego $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes y por lo tanto r y s están contenidas en el mismo plano π.

Para hallar π tomamos como vectores directores el conocido de r, el de s y el punto Q = (0,1,0) de s.

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 6 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y + z + 1 = 0$$

6.- Considera las rectas

r : $\begin{cases} \mathbf{x - y + 3 = 0,} \\ \mathbf{2x - z + 2 = 0;} \end{cases}$ **s :** $\begin{cases} \mathbf{2y + 1 = 0,} \\ \mathbf{x - 2z + 3 = 0;} \end{cases}$

a) Determina un plano paralelo a la recta s que contenga a la recta r.
b) Halla un plano perpendicular a la recta s que contenga a la recta r.

Resolución:

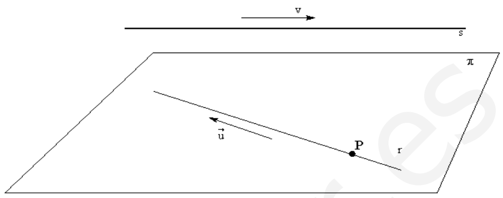
- Para r ≡ $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ si x = 0 obtenemos el punto P = (0, 3, 2), si x = 1 obtenemos el punto (1, 4, 4) por lo tanto el vector director es $\vec{u}$ = (1, 1, 2)
- Para s ≡ $\begin{cases} 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ si z = 0 obtenemos el punto A = $\left(-3, -\frac{1}{2}, 0\right)$, si z = 1 obtenemos el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}, 1\right)$ por lo tanto el vector director es $\vec{v}$ = (2,0,1).
- Como $\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AP} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7/2 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 3 - \frac{7}{2} - 4 = \frac{19}{2} \neq 0$ los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AP}$ son linealmente independientes, se cruzan las rectas r y s.

a) El plano π, paralelo a la recta s y que contenga a la recta r, pasará por el punto P y será paralelo a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir:

$$\pi: \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) El haz de planos que contiene a la recta r tendrá de ecuación
$x - y + 3 + \lambda(2x - z + 2) = 0 \Rightarrow (1 + 2\lambda)x - y - \lambda z + 3 + 2\lambda = 0$

Si alguno de los planos del haz es perpendicular a la recta s, el vector director de ésta ha de ser proporcional al vector normal del plano $(1+2\lambda, -1, -\lambda)$:
$(1+2\lambda, -1, -\lambda) = \alpha(2,0,1)$



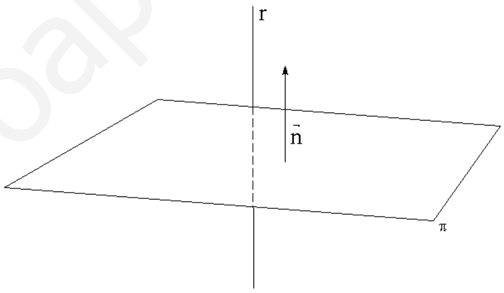
Como $-1 \neq \alpha.0$ cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$, no existe ningún plano que cumpla las condiciones pedidas.

7.- Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π: x - z = 0 y que pasa por el punto P = (1, 1, 0).

Resolución:

El vector $\vec{n}$ = (1, 0, -1), característico del plano π, es el vector director de la recta r. Como r pasa por P = (1, 1, 0) sus ecuaciones paramétricas: son

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

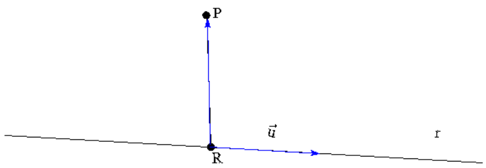


8.- Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P=(1,2,0) y corta perpendicularmente a la recta dada por r : $\begin{cases} \mathbf{x - 2y = 3} \\ \mathbf{z = 3} \end{cases}$

Resolución:

Para hallar un vector director de r, tomamos dos puntos de dicha recta:
$x = 1 \Rightarrow A = (1, -1, 3)$
$y = 0 \Rightarrow B = (3, 0, 3)$

el vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$.



La ecuación de la recta es:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

con punto genérico $R = (1+2\lambda, -1+\lambda, 3)$

Para que la recta s pedida sea perpendicular a r, obligamos a que lo sean los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PR} = (2\lambda, -3+\lambda, 3)$, siendo R el punto de corte de las rectas r y s.

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{PR}$ = (2,1,0).(2λ, -3+λ, 3) = 0 ⇒ 4λ -3+λ = 0 ⇒ 5λ -3 = 0 ⇒ λ = $\frac{3}{5}$

Sustituimos el valor de λ en $\vec{P}R$ para obtener el vector director de la recta s:

$\overrightarrow{PR} = \left(2.\frac{3}{5}, -3+\frac{3}{5}, 3\right) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{12}{5}, \frac{15}{5}\right)$

tomamos como vector director $\vec{v}$ uno paralelo a $\overrightarrow{PR}$, por ejemplo $\vec{v}$ =(2, -4,5).

La recta s buscada pasa por P = (1, 2, 0) y tiene como vector director $\vec{v}$ = (2,–4,5). Sus ecuaciones paramétricas son:

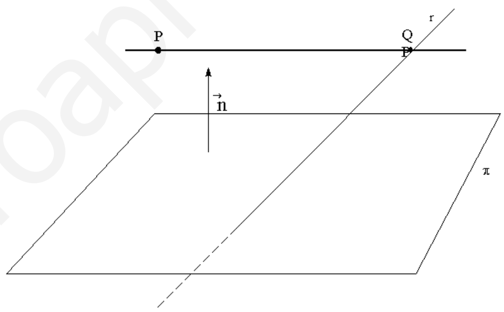
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

9.- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto P = (4, 5, 0), es paralela al plano π cuya ecuación es x + 2y - 3z = 1 y corta a la recta r dada por r : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$

Resolución:

La recta r tiene como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$



Un punto genérico de la recta es:
Q = (1+λ, 2-λ, 2-λ).

La recta pedida pasa por el punto P = (4,5,0) y corta a la recta r en un punto Q, luego tendrá como vector director $\overrightarrow{PQ}$, cuando $\overrightarrow{PQ}$ sea paralelo al plano π.

Como el plano π tiene como vector perpendicular a $\vec{n}$ = (1,2,-3), los vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{PQ}$ han de ser perpendiculares, y por tanto su producto escalar ha de ser nulo. Como $\overrightarrow{PQ}$ = (1+λ-4, 2-λ-5, 2-λ-0) = (-3+λ, -3-λ, 2-λ) tendremos:

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}$ = (1, 2, -3) . (-3-λ, -3-λ, 2-λ) = 1.(-3+λ)+2(-3-λ)-3(2-λ) = 0

Obtenemos:

-3+λ-6-2λ-6+3λ = 0 ⇒ 2λ -15 = 0 ⇒ λ = $\frac{15}{2}$

luego el vector es:

$\overrightarrow{PQ} = \left(-3+\frac{15}{2}, -3-\frac{15}{2}, 2-\frac{15}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{21}{2}, -\frac{11}{2}\right) \approx$ (9,-21,-11)

la recta pasa por P = (4, 5,0) y su vector director es $\overrightarrow{PQ}$:

$$\begin{cases} x = 4 + 9\lambda \\ y = 5 - 21\lambda \\ z = \quad -11\lambda \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dada la recta r y el plano π

r: $\frac{x-1}{a} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, π: x+2y-z+b = 0

estudia sus posiciones relativas según los valores de los parámetros **a** y **b**.

Solución: Si a= -1 se cortan.

Si a= b = -1 la recta está incluida en el plano..

Si a= -1 y b ¹ -1 la recta y el plano son estrictamente paralelos.

2.- Calcula el punto de intersección de la recta x = 2t, y = 3t+1, z = t con el plano 3x+2y-11z-5 = 0.

Solución: Se cortan el punto P = (6, 10, 3)

3.- Estudia la posición relativa de la recta x = 3t-1, y = t+2, z = 2t con el plano determinado por los puntos A = (1, 3, 2), B = (2, 0, 1) y C = (1, 4, 3)

Solución: Se cortan en el punto P = $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right)$

4.- Estudia la posición de la recta r y el plano π

r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+3$, π: 2x -y+z+11 = 0.

Solución: Se cortan el punto P = (-5, -4, -5)

5.- Estudia la posición de la recta r y el plano π

r : $\begin{cases} x = 1 + 5l \\ y = 3l \\ z = 0 \end{cases}$ π: 5x -7y + 3 = 0.

Solución: P(-9,-6,0)

6.- Estudia la posición de la recta r y el plano π

r: $x-1 = \frac{y+1}{2} = z$, π: x+y-3z-1 = 0.

Solución: Recta y plano paralelos.

3.- Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P = (0, -1, 3), es paralela al plano π: 3x-y+z-1= 0 y corta a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5}$

Solución: (x, y , z) = $\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}ë,\ -\frac{3}{8} + \frac{5}{8}ë,\ \frac{11}{8} - \frac{13}{8}ë\right)$

8.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P = (1, 0, -1) y es perpendicular al plano 2x-y+3z-4 = 0

Solución: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$

9.- Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (0,-1,3), es paralela al plano x-y+z-1=0 y corta a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5}$

Solución:

$$\begin{cases} x = 6l \\ y = 1 + 5l \\ z = 3 - 13l \end{cases}$$

2.7.- POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Dadas dos rectas r: $\begin{cases} x = p_1 + l\, u_1 \\ y = p_2 + l\, u_2 \\ z = p_3 + l\, u_3 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x = q_1 + m\, v_1 \\ y = q_2 + m\, v_2 \\ z = q_3 + m\, v_3 \end{cases}$ formamos las matrices cuyas columnas son sus vectores directores y la ampliada con el vector que une un punto de cada una de ellas.

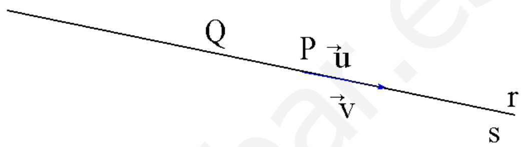
$$[\vec{u}, \vec{v}] = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & q_1 - p_1 \\ u_2 & v_2 & q_2 - p_2 \\ u_3 & v_3 & q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

1.- Coincidentes

Todos sus puntos son comunes.

$rg(\vec{u}, \vec{v}) = 1$, $rg(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 1$

Los vectores directores y el vector $\overrightarrow{PQ}$ tienen la misma.

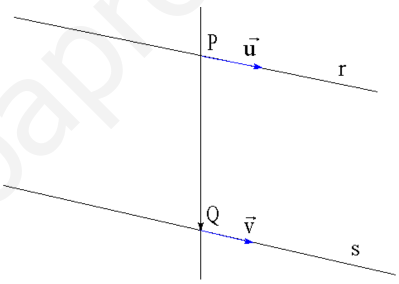


2.- Paralelas

Son coplanarias sin ningún punto común.

$rg(\vec{u}, \vec{v}) = 1$, $rg(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2$

Los vectores directores son paralelos pero $\overrightarrow{PQ}$ no tiene la misma dirección.

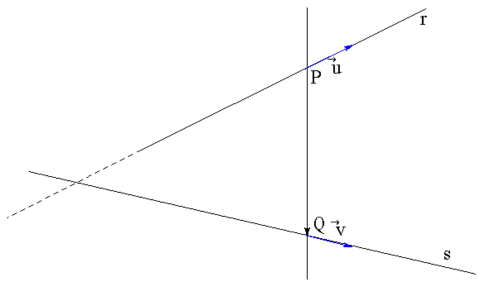


3.- Secantes

Tienen únicamente un punto en común.

$rg(\vec{u}, \vec{v}) = 2$, $rg(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2$

Los vectores directores no son paralelos y $\overrightarrow{PQ}$ no tiene su misma dirección que $\vec{u}$ y $\vec{v}$, pero está en el plano que ambos determinan.

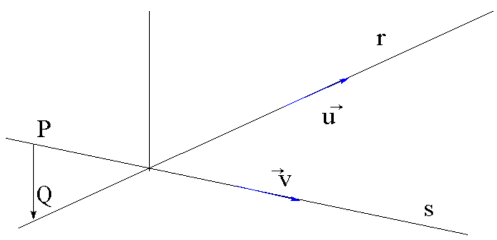


4.- Cruzadas.

No tienen ningún punto en común.

$rg(\vec{u}, \vec{v}) = 2$, $rg(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 3$

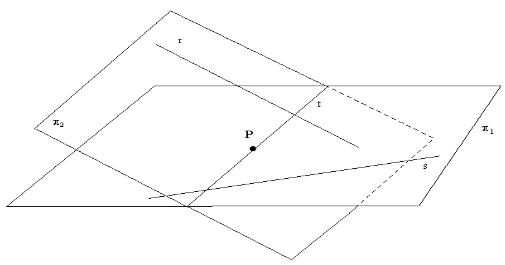
Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos y $\overrightarrow{PQ}$ no está en el plano determinado por ambos.



5.- Recta que pasa por un punto y dos rectas dadas.

Para hallar la recta que pasa por P = (a, b, c) e incide con dos rectas r y s de ecuaciones:

r: $\begin{cases} x = x_1 + a_1\text{ë} \\ y = y_1 + b_1\text{ë} \\ z = z_1 + c_1\text{ë} \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x = x_2 + a_2\text{ì} \\ y = y_2 + b_2\text{ì} \\ z = z_2 + c_2\text{ì} \end{cases}$

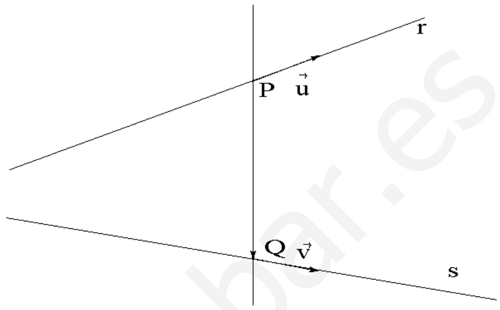


- Consideramos un punto genérico R= $(x_1 + a_1\lambda, y_1 + b_1\lambda, z_1 + c_1\lambda)$ de la recta r
- Consideramos un punto genérico S= $(x_2 + a_2\mu, y_2 + b_2\mu, z_2 + c_2\mu)$ de la recta s
- Obligamos a que P pertenezca a la recta determinada por los puntos R y S.
- Obtenemos el vector director de la recta , que es $\overrightarrow{RS}$.
- Finalmente la recta es la que pasa por el punto P y su vector director es $\overrightarrow{RS}$.

6.- Recta perpendicular común a otras dos dadas.

Para obtener una recta que sea perpendicular a dos dadas, r y s:

- Tomamos un punto P genérico de r y otro Q de s.
- Obligamos a que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a los vectores directores de las rectas $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- La recta buscada es la que pasa por los puntos P y Q



EJEMPLOS

1.- Estudia la posición relativa de las rectas

$$r: \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \quad y \; s: \begin{cases} x = 1 + 10\mu \\ y = 4 - 2\mu \\ z = 2\mu \end{cases}$$

Resolución:

Los vectores directores $\vec{u}$ = (-5, 1, -1) y $\vec{v}$ = (10, -2, 2) son proporcionales. Las rectas son paralelas o coincidentes. Como el punto (1, 4, 0)$\in$s, y comprobamos si pertenece a la recta r:

$1 = 3-5\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$

$4 = 2+\lambda \Rightarrow \lambda = 2$

el punto (1, 4, 0) no pertenece a r. Las rectas son paralelas.

2.- Estudia la posición relativa de las rectas

$$r: \begin{cases} x = 21 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad y \;\; s: \begin{cases} x = 1 + 10\mu \\ y = 4 - 2\mu \\ z = 2\mu \end{cases}$$

Resolución:

Los vectores directores $\vec{u}$ = (-5, 1, -1) y $\vec{v}$ = (10, -2, 2) son paralelos. Las rectas son paralelas o coincidentes. Tomamos el punto (21, 0, 4) $\in$r, y comprobamos si pertenece o no a la recta s:

$$\begin{cases} 21 = 1 + 10\mu \Rightarrow \mu = 2 \\ y = 4 - 2.2 = 0 \\ z = 2.2 = 4 \end{cases}$$

Ambas son la misma recta, pues coinciden en un punto y tienen la misma dirección.

3.- Estudia la posición relativa de las rectas

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 5 \end{cases}$$

Resolución:

Los vectores directores $\vec{u}$ =(-3,5,1) y $\vec{v}$ = (-1,1,0) no son proporcionales, por lo tanto las rectas se cortan o se cruzan. Tomamos los puntos P = (2, 3, 0) de r y Q = (1, 0, 5) de s para formar el vector $\overrightarrow{PQ}$ = (-1,-3,5) que va de una a la otra. Hallamos el producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 3 + 1 + 25 = 14 \neq 0.$$

Como dicho producto es no nulo las rectas se cruzan

4.- Estudia la posición relativa de las rectas

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases}$$

Resolución:

Los vectores directores de las rectas $\vec{u}$ =(-3,5,1) y $\vec{v}$ =(-1,2,0) respectivamente no son proporcionales, por tanto las rectas se cortan o se cruzan. Tomamos los puntos P = (2, 3, 0) de r y Q = (1, 0, 5) de s para formar el vector $\overrightarrow{PQ}$ =(-1,-3, 5) que va de una a la otra. Hallamos el producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Como dicho producto es nulo las rectas se cortan.

5.- Sean las rectas

$$r: \begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2z = a \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -4 + 5\lambda \end{cases}$$

a) Determina "a" para que r y s sean paralelas.
b) Determina "a" para que r y s sean perpendiculares.

Resolución:

Para hallar el vector director de la recta r, calculamos el producto vectorial de los vectores normales a los planos cuya intersección determina la recta:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -2, 1)$$

Un vector director de la recta s es $\vec{v}$ = (4,3,5)

a) Como los vectores directores no son paralelos ($\vec{u} \neq \lambda \vec{v}$), r no es paralelo a s.

b) Para que las rectas r y s sean perpendiculares el producto escalar de los vectores directores debe ser nulo.

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ = (2, 2, -1)$\cdot$(4, 3, 5) = 8+6-5 $\neq 0$

Como $\vec{u}\cdot\vec{v} \neq 0 \Rightarrow$ r y s NO son perpendiculares

6.- Dadas las rectas

$$\mathbf{r:}\ \begin{cases} \mathbf{2x + 3y - 4z = -1} \\ \mathbf{x - 2y + z = 3} \end{cases} \ \mathbf{y\ s:}\ \begin{cases} \mathbf{3x + y - 3z = 2} \\ \mathbf{x + y + z = 1} \end{cases}$$

prueba que se cortan y dar la ecuación del plano que contiene a ambas.

Resolución:

Para ver si dos rectas se cortan debemos considerar si el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}]$ es nulo, siendo P y Q puntos de r y s respectivamente y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sus vectores directores.

Pasamos las rectas a forma paramétrica tomando z como parámetro λ:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 + 4\lambda \\ x - 2y = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y = -7 + 6\lambda \\ x - 2y = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 + \frac{6}{7}\lambda \\ x = 1 + \frac{5}{7}\lambda \end{cases}$$

Tomando como vector director uno paralelo al dado queda:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = -1 + 6\lambda \\ z = \quad 7\lambda \end{cases}$$

Actuamos de manera similar con la recta s:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 + 3\mu \\ x + y = 1 - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1 + 4\mu \\ y = 1 - x - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\mu \\ y = \frac{1}{2} - 3\mu \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\mu \\ y = \frac{1}{2} - 3\mu \\ z = \quad \mu \end{cases}$$

Es decir que P = (1, -1, 0), Q = $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\vec{u}$ = (5, 6, 7) y $\vec{v}$ = (2, -3, 1).

Para ver si se cortan ambas rectas hallemos el valor del producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} -1/2 & 3/2 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

como es nulo, se cortan.

La ecuación del plano será la del que pasa por un punto conocido (P o Q) y tiene como vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por lo tanto vendrá dado por el determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (6+21)(x-1) - (5-14)(y+1) + (-15-12)z = 0 \Rightarrow$$

El plano es 3x-y-3z-2 = 0

7.- Dadas las rectas r y s definidas por

$$\mathbf{r:}\begin{cases} \mathbf{x + z - 13 = 0,} \\ \mathbf{áx + y + z - 12 = 0;} \end{cases} \quad \mathbf{s:}\begin{cases} \mathbf{x - á + 1 = 0,} \\ \mathbf{y + z - á(á - 1) = 0;} \end{cases}$$

)existe algún valor de α, para el que las rectas r y s son coplanarias y perpendiculares?

Resolución:

Si las rectas son coplanarias los vectores directores de ambas rectas y el vector formado por un punto de r y otro de s han de ser linealmente dependientes.

El vector director de r lo hallamos como el producto vectorial de los vectores característicos de los planos cuya intersección nos da la recta

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ á & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, \alpha\text{-}1, 1)$$

El vector director de la recta s lo hallamos como el producto vectorial de los vectores característicos de los planos cuya intersección nos da la recta:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$$

Para que r y s sean perpendiculares el producto escalar de sus vectores directores ha de ser nulo:

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow (-1).0 + (\alpha\text{-}1).(-1) + 1.1 = 0 \Rightarrow 1 - \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$$

Las rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} x + z - 13 = 0 \\ 2x + y + z - 12 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Un punto P de r lo obtenemos, por ejemplo, tomando x = 0 y resolviendo el sistema resultante:

$$\left.\begin{matrix} z = 13 \\ y + z = 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = -1$$

y el punto es P = (0, -1, 13)

Un punto Q de s lo hallamos suponiendo, por ejemplo, que z = 0 y resolviendo el sistema resultante:

$$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Q = (1, 2, 0)$$

Tomamos los vectores $\vec{u}$ = (-1, 1, 1), $\vec{v}$ = (0, -1, 0) y $\overrightarrow{PQ}$ = (1, 3, -13) y para que sean coplanarios ha de ser nulo el determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -13 \end{vmatrix} = -13 + 1 + 1 + 3 \neq 0$$

No existe pues ningún valor de α para el que r y s sean coplanarios y perpendiculares a la vez.

8.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P = (2, -1, 0) y por las rectas r ≡ $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{-1}$ y s ≡ 2x+1 = y-3 = z+2

Resolución:

Un punto de r es A = (-1, 0, 2) y su vector director $\vec{u}$ = (2, 5, -1), luego su punto genérico R es
R = (-1+2r, 5r, 2-r)

La recta s viene dada como la intersección de los planos:

$$\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$$

Para determinar el plano que pasa por s y el punto P hallamos el haz de planos determinado por s y escogemos el que pasa por P:
2x-y+4+λ(2x-z-1) $= 0 \Rightarrow 4+1+4+\lambda(4-0-1)=0 \Rightarrow 9+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-3$

Sustituyendo valores obtenemos la ecuación del plano:
2x-y+4-3(2x-z-1) $= 0 \Rightarrow$ -4x-y+3z+7 = 0

Determinamos el punto de intersección de la recta r y el plano anterior:
-4(-1+2r)-(5r)+3(2-r)+7 = 0 $\Rightarrow$ 17-16r = 0 $\Rightarrow$ r = $\frac{17}{16}$

El punto buscado es

$$R = \left(-1+\frac{34}{16}, \frac{85}{16}, 2-\frac{17}{16}\right) = \left(\frac{18}{16}, \frac{85}{16}, \frac{15}{16}\right)$$

Luego el vector es:

$$\overrightarrow{PR} = \left(\frac{18}{16}-2, \frac{85}{16}+1, \frac{15}{16}\right) = \left(-\frac{14}{16}, \frac{101}{16}, \frac{15}{16}\right) \approx (-14, 101, 15)$$

La recta pedida pasa por P = (2, -1, 0) y tiene como vector director $\overrightarrow{PR}$, sus ecuaciones paramétricas serán:

$$\begin{cases} x = 2-14l \\ y = -1+101l \\ z = 15l \end{cases}$$

9.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1, -1, 2) y se apoya en las rectas r: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ y s: $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{3}$

Resolución:
El punto genérico de R = (1-2r, r-1, -1+3r) y el de S = (2s, 2-s, 2+3s).
La recta que pasa por los puntos R y S tiene como ecuación continua:

$$\frac{x-(1-2r)}{2r+2s-1}=\frac{y-r}{-r-s+2}=\frac{z-(-1+3r)}{-3r+3s+3} \quad [1]$$

Como pasa por el punto (1,1,-2) se cumple:

$$\frac{1-(1-2r)}{2r+2s-1}=\frac{1-r}{-r-s+2}=\frac{-2-(-1+3r)}{-3r+3s+3}$$

Igualando la 1ª fracción con la 2ª y 3ª obtenemos:

$$\begin{cases} 2r(-r-s+2) = (2r+2s-1)(-1-r) \\ 2r(-3r+3s+3) = (2r+2s-1)(3-3r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2r^2-2rs+4r = -2r+2r^2-2s-2rs+1+r \\ -2r^2+2rs+2r = 2r-2r^2+2s-2rs-1+r \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5r+2s = 1 \\ 4rs-r-2s = -1 \end{cases} \Rightarrow r = 1,\ s = -2$$

Sustituyendo en [1] permite obtener la ecuación continua de la recta pedida:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Estudia las posiciones relativas, según los valores del parámetro a, de las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \quad y\ s: \begin{cases} x = a+1+\mu \\ y = 4\mu \\ z = -\mu \end{cases},$$

razonando las distintas posiciones que puedan presentarse.

Solución: si a ≠ 0 las rectas se cruzan. Si a = 0 se cortan en el punto P =(1,0,0)

2.- Dadas las rectas $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{-1}$ y $s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ calcula k para que las rectas se corten.

Solución: $k = \frac{19}{5}$

3.- Se consideran las rectas $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+a}{2}$, $s: \begin{cases} x = 1+4t \\ y = -1+3t \\ z = -4+5t \end{cases}$. Determina a para que las rectas r y s se corten. ¿Pueden ser coincidentes?.

Solución: Se cortan si a = -1. No pueden ser coincidentes para ningún valor de a.

4.- Determina, razonadamente, si las rectas $r: \begin{cases} x+y-2z+1 = 0 \\ 2x-y+z-1 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} 2x+y-z-1 = 0 \\ x-y-2z+1 = 0 \end{cases}$ se cortan o se cruzan.

Solución: Se cortan.

5.- Dadas las rectas de ecuaciones $r: \begin{cases} ax-2y = a-4 \\ 3x-2z = -3 \end{cases}$ $s: \begin{cases} 3x-az = 3-4a \\ 3y-2z = -2 \end{cases}$ de **a**

Solución: a = 2.

6.- Determina si las rectas $r: \begin{cases} x+2y-3z-1 = 0 \\ x+2y-1 = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} 3x-y+3z = 0 \\ x+4y-2 = 0 \end{cases}$ se cortan o se cruzan.

Solución: Se cruzan

7.- Dadas las rectas $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{-1}$ $s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$

a) Calcula **k** para que las rectas se corten.

b) Halla la ecuación del plano que determinan.

Solución: a) $k = \frac{19}{5}$ *, b) La ecuación del plano es 8x-5y+6z+3=0.*

8.- Sean las rectas r: $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2z = a \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x = 1 + 4l \\ y = -1 + 3l \\ z = -4 + 5l \end{cases}$

a) Determina "a" para que r y s sean paralelas.
b) Determina "a" para que r y s sean perpendiculares.
Solución: No depende de a en ninguno de los dos casos a) y b).

9.- Se consideran las rectas r: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+a}{2}$ y s: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$

determina **a** para que las rectas r y s se corten.)Pueden ser coincidentes?.
Solución: a = 1. No pueden ser coincidentes.

10.- Se consideran las rectas de ecuaciones r: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ y s: $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$.
Estudia su posición y si tienen un punto en común.
Solución: Se cortan y su punto común es P = (1, 2, 1).

11.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P = (2, -1, 0) y por las rectas
r: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-2}{-1}$ y s: 2x+1 = y-3 = z+2

Solución: $\begin{cases} 11x - y + 17z - 23 = 0 \\ 12x + 3y - 9z - 21 = 0 \end{cases}$

12.- Halla las ecuaciones de la recta que se apoya en las rectas r y s y es paralela a la recta t.
r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{cases}$ s: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{5}$, t: $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

Solución: (x, y , z) = $\left(ë\,, \dfrac{7}{6} - ë\,, -\dfrac{13}{6} \right)$

13.- Halla la recta *t* perpendicular común a las rectas r: $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ y s, que es la recta que pasa por los puntos A = (1, 2, 0) y B = (0, 2, 1)

Solución: $\begin{cases} -25x - 2y + 13z - 36 = 0 \\ 6x + 2y + 6z - 10 = 0 \end{cases}$

14.- Determina la recta que se apoya en las rectas r: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ y s: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ que pasa por el punto P = (1, 1, 1)
Solución: (x, y , z) = (1-2l, l, 1)

15.- Determina la recta que se apoya en las rectas r $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ y s: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$

que sea paralela a la recta $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$
Solución: (x,y,z) = (-1+t, 2t, 2)

16.- Determina la recta perpendicular común a las rectas de ecuaciones
r: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{3}$, s: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$
Solución: (x, y, z) = (1-l, l, 0)

2.8.- EJERCICIOS DEL TEMA

1.- Halla el baricentro del tetraedro de vértices A = (2, 1, 3), B = (4, -1, 3), C = (2, 2, 5) y D = (8, –3, 5).

Solución: $G = \left(4, \frac{1}{4}, 4\right)$

2.- Dados los puntos A = (2, 3, 9) y B = (1, -2, 6), halla tres puntos P, Q y R que dividen al segmento en cuatro partes iguales

Solución: $P = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}, \frac{33}{4}\right)$, $Q = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right)$, $R = \left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{27}{4}\right)$

3.- Sean los puntos P = (3, 1, 5) y Q = (-1, 7, 3). Halla el punto medio del segmento PQ

Solución: M = (1, 4, 4)

4.- Comprueba si los puntos A = (2, 3, 1), B = (5, 4, 3) y C = (2, 1, 2) están alineados

Solución: No lo están.

5.- Halla las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A = (2, 3, 4), B = (1, -1, 5) y C = (5, 5, 4).

Solución:

La opuesta al vértice A es $m \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4 \end{cases}$

La opuesta al vértice B es $n \equiv \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$

La opuesta al vértice C es $r \equiv \begin{cases} x = 5 + 7\lambda \\ y = 5 + 8\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$

6.- Calcula la ecuación del plano π que contiene a la recta

$r \equiv \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ y al punto P = (1, 1, 0)

Solución: $\pi \equiv x - 2y + 1 = 0$

7.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A = (1, 3, -1) y tiene la dirección del vector $\vec{v}$ = (-1, 0, 2).

Solución: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 3 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$

8.- Calcula el punto simétrico del punto P = (-1, 0, 6) respecto del plano π: 2x - y - z + 2 = 0.

Solución: P'= (3, -2,4).

9.- Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y pasa por el punto P = (1, 0, -1) siendo $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

Solución: $\pi \equiv 4x - y - z = 5$.

10.- Determina las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano determinado por el punto P = (1, 1, 1) y la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} y = 0, \\ 2x + 3z = 1. \end{cases}$$

Solución: $\pi \equiv 2x - 4y\ 3z = 1$, $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -4\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

11.- Comprueba si están alineados los puntos:
A = (1, 2, 3), B = (2, 3, 4), C = (0, 1, 2) y D = (1, 1, 1)
Solución: C pertenece a r, basta dar el valor $\lambda = 0$.
D no pertenece a la recta ya que no cumple las ecuaciones de la recta.

12.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A = (1, 2, 3) y es paralelo a la recta

$$r: \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

Solución: $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-2}{-7} = \dfrac{z-3}{-5}$

13.- Halla el punto simétrico del punto A = (2, 0, 1) respecto de la recta $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = z - 2$

Solución: A' = (2,4,5)

14.- Determina las ecuaciones de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano determinado por el punto P = (1, 1, 1) y la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

Solución: El plano es $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$. *La recta es* $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

15.- Obtén la proyección ortogonal del punto P = (1, 7, 7) sobre el plano π: x = 3y.
Solución: (3, 1, 7)

16.- Determina la recta que pasa por el punto P = (1, 2, 3) y corta perpendicularmente a la recta dada por las ecuaciones x = 3 e y = 3.

Solución: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$

17.- Un punto M se mueve en el espacio tridimensional (de manera que en un instante de tiempo t se encuentra en el punto (1+t, 3+t, 6+2t). Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la trayectoria de M y pasa por el punto (1, 1, 0).

Solución: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

18.- Un punto M se mueve en el espacio tridimensional (de manera que en un instante de tiempo t se encuentra en el punto (1+t, 3+t, 6+2t). Halla el instante de tiempo en el que el punto está en el plano dado por la ecuación x - 2y + z – 7 = 0.
Solución: t = 6.

19.- Calcula a y b para que el vector (2 – a + b, 1 + a - b, 1 - b) sea perpendicular a los vectores $\vec{u}$ = (1,0,2) y $\vec{v}$ = (2, 1, -1). Una vez determinada encuentra las ecuaciones del plano que pasa por el punto (1, 1, 1) y es perpendicular a dicho vector.
Solución: -2x+5y+z = 4.

20.- Calcula la ecuación del plano π que contiene a la recta r: $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ y+z-3=0 \end{cases}$ y al punto P=(1,1,0).

Solución p: x - 2y + 1 = 0

21.- Determina si los puntos P = (1, 1, 0), Q = (0, 0, -1), R = (1, 0, 1) y S = (1, 1, 1) están en el mismo plano.
Solución. No.

22.- Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta determinada por los puntos A =(1, 3, 2) y B = (0,1,3) y a la recta s: $\begin{cases} x+y-z=-3 \\ 2x-y-z=-3 \end{cases}$ sabiendo que el punto P = (2,1,2) pertenece al plano.

Solución: p: 7x - 5y -3z - 3 = 0

23.- Halla la ecuación en forma segmentaria del plano que pasa por los puntos A = (2, 0, 0), B = (0, –1,0) y C = (0, 0, 7)

Solución: $\frac{x}{2}-\frac{y}{1}+\frac{z}{7}=1$

24.- Comprueba si los puntos A = (1, 2, 3), B = (4, 7, 8), C = (3, 5, 5), D = (-1, -2, -3) y E = (2, 2, 2) son coplanarios.
Solución: D sí, E no.

25.- Halla la ecuación del plano que corta a los ejes de coordenadas a distancia **a** del origen. Halla **a** para que el plano tenga por ecuación x + y + z -7 = 0.

Solución: $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}$, *a = 7.*

26.- Determina **a** y **b** para que los tres planos siguientes pasen por una misma recta:

$$\begin{cases} \eth_1: \ x+2y-z=1 \\ \eth_2: 2x+y+az=0 \\ \eth_3: 3x-3y-2z=b \end{cases}$$

y halla el simétrico de O = (0, 0, 0) respecto de la recta común.

Solución: a = $-\frac{5}{3}$, *b = 3. El punto simétrico es S =* $\left(\frac{944}{89}, \frac{262}{89}, \frac{1290}{89}\right)$

27.- Se consideran las rectas r: $\begin{cases} ax-2y=a-4 \\ 3x-2z=-3 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} 3x-az=3-4a \\ 3y-2z=-2 \end{cases}$ determina los valores de **a** para los cuales las rectas r y s son paralelas.
Solución: a = 2.

28.- Sean las rectas r : $\begin{cases} x-y=3 \\ x+2z=a \end{cases}$ y s : $\begin{cases} x=1+4l \\ y=-1+3l \\ z=-4+5l \end{cases}$

a) Determina **a** para que las rectas r y s sean paralelas.
b) Determina **a** para que las rectas r y s sean perpendiculares.
Solución: No depende de a

29.- Estudia las posiciones relativas, según los valores del parámetro **a**, de las rectas r: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x = a + 1 + \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$,

razonando las distintas posiciones que puedan presentarse.

Solución: Si a=0 se cortan, Si $a \neq 0$ se cruzan.

30.- Dadas las rectas r: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{-1}$ y s: $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$

a) Calcula k para que las rectas se corten.

b) Halla la ecuación del plano que determinan.

Solución: a) $k = \frac{19}{5}$, b) $\pi \equiv 8x - 5y + 6z + 3 = 0$.

31.- ¿Pertenece el plano x + y + z + 2 = 0 al haz determinado por la recta?

r: $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$

Solución: El plano no pertenece al haz.

32.- Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x - z = 1 \end{cases}$

a) ¿Existe una solución del mismo en la que y = 0?

b) Resuelve el sistema homogéneo asociado al sistema dado.

c) Haz una interpretación geométrica tanto del sistema dado como de sus soluciones

Solución: a) Sí es (3,0,2), b) $x = \lambda$, $y = \frac{\lambda}{2}$, $y = \lambda$, c) Un haz de tres planos en el espacio.

33.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) ¿Para qué valores de α no tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema anterior?

b) Discute sus soluciones según los valores de α e interpreta geométricamente el resultado

Solución: a) La matriz A no tendrá inversa para $\alpha \in \{3,-5\}$.

b) Si $\alpha \notin \{3,-5\}$, un punto. Si $\alpha=-5$, tres caras de un prisma triangular. Si $\alpha=3$ tres planos de un haz de planos.

34.- Estudia la posición relativa de los planos según el valor de a:

π_1: ax + y -5z +4 = 0

π_2: -3x-3y+15z +12= 0

Solución: Si a = 1, planos paralelos. Si $a \neq 1$, planos secantes.

35.- Estudia la posición relativa de los planos según el valor de a y b:

π_1: ax + y -5z +4 = 0

π_2: -3x-3y+bz +12= 0

Solución: Si a=1, b=15 es paralela en sentido estricto. En otro caso se cortan

36.- Estudia la intersección de los siguientes planos según el valor de a

$\begin{cases} 3x + 10y + 4z = 0 \\ ax + y - z = 0 \\ x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$

Solución: Si $a = \frac{19}{5}$ son rectas; si $a \neq \frac{19}{5}$ es el punto P = (0, 0, 0).

37.- Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P = (-1, 2, 0) y contiene a la recta

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ \quad y + 3z = 5 \end{cases}$$

Solución: 3x+ 2y+ 27 z – 49 = 0.

38.- Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P = (0, 0, 0) y contiene a la recta

r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{4}$

Solución: x- 2y+ z = 0

39.- Dada la recta r: $x + 1 = \dfrac{y}{-2} = z - 2$ y el plano π: 2x-my+2z-3 = 0, halla razonadamente:

a) El valor de m para que r y π sean paralelos.

b) Los valores de m para que r y π sean perpendiculares.

c))Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano?

Solución: a) m = 2, b) m = -4, c) No.

40.- Se considera la recta r del espacio dada por las ecuaciones: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ determina a para que el plano de ecuación 2x+y+az = b sea paralelo a r. Halla el valor de b para que la recta esté contenida en el plano.

Solución: a = 4, b =-3.

41.- Sean r y s las rectas dadas por r ≡ $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0, \end{cases}$ s ≡ $\begin{cases} 3x - 2y - 3 = 0 \\ 2x + y = 0, \end{cases}$

Determina la ecuación de un plano que contenga a r y sea paralelo a s.

Solución: x + y - 1 = 0

42.- Determina la ecuación del plano que es paralelo al vector $\vec{u}$ = (1, 2, 3) y contiene a la recta que pasa por el punto P = (1, 1, 1) y es paralela al vector $\vec{v}$ = (1, 1, 1)

Solución: x - 2y + z = 0,

43.- Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P = (1, 1, 1) y es perpendicular al vector $\vec{u}$ = (1, 2, 3)

Solución: x + 2y + 3z - 6 = 0

44.- Sea π el plano de ecuación π ≡ 3x-2y-6z = 1 y sea r la recta dada en forma paramétrica por r ≡ (x, y , z) = (1,0,1) + λ(2,-1,1), $\lambda \in \mathbb{R}$

a) En el caso concreto de la recta r y el plano π, comprueba si son paralelos.

b) En el caso concreto de la recta r y el plano π, comprueba si son perpendiculares

Solución: N son paralelos, Nos son perpendiculares

45.- Determina **a** y **b** para que 6x-ay+4z+9 = 0 y 9x-3y+bz-b = 0 sean paralelos.

Solución: a = 2 y b = 6.

46.- Obtén dos rectas que se cruzan en el espacio y calcula la recta perpendicular común a ambas.

47.- Halla las ecuaciones de la recta que se apoya en las rectas r y s y es paralela a la recta t.

r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{cases}$ s: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{5}$, t: $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

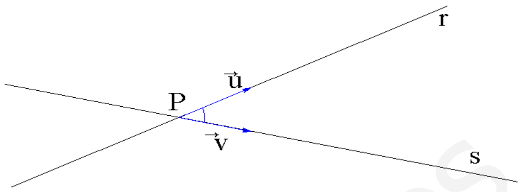
Solución: (x,y,z) = $\left(\lambda,\ \dfrac{7}{6} - \lambda, -\dfrac{13}{6}\right)$

TEMA 3

3.- PROBLEMAS MÉTRICOS

3.1.- ANGULOS

1.- Ángulo de dos rectas.



Si las rectas se cortan el ángulo es el menor de los que forman dichas rectas en el plano. Si las rectas se cruzan el ángulo es el formado por dos rectas paralelas a las dadas y secantes entre si.

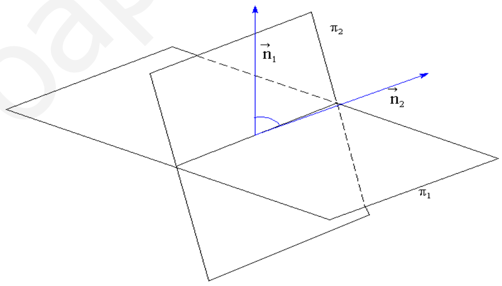
Si los vectores directores son $\vec{u} = (x, y, z)$ y $\vec{v} = (x', y', z')$ el coseno del ángulo es:

$$\cos(r, s) = \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{|x'x + y'y + z'z|}{\sqrt{x^2+y^2+x^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+x'^2}}$$

Dos rectas son ortogonales si su producto escalar de sus vectores directores es cero:

$r \perp s \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

2.- Ángulo de dos planos.



El ángulo de dos planos secantes π_1 y π_2 será el menor de los ángulos diedros que determinan, coincide con el formado por los vectores característicos de dichos planos.

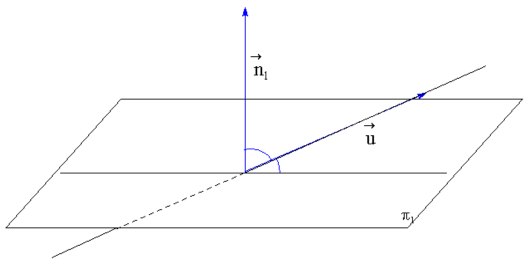
Si dos planos tienen vectores característicos $\vec{n}_1 = (x, y, z)$ y $\vec{n}_2 = (x', y', z')$, el coseno del ángulo que forman es:

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1.\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{||x'x + y'y + z'z||}{\sqrt{x^2+y^2+x^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+x'^2}}$$

Dos planos serán ortogonales si el producto escalar de sus vectores característicos es cero:

$r \perp s \Rightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Rightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

3.- Ángulo de una recta r y un plano.



El ángulo de una recta r y un plano π será el determinado por la recta r y su proyección sobre el plano r', coincide con el formado por el vector director de la recta y el característico del plano.

Si $\vec{u} = (x, y, z)$ es el vector director de la recta y $\vec{n} = (x', y', z')$ es el normal del plano, el seno del ángulo que forman es:

$$\operatorname{sen}(r, \pi) = \cos(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{\vec{u}.\vec{n}}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|x'x + y'y + z'z|}{\sqrt{x^2+y^2+x^2}.\sqrt{x'^2+y'^2+x'^2}}$$

- Una recta y un plano son ortogonales si el vector director de la recta, $\vec{u}$, y el vector característico del plano, $\vec{n}$, son paralelos. Si $r \perp \pi \iff \vec{u} \parallel \vec{n} = 0 \iff \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$
- Una recta y un plano son paralelos si el vector director de la recta, $\vec{u}$, y el vector característico del plano, $\vec{n}$, son ortogonales. Si $r \parallel s \iff \vec{u} \perp \vec{n} = 0 \iff xx' + yy' + zz' = 0$

EJEMPLOS

1.- Halla el ángulo que forman las rectas r: x = y = z y s: $\begin{cases} \mathbf{x+z=1} \\ \mathbf{y=z} \end{cases}$

Resolución:

Los vectores directores de las rectas son $\vec{u}$ = (1, 1, 1) y $\vec{v}$ = (-1, 1, 1) ya que la ecuación paramétrica de la segunda recta, tomando z = λ, es $\begin{cases} x = 1 - \text{ë} \\ y = \quad \text{ë} \end{cases}$

El coseno es cos(r, s) = $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{|(-1).1+1.1+1.1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}.\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

El ángulo pedido es (r, s) = arc cos$\frac{1}{3}$

2.- Halla el ángulo que forman los planos π_1: x +2y -z =3 y π_2: 2x -y +3z = 0

Resolución:

Los vectores característicos son $\vec{n}_1$ = (1, 2,-1) y $\vec{n}_2$ = (2,-1, 3) luego:

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|1.2+2.(-1)+(-1).3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{84}}$$

El ángulo es (π_1, π_2) = arc cos$\frac{3}{\sqrt{84}}$

3.- Calcula el ángulo determinado por la recta r: $\begin{cases} \mathbf{x = y - 1} \\ \mathbf{z = 3} \end{cases}$ **y el plano π:y= 1.**

Resolución:

El vector director de la recta es $\vec{u}$ = (1, 1, 0). El vector característico del plano es $\vec{n}$ = (0,1, 0). El ángulo formado por ambos es:

sen(r, π) = $\cos(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ (r, π) = $\frac{\text{ð}}{4}$

4.- Halla un punto P perteneciente a la recta r: $\begin{cases} \mathbf{x+y+z=0} \\ \mathbf{2x - y - 2z = 0} \end{cases}$ **tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PA}$ sean ortogonales, siendo A= (0, 2, 3) y B = (1, 1, 2).**

Resolución:

El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de los planos intersección:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 4, -3)$$

Para determinar un punto de la recta hacemos x = 0:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ y - 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0,\ y = 0 \Rightarrow P = (0, 0, 0).$$

Por lo tanto la ecuación de r en paramétricas es $r: \begin{cases} x = -l \\ y = 4l \\ z = -3l \end{cases}$,

es decir que un punto genérico de la recta será de la forma P (-λ, 4λ, -3λ).

Para hallar el punto pedido hallamos los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{PA} = (\lambda, 2-4\lambda, 3+3\lambda)$ y obligamos a que ambos vectores sean ortogonales:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \Rightarrow (1, -1, 1) \cdot (\lambda, 2-4\lambda, 3+3\lambda) = 0 \Rightarrow 8\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}$$

Es decir que el punto pedido será el que hallamos sustituyendo en la ecuación de la recta el valor de λ por $-\frac{1}{8}$: $P = \left(\frac{1}{8}, -\frac{4}{8}, \frac{3}{8}\right)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla el ángulo que forman las rectas r: x = y = z y $s: \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Solución: Son perpendiculares

2.- Halla el ángulo que forman las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{1}$ y $s: \frac{x+3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-1}$

Solución: $\frac{ð}{3}$

3.- Dados los planos π_1: 3x -2y +5z =2 y π_2: ax +7y +z = 0 halla el valor de a para que sean perpendiculares.
Solución: a = 3.

4.- Halla el ángulo formado por el plano π: x +2y -z =3 y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$

Solución: 30E

5.- Halla el ángulo formado por el plano π: 2x +3z = 0 y la recta $r: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 9y = -8 \end{cases}$

Solución: arc sen $\frac{15}{\sqrt{12142}}$

6.- Halla la ecuación de la recta que pasa por A(1,2,3) y es perpendicular al plano π:2x+3y+z=7

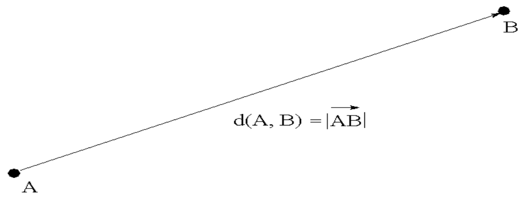
Solución: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$

3.2.- DISTANCIAS

1.- Distancia entre dos puntos.

La distancia entre dos puntos P y Q es el módulo del vector origen en P y final en Q:

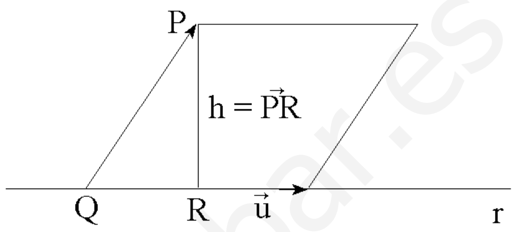
$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



2.- Distancia de un punto a una recta.

La distancia de un punto P a una recta que pasa por Q y de vector director $\vec{u}$ es la distancia del punto P al pie de la perpendicular trazada del punto a la recta:

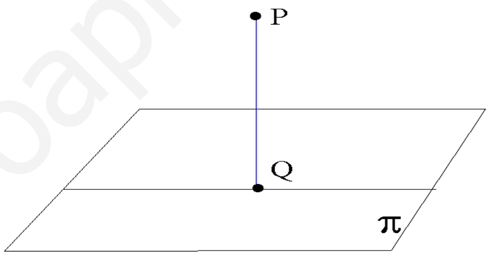
$$d(P, r) = \left|\overrightarrow{PR}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$



3.- Distancia de un punto a un plano.

La distancia de un punto P a un plano π: Ax+ By + Cz + D = 0 es la existente entre el punto y el pie de la perpendicular trazada desde el punto al plano:

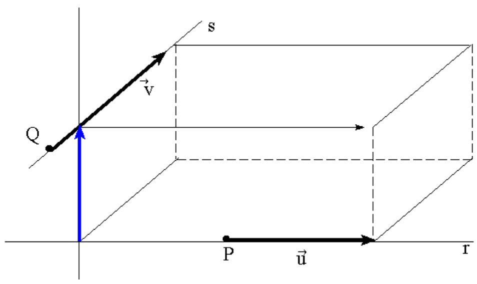
$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



4.- Distancia entre dos rectas.

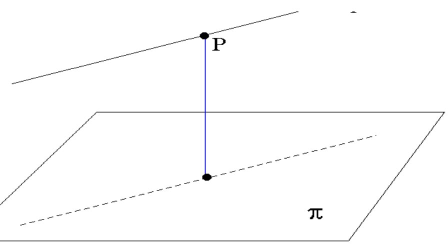
- La distancia entre dos rectas será nula si las rectas se cortan, es decir, tiene algún punto en común.
- Si son paralelas hallamos un punto de la primera y calculamos la distancia de dicho punto a la otra recta.
- Si se cruzan las rectas r que pasa por P y tiene de vector director $\vec{u}$ y s que pasa por Q y tiene de vector director $\vec{v}$:

$$d(r, s) = \frac{\left|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$



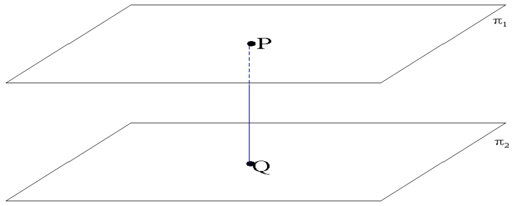
5.- Distancia de una recta a un plano.

- La distancia de una recta a un plano será nula si la recta corta al plano o está incluido en él.
- La distancia de una recta a un plano será la de un punto de la recta al plano si ambos son paralelos.



6.- Distancia entre dos planos paralelos.

La distancia entre dos planos paralelos es igual a la distancia de un punto del primero, P, al otro dado:
$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2)$



EJEMPLOS

1.- Calcula la distancia entre los puntos P = (2, -1, 7) y Q = (3, 5, -1).

Resolución:
Es el módulo del vector que los une:

$$d(P, Q) = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-5)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{1^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{1+36+64} = \sqrt{101}$$

2.- Calcula a para que la distancia entre los puntos P = (2, 7, -3) y Q = (–5, a, 3) sea 10.

Resolución:
El módulo del vector debe valer 10:

$$\sqrt{7^2 + (7-a)^2 + 6^2} = 10 \Rightarrow a^2 - 14a + 34 = 10 \Rightarrow a = \frac{14 \pm \sqrt{196-136}}{2} = 7 \pm \sqrt{15}$$

Hay dos valores de a:
$a_1 = 7 + \sqrt{15}$, $a_2 = 7 - \sqrt{15}$

3.- Calcula la distancia del punto P = (5, -1, 6) a la recta r: $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = 1 - 2\ddot{e}} \\ \mathbf{y = \quad -\ddot{e}} \\ \mathbf{z = 5 + \ddot{e}} \end{array}\right.$

Resolución:
Como r viene determinada por el punto Q = (1, 0, 5) y el vector director $\vec{d}$ =(–2,–1, 1), la distancia del punto a la recta es:

$$d(P, r) = \frac{\text{Area}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right\|}{|(-2,-1,1)|} = \frac{|(0,6,-6)|}{|(-2,-1,1)|} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}} = \sqrt{12}$$

4.- Dadas las rectas r: $\mathbf{\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}}$ **y s:** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x = 1 + \ddot{e}} \\ \mathbf{y = 2 - \ddot{e}} \\ \mathbf{z = \quad 2\ddot{e}} \end{array}\right.$ **averigua su posición respectiva. Halla la distancia existente entre ellas usando el producto mixto y, caso de existir, la ecuación del plano que las contiene.**

Resolución:
- Para averiguar la posición de las rectas debemos considerar las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como rg(M) = 2 ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, las rectas no tienen la misma dirección y no son paralelas. Como rg(M) < rg(M') = 3, el sistema es incompatible, no tienen ningún punto común, son rectas que se cruzan.

Para hallar la distancia entre las rectas consideramos el cociente entre el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1)$, $\vec{u} = (1,1,-2)$ y $\vec{v} = (1,-1,2)$

$$d(r, s) = \frac{\left|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{|-2|}{|(0,-4-2)|} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

- No existe ecuación del plano ya que dos rectas que se cruzan no determinan un plano.

5.- Calcula la distancia de la recta $\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$ al plano x-3y-z+6=0.

Resolución:

Como el vector director de la recta es $\vec{u} = (5,2,-1)$ y el vector característico del plano es $\vec{n} = (1, -3, -1)$, ambos son paralelos ya que el producto escalar:

$\vec{u} \cdot \vec{n} = (5, 2, -1).(1, -3, -1) = 5 - 6 + 1 = 0$

La distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de un punto de r a π. El punto P = (3, 1,-2) está contenido en la recta y la distancia es:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|3.1 + (-3).1 + (-2).(-1) + 6|}{\sqrt{1+9+1}} = \frac{8}{\sqrt{11}}$$

6.- Calcula la distancia del plano π_1: x-5y+z+2 = 0 al plano π_2: 2x+3z-4=0.

Resolución:

Los dos planos no son paralelos ya que sus vectores normales $\vec{n_1} = (1,–5,1)$ y $\vec{n_2} = (2, 0, 3)$ no lo son. Los planos se cortan y la distancia entre ellos es nula.

7.- Calcula la distancia del plano π_1: x-5y+2z=19 al plano π_2: 2x-10y+4=0.

Resolución:

Los dos planos son paralelos, pues los coeficientes son proporcionales. La distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro. Tomamos P = (2, -1, 6) que es un punto de π. Por lo tanto:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|2.2 - 10.(-1) + 4.6|}{\sqrt{4+100+16}} = \frac{38}{\sqrt{120}}$$

9.- Calcula la distancia de la recta r: $\frac{x+5}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ al plano $\pi \equiv x - 3y + 4z - 11 = 0$.

Resolución:

El producto del vector director de la recta, $\vec{u}$, y el vector normal del plano, $\vec{n}$:

$\vec{u} . \vec{n}$ = (2, -1, 3).(1, -3, 4) = 2 + 3 + 12 $\neq$ 0

no es nulo, la recta no es paralela al plano y la distancia es nula.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula la distancia entre los puntos A = (1, 2, 1) y B = (5, 2, 7)

Solución: $\sqrt{52}$

2.- La distancia del punto P(1,2,3) a otro Q del eje de abscisas es 7. Halla las coordenadas de Q.

Solución: Q = (7, 0, 0) ó Q = (-5, 0, 0)

3.- Calcula la distancia del punto P = (3, 4 , 5) a la recta r: $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+5}{-1}$

Solución: $\sqrt{146}$

4.- Calcula la distancia del punto P(1, 3,-1) a la recta r: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

Solución: d(P, r) = $\sqrt{\frac{62}{6}}$

5.- Calcula la distancia del punto P = (1, 2, 5) y el plano π: 2x+2y-z-5 = 0

Solución: $\frac{4}{3}$

6.- Halla la distancia entre los planos π_1: 2x+y-z-3=0 y π_1: 4x+2y-2z-7=0

Solución: $\frac{1}{\sqrt{24}}$

7.- Calcula la distancia de la recta r: $\frac{x+5}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ al plano x-3y+4z-11 = 0.

Solución: 0.

8.- Calcula la distancia entre las rectas

r: $\begin{cases} x = 5 + ë \\ y = -1 \\ z = 8 + 2ë \end{cases}$ y $\begin{cases} x = 2 + 3ì \\ y = 2 - ì \\ z = -1 + 4ì \end{cases}$

Solución: 3

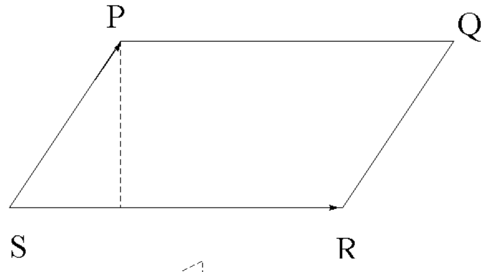
9.- Calcula la distancia entre las rectas

r: $\frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$ y s: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$

Solución: 3

3.3.- APLICACIONES DE LAS DISTANCIAS

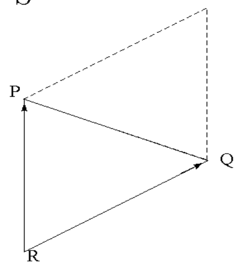
1.-Área de un paralelogramo .



El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial formado por dos de sus lados no paralelos:

$S(ABCD) = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

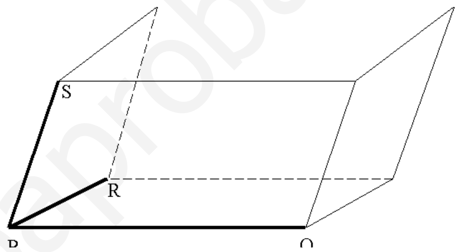
2.- Área de un triángulo.



El área de un triángulo es la mitad del área del paralelogramo formado por sus lados. Es pues la mitad del módulo del producto vectorial formado por dos de sus lados:

$S(ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

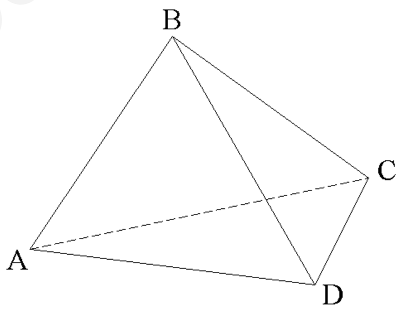
3.- Volumen de un paralelepípedo.



El volumen de un paralelepípedo cuyas tres aristas coinciden en un punto es el producto mixto de dichos vectores:

$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$

4.-Volumen de un tetraedro.



El volumen de un tetraedro es la sexta parte del paralelepípedo construido sobre sus aristas. Coinciden con la sexta parte del producto mixto de dichos vectores:

$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$

EJEMPLOS

1.- Halla el área del triángulo de vértices A =(-5,2,1), B=(1,7,5), C = (–1,0, 4).

Resolución:

Las coordenadas de la aristas son $\overrightarrow{AB} = (6, 5, 4)$ y $\overrightarrow{AC} = (4, -2, 3)$. El área es:

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(23,-2,-32)| = \frac{1}{2}\sqrt{23^2 + 2^2 + 32^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1557} = 19{,}71$$

2.- Calcula el área del paralelogramo formado por $\vec{u}$ = (2,1,5) y $\vec{v}$ = (3,2,1).

Resolución:

El área del paralelogramo es el módulo del vector:

$$S = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left\|\begin{matrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}\right\| = \sqrt{(-9)^2 + 13^2 + 1^2} = \sqrt{251} = 15{,}84$$

3.- Halla el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}$ = (2, 1, 0), $\vec{v}$ = (0, 1, 0) y $\vec{w}$ = (3, 2, 1).

Resolución:

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

4.- Calcula las coordenadas de un punto C perteneciente a la recta r: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ sabiendo que forma un triángulo de área 6 u^2 junto con los puntos A = (1, 2, 1) y B = (2, 3, 3)

Resolución:

Ponemos la ecuación de la recta en forma paramétrica. Tomamos la incógnita z como parámetro y nos queda un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas en el que determinamos las otras 2:

$$\begin{cases} x - y = 2 - z \\ 2x + y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 3 - x = 1 \\ y = 1 + z - 2 - y = -1 + z \end{cases}$$

Un punto genérico de la recta es C= (1, -1+λ, λ). Luego $\overrightarrow{AB}$ = (1, 1, 2) y $\overrightarrow{AC}$ =(0, -3+λ, λ-1)

El área del triángulo ABC será la mitad del módulo del vector producto vectorial de ambos vectores y ha de ser igual a 6 u^2

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3+\lambda & \lambda-1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(5-\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 + (-3+\lambda)^2} = 6$$

Elevando al cuadrado y desarrollando al valor del área la cuadrado:

$3\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 5$

Obtenemos los puntos:

C_1 = (0, -2, 0) y C_2 = (0, 2, 4)

5.- Calcula el volumen del tetraedro de vértices *A*= (0, 2, -2), B= (2, 0, 1), *C* = (1, –2, 0), y D = (2, 2, 1).

Resolución:

Las aristas son $\overrightarrow{AB}$ = (2,-2,3); $\overrightarrow{AC}$ = (1, -4, 2) y $\overrightarrow{AD}$ = (2,0,3).

El volumen es:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} V_{AB,AC,AD} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{|-2|}{6} = \frac{1}{3} \text{ u}^3$$

6.- Sean A = (-1, 0, 3), B = (3, 2, -1), C = (1, 1, 2), O = (0, 0, 0).
a) Calcula el área del triángulo ABC

b) Calcula el volumen al tetraedro OABC

Resolución:

a) El área del triángulo ABC es:

$$S_{ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{matrix} \right\| = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\ u^2$$

b) El volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-4+9-6-1) = \frac{1}{3}\ u^3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores $\vec{u} = (2,1,3)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ y $\vec{w} = (-1, -1, 0)$.
Solución: $\sqrt{19}$

2.- Calcula el volumen del tetraedro de vértices A = (0, 2, -2), B = (2, 0, 1), C = (1, -2, 0), y D = (2, 2, 1).
Solución: $V = \frac{1}{3}$

3.- Dados los vértices *A, B, C,* tales que *A* = (1, a, 0), *B* = (3, 0, 1), y *C* = (0, -5, 2), determina el valor de a para que el triángulo *ABC* sea rectángulo en *A.*
Solución: a = 0, a = -5

4.- Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PA}$ sean ortogonales, siendo A = (0, 2, 3) y B = (1, 1, 2).
Solución: P(-2, 12, -9)

5.- Halla el área del triángulo de vértices A = (1, 1, 1), B = (0, 3, 5) y C = (4, 0, 2).
Solución: 7,58

6.- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano 2x+y+3z = 6 con los ejes coordenados.
Solución: 11,23

7.- Escribe la ecuación del plano determinado por los puntos A = (0, 2, -2), B = (3, 2, 1) y C = (2, 3, 2) y calcula el volumen del tetraedro que limita con los ejes coordenados.
Solución: 18

8.- Calcula el volumen del paralelepípedo cuyas aristas no paralelas son las distancias del origen a los puntos de corte del plano π: 3x-3y+2z-6= 0 con los tres ejes de coordenadas.
Solución: 12 u^3

3.4.- EJERCICIOS DEL TEMA

1.- Halla la posición relativa de las rectas r: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + ë \\ z = 1 \end{cases}$ y s: $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.

Solución: Las rectas se cruzan.

2.- Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r: (x, y, z) = (-1-3μ,1+2μ, 2+μ) y es perpendicular al plano π : 2x+y-3z+4 = 0. Determina el ángulo formado por la recta y el plano.
Solución: x+ y + z - 2 = 0

3.- Dados el plano π ≡ x+2y-z+3 = 0 y el punto Q = (4, 5, -1) se pide:
a) Halla el punto P del plano π que está más cerca de Q.
b) Halla el punto R de la recta s dada por las ecuaciones s ≡ $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 4. \end{cases}$ para el que se verifica que el triángulo PQR es un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es el del vértice Q.
c) ¿Cuál es la posición relativa del plano π y de la recta que pasa por P y Q?.
Solución: a) P = (1, -1, 4), b) R = (1, -1, 4), c) se cortan.

4.- Da la ecuación del plano que pasa por P = (-1, 2, 7) y es perpendicular al vector $\vec{u}$ = (7, 4,-3)
Solución: 7x+4y-3z+20 = 0

5.- Halla el ángulo formado por el plano π: 2x -5y +7z =11 y la recta r: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-1}$

Solución: 35E

6.- Comprueba si la recta r: $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$ es perpendicular o paralela a:

a) π: 5x +y +2z = 3, b) σ: x + y + z = -43, c) s: $\frac{x+4}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$

Solución: a) Ni perpendicular ni paralelo, b) r y s perpendiculares. c) r y s perpendiculares.

7.- En un sistema ortonormal, se da el punto P = (-5, 4, 3) y el plano π: $\begin{cases} x = 1 - á + 2ì \\ y = 3 + 2á - ì \\ z = á + ì \end{cases}$. Halla:

a) Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a π.
b) Ecuación del plano que pasa por P y es paralela a π.
c) Proyección del eje OX sobre el plano π.
d) Distancia del punto al plano.
e) Simétrico del punto P respecto del plano π.

Solución: a) r: $\frac{x+5}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{-1}$ *, b) s: x+y-z+4 = 0, c) s:* $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$

d) d(P, p) = $\frac{8}{\sqrt{3}}$ *, e) S =* $\left(\frac{29}{3}, \frac{28}{3}, -\frac{7}{3}\right)$

8.- Calcula razonadamente el punto simétrico del punto A = (1, 2, 4) respecto del plano de ecuación x + y + z = 1)Cuál es la distancia de A al plano?

Solución: S = (-3, -2, 0), d((P, p) = $\frac{7}{\sqrt{3}}$

9.- Calcula el área del triángulo de vértices A = (3, -7, 4), B = (-1, 2, 5) y C = (-5, 11, 6), e interpreta geométricamente el resultado.
Solución: Area = 0; A, B y C están alineados.

10.- Sean dos planos de ecuaciones π_1: $ax + 9y - 3z = 8$, π_2: $x + ay - z = 0$. Sea r la recta intersección de ambas. Determina el valor de a para que:
a) Los planos sean paralelos.
b) Los planos sean perpendiculares.
c) La recta corte al plano OXY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea $\sqrt{2}$

Solución: a) a = 3, b) a = $-\dfrac{3}{10}$ *, c) a = ±1, ±7.*

11.- Considera el tetraedro de vértices A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1) y D = (0, 0, 0).
a) Halla la recta r que pasa por el punto D y es perpendicular al plano determinada por los puntos A, B y C.
b) Halla la mínima distancia entre la recta r y la recta que pasa por los puntos A y B.
c) Calcula el volumen del tetraedro.

Solución: $r \equiv \begin{cases} x = ë \\ y = ë \\ z = ë \end{cases}$, $d(r, s) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $V = \dfrac{1}{6}$

12.- Considera el punto P = (-1, 2, 1).
a) Determina un punto Q del plano $\pi \equiv -3x + y + z + 5 = 0$ de forma que el vector PQ sea perpendicular al plano π.
b) Determina un punto M de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-10}{-1}$ de forma que el vector MP sea paralelo al plano π.
c) Calcula el área del triángulo MPQ.

Solución: a) Q = (2, 1, 0), b), M = (1, 0, 9), c) $\dfrac{\sqrt{1350}}{2}\ u^2$

13.- Calcula el área y el volumen del tetraedro determinado por los puntos A = (0, 0, 0), B = (0, a, 0), C = (a, 0, a) y D = (a, a, 0).

Solución: Area=$2\sqrt{3}\,a^2$ *, Volumen =* $\dfrac{|a^3|}{3}$

14.- Comprueba que los puntos A(1,1,1), B(0,-1,0) y C(2,3,0) forman un triángulo. Halla el área de dicho triángulo.
Solución: 2,24

15.- Calcula el área y el volumen del tetraedro determinado por los puntos A= (2, 3, 1), B = (4, 1, -2), C = (6, 3, 7) y D = (-5, -4, 8).
Solución: Area=121,63 , Volumen = 51,33.

16.- Calcula la ecuación del plano que corta perpendicularmente al segmento determinado por los puntos A = (1, 2, 3) y B = (2, 0, 3) y lo divide en dos partes iguales.
Solución: $\pi \equiv 2x - 4y - 1 = 0$

17.- Dados los vectores $\vec{u} = (2, -1, a)$ y $\vec{v} = (b, -2, 2)$, determina los valores de a y b tales que hacen que a y b sean ortogonales y $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Solución: a = -2 y b = 1.

18.- Dados los punto A = (2, 1, 3), B = (1, 2, 1), C = (2, 2, 2) y D = (a, 0, -a)
a) halla cuanto ha de valer a para que sean coplanarios.
b) Si queremos que el volumen del tetraedro formado por los cuatro puntos valga 6)Cuánto ha de valer a?
Solución: a) a = -1, b) a = 17

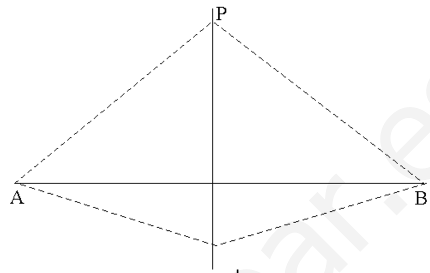
TEMA 4

4.- LUGARES GEOMÉTRICOS Y CÓNICAS

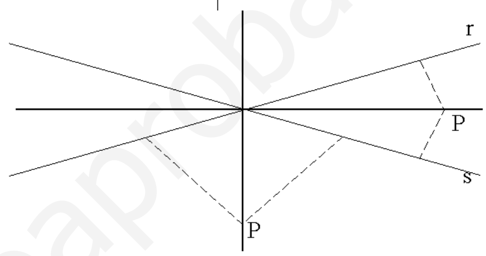
4.1.- LUGARES GEOMÉTRICOS

Se llama lugar geométrico a el conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad. Por ejemplo, una circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan de uno dado llamado centro.

- **Mediatriz** de un segmento AB es el lugar geométrico formado por los puntos que equidistan de los puntos A y B. Es una recta perpendicular al segmento en su punto medio M. La condición que cumplen es
  d(P,A) = d(P,B).



- **Bisectriz** del ángulo formado por dos rectas r y s es el lugar geométrico formado por todos los puntos que equidistan de ambas rectas. Serán rectas perpendiculares entre si. La condición que cumplen es
  d(P, r) = d(P, s).



EJEMPLOS

1.- Halla la mediatriz del segmento que une los puntos A =(1, 2) y B =(2,1).

Resolución:
Obligando a que P = (x, y) equidista de A y B:
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 \Rightarrow 2x-2y = 0 \Rightarrow x-y = 0$

El lugar geométrico pedido es la recta y = x.

2.- Halla las ecuaciones de las bisectrices del ángulo que forman las rectas r: x + y = 0 y s: x - y = 0

Resolución:
Los puntos que están a igual distancia de los ambas rectas son:

$$\frac{x-y}{\sqrt{1+1}} = \forall \frac{x+y}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow \begin{cases} x-y = x+y \\ x-y = -x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico pedido son las recta x = 0 e y = 0.

3.- Dados los puntos A = (1, 2, 3) y B = (1, 2, 1). Halla el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de ambos.

Resolución:
Obligando a que la distancia de P= (x,y,z) a A y B sea la misma:
$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2$
$z^2 - 6z + 9 = z^2 - 2z + 1 \Rightarrow -4z + 8 = 0 \Rightarrow z = 2$

El lugar geométrico pedido es el plano z = 2.

4.- Halla el lugar geométrico de todos los puntos del plano x = y que distan una unidad del plano 2x-y+2z = 2.

Resolución:

Las ecuaciones paramétricas del plano x = y son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ cuyo punto genérico es (λ, λ, μ). Como la distancia de este punto al segundo plano es 1, tenemos:

$$\left|\frac{2\lambda - \lambda + 2\mu - 2}{\sqrt{4+1+4}}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{\lambda + 2\mu - 2}{3}\right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu - 2 = 3 \\ \lambda + 2\mu - 2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 - 2\mu \\ \lambda = -1 - 2\mu \end{cases}$$

Llevando estos valores a las ecuaciones paramétricas del plano obtenemos:

$\begin{cases} x = 5 - 2\mu \\ y = 5 - 2\mu \\ z = \mu \end{cases}$ y $\begin{cases} x = -1 - 2\mu \\ y = -1 - 2\mu \\ z = \mu \end{cases}$

que son dos rectas.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos A = (1, 2) y B = (3, 4).
Solución: x+ y – 5 = 0

2.- Halla las ecuaciones de las bisectrices del ángulo que forman las rectas r:x+y-2 = 0 y s: x–y+4 = 0.
Solución: x = -1 e y = 3.

3.- Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos A = (-a, 0) y B = (a, 0) sea una cantidad constante igual a $4a^2$.
Solución: $x^2 + y^2 = a^2$

4.- Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos A = (-a, 0) y B = (a, 0) sea una cantidad constante igual a $4a^2$.
Solución: x=- a, x = a.

5.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos A = (0, 2) y B = (4, 0) sea 18.
Solución: $x^2+y^2 -4x-2y+1 =0$

6.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos A = (0, 2) y B = (4, 0) sea 18.
Solución: 2x-y-3 = 0.

7.- Un segmento AB tiene una longitud de 2 unidades. Halla el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el área del triángulo APB sea la unidad.
Solución: Dos rectas paralelas a AB tales que su distancia a AB es la unidad.

8.- Halla el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de los puntos A = (1, 2, 1) y B = (0, 2, 0).
Solución: x+z-1 = 0.

9.- Halla el lugar geométrico de los puntos desde los que se ven los puntos A = (1, 2, 1), B = (1, 1, 2) bajo un ángulo recto.)Qué figura es dicho lugar?
Solución: $x^2+y^2+ z^2 -2x-3y-3z+1 = 0$. *Es una esfera*

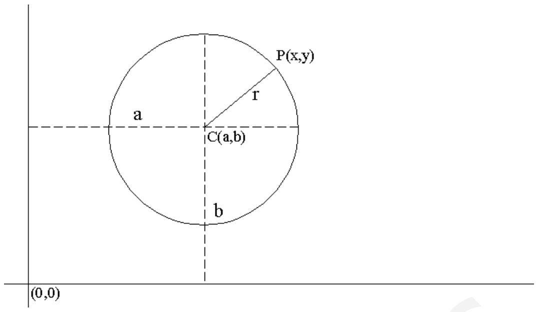
4.2.- CIRCUNFERENCIA

1.- Ecuación de la circunferencia

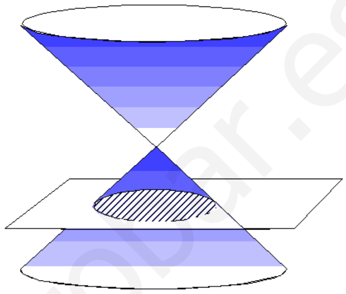
La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos P= (x, y) del plano que equidistan una distancia r de un punto dado llamado centro C = (a ,b). La ecuación de la circunferencia será:
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$x^2+y^2 + mx + ny + p = 0$,

con $p = a^2+b^2-r^2$, $m = -2a$, $n = -2b$, o bien:

$$a = -\frac{m}{2},\ b = -\frac{n}{2},\ r = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$$



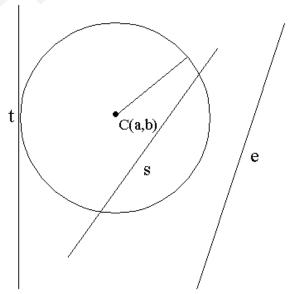
La circunferencia es la cónica que se obtiene al cortar una superficie cónica por un plano perpendicular al eje (es decir que forma un ángulo de 90E con éste) y que corte todas las generatrices, tal como se ve en la figura.



2.- Posición de una recta respecto de una circunferencia

Una recta pueden ser:

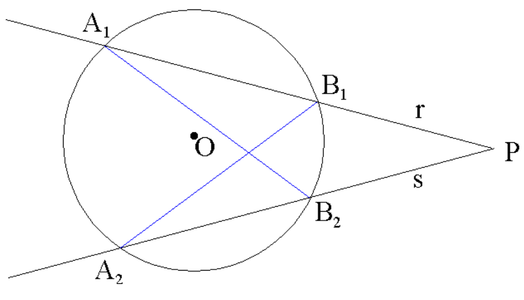
- **recta secante**: hay dos soluciones, si el discriminante de la ecuación es positivo. Es la recta s de la figura.
- **recta exterior**: no hay solución, si el discriminante de la ecuación es negativo. Es la recta e de la figura.
- **recta tangente**: una solución, si el discriminante de la ecuación es nulo. Es la recta t de la figura.



3.- Potencia

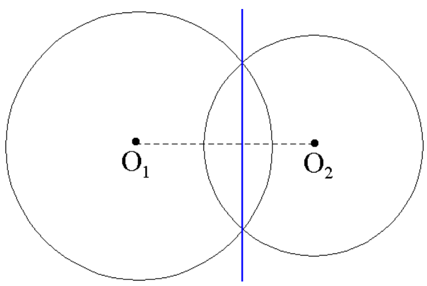
La potencia de un punto P respecto de la circunferencia C es el producto de la longitud del par de segmentos formado por el punto P y los puntos de corte A y B de la secante trazada desde P a C:
$Pot_C(P) = (x_1-a)^2+(y_1-b)^2 - r^2 = d^2 - r^2$

- Si $Pot_C(P) > 0$, el punto es exterior.
- Si $Pot_C(P) = 0$, el punto pertenece.
- Si $Pot_C(P) < 0$, el punto es interior.



4.- Eje y centro radical

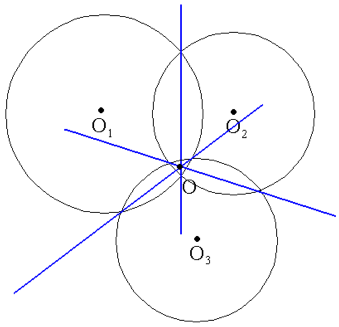
Eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias.
$Pot_C(P) = Pot_{C'}(P)$



Sean las circunferencias $C \equiv x^2+y^2 + mx + ny + p = 0$, $C' \equiv x^2+y^2 + m'x + n'y + p' = 0$, el eje radical tiene de ecuación $(m-m')x+(n-n')y+(p-p') = 0$ y es perpendicular al segmento que une ambos centros.

Centro radical de tres circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de las tres circunferencias.

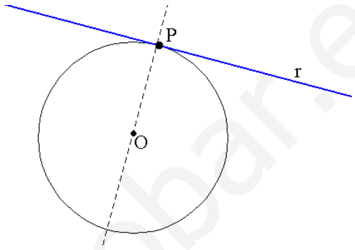
Se halla como intersección de los ejes de dichas circunferencias tomadas dos a dos.



5.- Recta tangente y normal

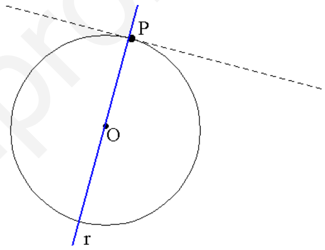
Dada la circunferencia $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ y $P=(x_0,y_0)$ un punto de la misma, la ecuación de la **recta tangente** a ésta en el punto P es:

$$y-y_0 = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}(x-x_0)$$



Dada la circunferencia $(x-a)^2 +(y-b)^2 = r^2$ y $P=(x_0,y_0)$ un punto de la misma, la ecuación de la **recta normal** a ésta en el punto P será:

$$y-y_0 = -\frac{y_0 - b}{x_0 - a}(x-x_0)$$



EJEMPLOS

1.- Halla la ecuación de la circunferencia con centro en P = (4, 5) y que pasa por el origen de coordenadas.

Resolución:
La ecuación de la circunferencia sustituyendo valores del centro y obligando a que pase por el origen de coordenadas O = (0,0) da el radio:
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (0-4)^2+(0-5)^2 = r^2 \Rightarrow 16+25 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{41}$

La ecuación de la circunferencia es:
$(x-4)^2+(y-5)^2 = 41$

2.- Halla la potencia del punto A = (1, 1) respecto de la circunferencia C: $x^2+y^2-4x+6y = 0$)Cuál es la posición de dicho punto respecto de la circunferencia?. A continuación halla un punto interior y otro perteneciente a dicha circunferencia, hallando la potencia de estos puntos respecto de la circunferencia.

Resolución:
- $Pot_C(A) = 4 > 0$. Como $Pot_C(A) > 0$ el punto es exterior.
- El punto perteneciente es B = (0,0) ya que $Pot_C(B) = 0$
- El punto interior es D = (1, 0) ya que $Pot_C(D) = -3 < 0$

3.- Comprueba que el eje radical de las circunferencias C: $x^2+y^2-2y-8 = 0$ y C': $x^2+y^2-2x-24 = 0$ es perpendicular a la recta determinada por los centros de las dos circunferencias.

Resolución:
El eje radical se obtiene igualando las potencias de ambas circunferencias:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Pot}_C(P): x^2+y^2-2y-8\\ \mathrm{Pot}_{C'}(P): x^2+y^2-2x-24\end{array}\right\} \Rightarrow -2y-8=-2x-24 \Rightarrow x-y+8=0 \Rightarrow y=x+8$$

Para hallar la recta determinada por los centros, obtenemos ambos y hallamos la recta que los une:
C: $x^2+y^2-2y-8=0 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=9 \Rightarrow O=(0,1)$
C': $x^2+y^2-2x-24=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=25 \Rightarrow O'=(1,0)$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \Rightarrow \frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -x=y-1 \Rightarrow x+y-1=0 \Rightarrow y=-x+1$$

Como las pendientes son: m = 1 y m' = -1, ambas rectas son perpendiculares.

4.- Halla el centro radical de las circunferencias C: $x^2+y^2-2y-8=0$, C': $x^2+y^2-2x-24=0$ y C'': $x^2+y^2-2x+4y-12=0$.

Resolución:
El eje radical de C y C' es:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Pot}_C(P): x^2+y^2-2y-8\\ \mathrm{Pot}_{C'}(P): x^2+y^2-2x-24\end{array}\right\} \Rightarrow -2y-8=-2x-24 \Rightarrow x-y+8=0$$

El eje radical de C y C'' es:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Pot}_C(P): x^2+y^2-2y-8\\ \mathrm{Pot}_{C'}(P): x^2+y^2-2x+4y-12\end{array}\right\} \Rightarrow -2y-8=-2x+4y-12 \Rightarrow x-3y+2=0$$

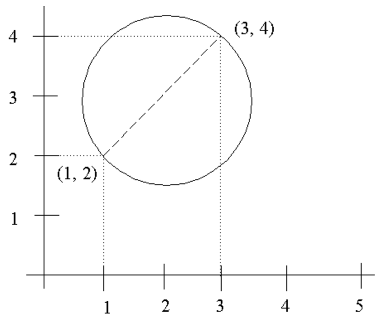
la intersección de ambos ejes radicales da el centro radical:

$$\left.\begin{array}{l}x-y=-8\\ x-3y=-2\end{array}\right\} \Rightarrow O=(11,-3).$$

5.- Calcula la ecuación de una circunferencia sabiendo que los puntos *A* = (1, 2) y *B* = (3, 4) son diametralmente opuestos.

Resolución:
La circunferencia queda determinada cuando se conoce el centro y su radio.
El centro de la circunferencia es:

$$C=\left(\frac{1+3}{2},\frac{2+4}{2}\right) = (2,3)$$



El radio es la mitad de la distancia entre ambos puntos:

$$r=\frac{d(A,B)}{2}=\frac{\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+4}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

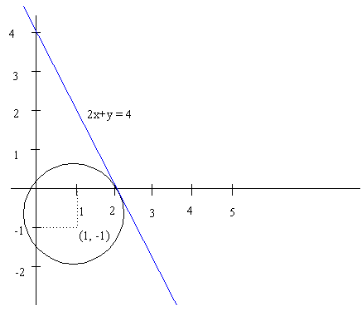
La ecuación de la circunferencia es:
$(x-2)^2+(y-3)^2=2$

6.- Calcula el radio de una circunferencia cuyo centro es el punto C = (1,–1) sabiendo que la recta de ecuación 2x+y = 4 es tangente en uno de sus puntos.

Resolución:

El radio es la distancia del centro C=(1,–1) de la circunferencia a la recta tangente t: 2x+y-4 = 0:

$$d(C,t) = \frac{|2.1+1.(-1)+4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$



Sustituyendo valores del centro y radio se obtiene la ecuación:

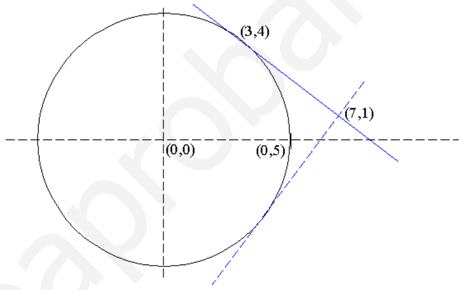
$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

7.- a) Demuestra que la recta r de ecuación 3x+4y-25 = 0 es tangente a la circunferencia C ≡ $x^2 + y^2 = 25$ en el punto A = (3, 4).

b) Desde el punto B = (7, 1) de la recta r se traza la otra recta tangente a la circunferencia anterior. Si se denota por r_1 a esta segunda recta, comprueba que r_1 es perpendicular a r y obtén su ecuación.

Resolución:

a) Para comprobar que r es tangente al circunferencia en el punto A se comprueba que el punto de corte de ambas es único.



$3x+4y-25 = 0 \Rightarrow y = \frac{25-3x}{4}$

sustituyendo:

$$x^2+\left(\frac{25-3x}{4}\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2-6x+9= 0 \Rightarrow x = 3$$

que es única, por lo tanto r es tangente a C en el punto A = (3, 4).

b) La recta r_1 tangente desde el punto B(7,1) de a la circunferencia anterior, será aquella que pase por dicho punto y de pendiente desconocida.

y = mx +(1-7m)

Obligamos a que su distancia al centro de la circunferencia sea igual al radio para que sea tangente, como se ve en la figura anterior:

$$d(O, r) = 5 \Rightarrow \frac{|-7m+1|}{\sqrt{m^2+1^2}} = 5$$

Elevando al cuadrado y despejando:

$$\frac{(-7m+1)^2}{m^2+1^2} = 25 \Rightarrow 12m^2-7m-12 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{4}{3},\ m_2 = -\frac{3}{4}$$

Como m_2 es la pendiente de la recta r, la pendiente de r_1 es $m_1 = \frac{4}{3}$. El producto de ambas pendientes será:

$$\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$$

luego r_1 es perpendicular a r.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que los cuadrados de sus distancias al origen coincida con la diferencia de sus distancias a los ejes coordenados.
Solución: $x^2+y^2-x+y = 0$ *ó* $x^2+y^2+x-y = 0$.

2.-)Cuál de las siguientes expresiones representa una circunferencia?
a) $2x^2+ 2y^2 + 8x + 16 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 16 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 16 = 0$
Solución: a) y c)

3.- Si el diámetro de una circunferencia vale 5 unidades y forma con la parte positiva de los ejes de coordenadas un triángulo de área 6 unidades, halla la ecuación de dicha circunferencia.

Solución: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2 = 25$

4.- Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P = (1, 2), por su simétrico respecto de la recta x-y+2 = 0 y por el origen de coordenadas.
Solución: $x^2+y^2+x-3y = 0$

5.- Si se inscribe en la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ un triángulo equilátero uno de cuyos vértices es P = (0, 1), halla las coordenadas de los otros dos vértices.

Solución: $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $R = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

6.- Considera las circunferencias C: $x^2+y^2 +8x+32 = 0$ y C': $x^2+y^2 -4x+8 = 0$, halla:
a) La potencia del centro de la primera respecto de la segunda.
b) La intersección de ambas.
c) El eje radical que determinan ambas.
Solución: a) $Pot_C(C_1) = 40$, *b) No tiene, c)* $12x+24 = 0$.

7.- Calcula la longitud de la cuerda determinada por la recta y = x+2 al cortar la circunferencia $x^2+y^2 = 16$

Solución: $\sqrt{56}$

8.- Halla la ecuación de circunferencia que tiene por centro el punto C = (1, 4) y es tangente a la recta r: 3x+4y-4 = 0.
Solución: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$

9.- Halla la circunferencia de centro C = (-2, 3) y radio r = 4.
Solución: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$.

10.- Dada la ecuación $x^2+y^2-3x+5y-14 = 0$)representa una circunferencia? Si es así, halla las coordenadas del centro y el radio.

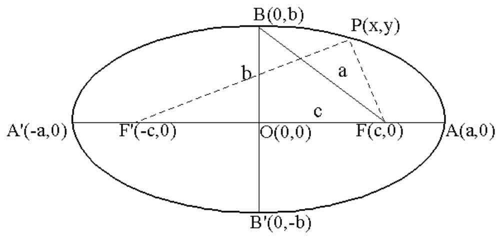
Solución: Sí, $C = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $r = \frac{\sqrt{90}}{2}$

11.- Halla el valor de k para que la ecuación siguiente $x^2+y^2-8x+10y+k = 0$ represente una circunferencia de radio 7.
Solución: $k = -8$.

12.- Determina la intersección de circunferencia C: $x^2+y^2 = 5^2$ y la recta r: x + y = 7. A continuación halla otra tangente y una última exterior a ella.
Solución: $x_1 = 3$ *y* $x_2 = 4$, *T º x = 5, E º x = 7*

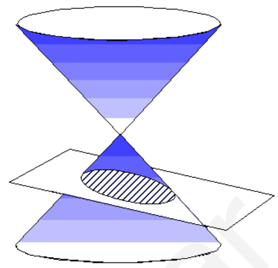
4.3.- ELIPSE

1.- Ecuación de la elipse



La elipse es el lugar geométrico de los puntos P = (x, y) del plano cuya suma de distancias a dos puntos dados llamados focos F y F' es constante
PF +PF' = 2a

La elipse es una cónica que se obtiene al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo (es decir que forma un ángulo menor de 90E) al eje y que corte todas las generatrices, tal como se ve en la figura.



2.- Elementos

- Focos: son los puntos F = (c, 0) y F' = (-c, 0)
- Ejes: son las rectas respecto de las cuales presenta simetría radial la elipse
- Centro: es el punto O = (0, 0) donde se cortan los ejes.
- Vértices: son los puntos A = (a, 0), A' = (-a, 0), B = (0, b) y B' = (0, -b) donde corta los ejes.
- Eje mayor: segmento que une los vértices A y A' (su longitud es 2a)
- Eje menor: segmento que une los vértices B y B' (su longitud es 2b)
- Distancia focal: segmento que une los focos F y F' (su longitud es 2c)

3.- Excentricidad

La excentricidad e mide el achatamiento de la elipse, es el cociente $e = \frac{c}{a}$ dicho cociente puede tomar los valores:

- 0 que una circunferencia
- 1 que es una recta
- 0 < e < 1 que es una elipse tanto más achatada cuanto mayor sea e.

4.- Ecuación reducida

Aplicando la condición de la elipse elevando al cuadrado, aislando raíces y utilizando la relación entre semiejes y focos $c^2 = a^2 – b^2$ obtenemos la ecuación reducida de la elipse.

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

5.- Rectas tangente y normal

Dada la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ y $P = (x_0, y_0)$ un punto de la misma

- la ecuación de la recta tangente a ésta por el punto P es: $y-y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x-x_0)$
- la ecuación de la recta normal a ésta por el punto P es: $y-y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x-x_0)$

EJEMPLOS

1.- Halla los elementos de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Resolución:
Como a = 5 y b = 3, $c^2 = 25-9= 16 \Rightarrow c = 4$ y obtenemos:

- Focos: F = (4, 0) y F' = (-4, 0).
- Vértices: A = (5, 0), A' = (-5, 0), B = (0, 3) y B' = (0, -3).
- Eje mayor: 2a = 10.
- Eje menor: 2b = 6.
- Distancia focal: 2c = 8.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$.

2.- Halla la ecuación de la elipse cuyos focos son F = (3, 0) y F' = (-3, 0), sabiendo que su eje mayor es 10.

Resolución:
Como 2a = 10, a =5. Al ser el foco F(c,0) = (3,0), tenemos que c = 3. De la relación $b^2 = a^2-c^2 = 25-9 = 16$ obtenemos b = 4

La ecuación es: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

3.- Halla la tangente y la normal a la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ en $P = \left(\frac{4}{3}, \sqrt{5}\right)$.

Resolución:
Como el punto P pertenece a la elipse ya que $\frac{16/9}{4} + \frac{5}{9} = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1$ podemos aplicar las fórmulas dadas:

- Recta tangente: $y-\sqrt{5} = -\frac{9 \cdot 4/3}{4\sqrt{5}}\left(x - \frac{4}{3}\right) \Rightarrow y-\sqrt{5} = -\frac{3}{\sqrt{5}}\left(x - \frac{4}{3}\right)$
- Recta normal: $y-\sqrt{5} = \left(x - \frac{4}{3}\right) \Rightarrow y-\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(x - \frac{4}{3}\right)$

4.- La trayectoria de la tierra alrededor del Sol es una elipse cuyo afelio es de 151 y su perihelio de 146 millones de kilómetros. Si el Sol ocupa uno de los focos de la elipse y el afelio y perihelio son la mayor y menor distancia posible respectivamente, determina:
a) Los semiejes mayor y menor de la elipse.
b) la excentricidad de dicha elipse

Resolución:
a) Al ocupar el Sol uno de los focos las distancias mínima y máxima de la tierra al Sol son a-c y a+c respectivamente, Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a + c = 151 \\ a - c = 146 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos 2a = 297, el semieje mayor es a=148,5 y restándolas $2c = 5 \Rightarrow c=2,5$.
De la relación $b^2 = a^2-c^2 = 148,5^2 - 2,5^2 = 22046$ obtenemos b=148,47

b) La excentricidad se obtiene mediante la relación e = $\frac{2,5}{148,5}$ = 0,017 luego es casi una circunferencia.

5.-)Para qué valor de k la ecuación $\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{25-k}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{16-k}}$ = 1 representa una elipse? Comprueba que todas esas elipses tienen los mismos focos.

Resolución:
La ecuación es de una elipse si los denominadores son positivos, es decir si:
25-k > 0 y 16-k > 0 $\Rightarrow$ k<16

Hallemos los focos. Como los semiejes son a = $\sqrt{25-k}$, b = $\sqrt{16-k}$ la distancia focal será c = $\sqrt{a^2-b^2}$ = $\sqrt{25-16}$ = 3

Luego los focos son F =(3, 0) y F' = (-3, 0).

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla los elementos de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
Solución: F = (3,0) y F' = (-3,0); A = (5,0), A' = (-5,0), B = (0,4) y B' = (0, -4).
a = 5, b = 3; c = 3; e = $\frac{3}{5}$ *= 0,6.*

2.- Halla la ecuación de la elipse cuyos focos son F = (4, 0) y F' = (-4, 0), sabiendo que su eje mayor es 10.
Solución: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3.- Halla la tangente y la normal a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ en el punto P = $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solución: t º $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{25}{8}(x-1)$, $n \equiv y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{25}(x-1)$

4.- Halla los focos, semiejes y excentricidad de la elipse $2x^2 + 3y^2 = 108$
Solución: F = ($\sqrt{13}$ *,0) y F' = (-* $\sqrt{13}$ *,0), a = 7; b = 6; e =* $\frac{\sqrt{13}}{7}$

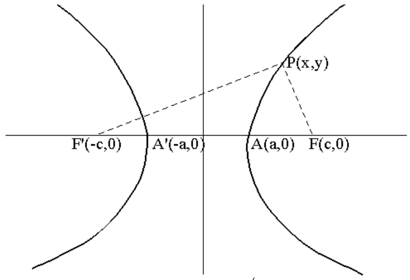
5.- Halla la tangente y la normal a la elipse $2x^2 + 3y^2 = 108$ en los puntos de ordenada y = 3.
Solución: t º $y-3 = -\frac{6\sqrt{3}}{7}\left(x - \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$, $n \equiv y-3 = \frac{7}{6\sqrt{3}}\left(x - \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$

t º $y-3 = \frac{6\sqrt{3}}{7}\left(x + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$, $n \equiv y-3 = -\frac{7}{6\sqrt{3}}\left(x + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$

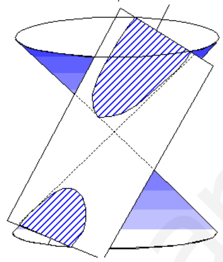
6.- Determina la ecuación de la elipse cuya suma de distancias a los focos F = (4, 0) y F' = (-4, 0) vale 10.
Solución: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

4.4.- HIPÉRBOLA

1.- Ecuación de la hipérbola



La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P = (x, y) del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos dados llamados focos F y F' es constante:
PF -PF' = 2a



La hipérbola es una cónica que se obtiene al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo al eje y que forma con éste un ángulo menor que el de las generatrices. La hipérbola tiene dos ramas.

2.- Elementos

- Focos: son los puntos F(c,0) y F'(-c,0)
- Ejes: rectas respecto de las cuales presenta simetría radial la elipse
- Centro: punto O(0,0) donde se cortan los ejes.
- Vértices: puntos A(a,0) y A'(-a,0) donde la elipse corta los ejes.
- Eje mayor: segmento que une los vértices A y A' (su longitud es 2a)
- Eje menor: segmento que une los puntos B(0,b) y B'(0,-b) tales que $b^2 = c^2 - a^2$
- Distancia focal: segmento que une los focos F y F' (su longitud es 2c)
- Asíntotas: son las rectas $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$,

3.- Excentricidad

La excentricidad e es el cociente $e = \frac{c}{a}$ varía entre 1 (una recta) e infinito, en los valores intermedios tenemos una hipérbola tanto más apuntada cuanto mayor sea e.

4.- Ecuación reducida

Aplicando la condición de la hipérbola, elevando al cuadrado, aislando raíces y utilizando la relación entre semiejes y focos $c^2 = a^2 + b^2$ obtenemos la ecuación reducida de la elipse.

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

5.- Hipérbola equilátera

- Una hipérbola es equilátera si sus semiejes son iguales. La ecuación reducida es $x^2 - y^2 = a^2$
- Las asíntotas son y = x e y = -x, el semieje focal vale $c = \sqrt{2}\,a$ y la excentricidad $e = \sqrt{2}$
- Si se toman como ejes sus asíntotas la ecuación reducida es xy = k, siendo $k = \frac{a^2}{2}$

6.- Recta tangente y normal

Dada la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $P(x_0,y_0)$ un punto de la misma:

- La ecuación de la recta tangente a ésta por el punto P es: $y-y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x-x_0)$
- la ecuación de la recta normal a ésta por el punto P es: $y-y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x-x_0)$

EJEMPLOS

1.- Halla los elementos de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Resolución:
Como a = 4 y b = 3, $c^2 = a^2+b^2 = 16+9 = 25 \Rightarrow c = 5$ y obtenemos:

- Focos: F = (5, 0) y F' = (-5, 0).
- Vértices: A = (4, 0) y A' = (-4, 0)
- Eje mayor: 2a = 8.
- Eje menor: 2b = 6.
- Distancia focal: 2c = 10.
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1{,}25$.
- Asíntotas: $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$.

2.- Halla la ecuación de la hipérbola cuyos focos son los puntos F = (13, 0) y F' = (-13, 0), sabiendo que su eje mayor es 24.

Resolución:
Como $2a = 24 \Rightarrow a = 12$. Al ser el foco F(c,0) = (13,0), tenemos que c = 13.

De la relación $b^2 = c^2 - a^2 = 169-144 = 25$ obtenemos b = 5.

La ecuación es $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

3.- Halla la ecuación respecto de sus asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

Resolución:
De la ecuación obtenemos $x^2 - y^2 = 9$ lo cual demuestra que es equilátera.

Como $k = \frac{a^2}{2} = \frac{9}{2}$ obtenemos la ecuación referida a sus asíntotas: $x'y' = \frac{9}{2}$

4.- Halla la tangente y la normal a la hipérbola $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ en el punto P = (2, 1).

Resolución:
Como P = (2, 1) pertenece a la hipérbola podemos aplicar las fórmulas:

- Recta tangente: $y-y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x-x_0) \Rightarrow y-1 = \frac{2.2}{1.1}(x-2) \Rightarrow y-1 = 4(x-2)$
- Recta normal: $y-y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x-x_0) \Rightarrow y-1 = -\frac{1.1}{2.2}(x-2) \Rightarrow y-1 = -\frac{1}{4}(x-2)$

5.- Dada la hipérbola de ecuación $x^2 -3y^2 -4k = 0$, se pide:
a) Calcula k para que la hipérbola corte a r: x + y = 4 en un único punto.
b) Para k = 6 calcula su excentricidad.

Resolución:

a) Hallemos la intersección de la recta y la hipérbola, como: x = 4-y:

$(4-y)^2 - 3y^2 - 4k = 0 \Rightarrow y^2 + 2y + (2k-8) = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(2k-8)}}{2} = 3$

para que sean tangentes, la solución ha de ser única, con discriminante nulo:

$-8k + 36 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{9}{2}$

b) Para k =6, la ecuación será $x^2 - 3y^2 - 24 = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{24} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

Hallamos a y c: $a = \sqrt{24}$ y $b = \sqrt{8} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24+8} = \sqrt{32}$

Luego $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Halla los elementos de la hipérbola $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

Solución: F = (13, 0) y F' = (-13, 0); A = (12, 0) y A' = (-12, 0); a = 12, b = 5; c = 13.

$e = \dfrac{13}{12}$ *; asíntotas:* $y = \dfrac{13}{12}x,\ y = -\dfrac{13}{12}x.$

2.- Halla la ecuación de la hipérbola con foco F = (5, 0) y uno de cuyos vértices es V = (4, 0).

Solución: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

3.- Halla la tangente y la normal a la elipse $\dfrac{x^2}{5} - y^2 = 1$ en el punto P(5, 2)

Solución: t º $y-2 = \dfrac{1}{2}(x-5)$; *n º* $y-2 = -2(x-5)$.

4.- Halla la ecuación respecto de sus asíntotas de la hipérbola $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Solución: x'y' = 8.

5.- Halla los focos, semiejes, vértices, asíntotas y excentricidad de la elipse $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Solución: F = (5, 0) y F' = (-5, 0); A = (4, 0) y A' = (-4, 0), a = 4, b = 3; c = 5.

$e = \dfrac{5}{4}$ *; asíntotas:* $y = \dfrac{3}{4}x,\ y = -\dfrac{3}{4}x.$

6.- Halla la tangente y la normal a la hipérbola $x^2 - 9y^2 = 16$ en los puntos de ordenada y = 1.

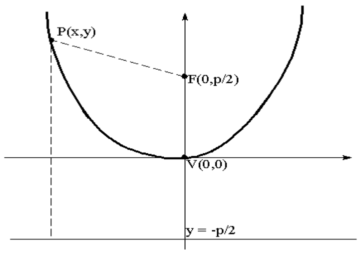
Solución: t º $y-1 = \dfrac{1}{9}(x-5)$; *n º* $y-1 = 9(x-5)$. *t º* $y-1 = -\dfrac{1}{9}(x+5)$; *n º* $y-1 = -9(x+5)$.

7.- Halla la ecuación de la hipérbola cuya diferencia de distancias a los focos F= (4,0) y F' =(-4,0) valga 6.

Solución: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$

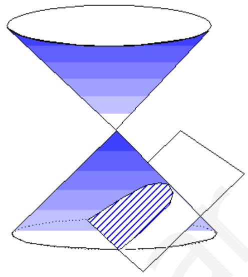
4.5.- PARÁBOLA

1.- Ecuación de la parábola



La parábola es el lugar geométrico de los puntos P = (x, y) del plano que equidistan de un punto F dado llamado foco y de una recta d llamada directriz:
d(P,F) = d(P, d)

La parábola es una cónica que se obtiene al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo al eje y cuyo ángulo con dicho eje es el mismo que el que forman las generatrices. El plano anterior es paralelo a la generatriz opuesta.



5.2.- Elementos

	Simetría en el eje OY	Simetría en el eje OX
Foco	$F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$	$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$
Directriz	$y = -\frac{p}{2}$	$x = -\frac{p}{2}$
Parámetro	distancia p del foco a la directriz	
Eje	recta respecto de la cual presenta simetría radial la parábola	
Vértice	punto O = (0, 0) donde la parábola corta el eje	

5.3.- Ecuación reducida

- Simetría en el eje OY: $y = \frac{x^2}{2p}$
- Simetría en el eje OX: $x = \frac{y^2}{2p}$

5.4.- Rectas tangente y normal

- Simetría en el eje OY: Dada la parábola $y = \frac{x^2}{2p}$ y $P = (x_0, y_0)$ un punto de la misma,

  la ecuación de la recta tangente a ésta por el punto P es $y-y_0 = \frac{x_0}{p}(x-x_0)$

  la ecuación de la recta normal a ésta por el punto P es $y-y_0 = -\frac{p}{x_0}(x-x_0)$

- Simetría en el eje OX: Dada la parábola $x = \frac{y^2}{2p}$ y $P = (x_0, y_0)$ un punto de la misma,

  la ecuación de la recta tangente a ésta por el punto P es $y-y_0 = \frac{p}{y_0}(x-x_0)$

  la ecuación de la recta normal a ésta por el punto P es $y-y_0 = -\frac{y_0}{p}(x-x_0)$

EJEMPLOS

1.- Calcula los elementos de la parábola $y = 4x^2$.

Resolución:

- Como la ecuación de la parábola es $y = \frac{x^2}{2p}$, $p = \frac{1}{8}$.
- Foco: es el punto F = $\left(0,\ \frac{1}{16}\right)$
- Directriz: es la recta $y = -\frac{1}{16}$
- Eje: recta x = 0.
- Vértice: punto O = (0,0).

2.- Calcula los elementos de la parábola $y^2 = 4x$.

Resolución:

- Como la ecuación de la parábola es $x = \frac{y^2}{2p}$, p = 2.
- Foco: es el punto F = (2, 0)
- Directriz: es la recta x = -2
- Eje: recta y = 0.
- Vértice: punto O = (0,0).

3.- Determina la ecuación de la parábola cuyos puntos equidistan del punto F = (4, 0) y del eje de ordenadas.

Resolución:

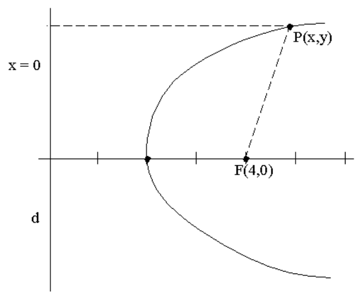
La distancia de la parábola al foco es:

$d(P,F) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$

La distancia de la parábola al eje es la ordenada: d(P, r) = x

Igualando ambas distancias:

$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = x \Rightarrow y^2 = 8x-16$



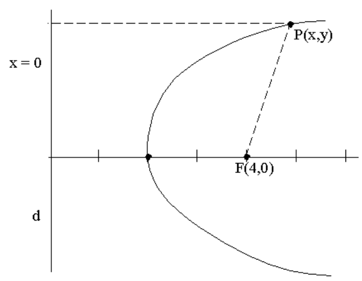
4.- Encuentra el foco y la directriz de la parábola de ecuación $y^2 = 4x$.

Resolución:

La parábola $y^2 = 4x$ está centrada en el eje OX, siendo el F= (f,0) y la directriz d:x =-f.

Como es una parábola un punto P=(x,y) cumple que d(P,F) = d(P, d). Para hallar f igualamos las distancias, desde un punto, tomamos P = (1, 2):

$\sqrt{(1-f)^2 + 2^2} = 1+f \Rightarrow -2f+4 = 2f \Rightarrow f=1$



El foco es F = (1,0) y la directriz es x = -1.

5.- Halla la tangente y la normal a $y = x^2$ en el punto de ordenada y = 1.

Resolución:

La abscisa es $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ y el parámetro es $p = \frac{1}{2}$, aplicamos las fórmulas:

- Rectas tangentes, son de la forma $y-y_0 = \frac{x_0}{p}(x-x_0)$:
  - En x = -1: $y - 1 = \frac{-1}{1/2}(x + 1) \Rightarrow 2x + y + 1 = 0$
  - En x = 1: $y - 1 = \frac{1}{1/2}(x - 1) \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$

- Rectas normales, son de la forma $y-y_0 = -\frac{p}{x_0}(x-x_0)$
  - En x = -1: $y - 1 = -\frac{1/2}{-1}(x + 1) \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$
  - En x = 1: $y - 1 = -\frac{1/2}{1}(x - 1) \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$

6.- Halla la tangente y la normal a $y^2 = x$ en el punto de abscisa x = 4.

Resolución:

La ordenada es $y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ y el parámetro es $p = \frac{1}{2}$. Aplicamos las fórmulas:

- Rectas tangentes, son de la forma $y-y_0 = \frac{p}{y_0}(x-x_0)$:
  - En y = -2: $y + 2 = \frac{1/2}{-2}(x-4) \Rightarrow x + 4y + 4 = 0$
  - En y = 2: $y - 2 = \frac{1/2}{2}(x-4) \Rightarrow x - 4y + 4 = 0$

- Rectas normales, son de la forma $y-y_0 = -\frac{y_0}{p}(x-x_0)$
  - En y = -2: $y + 2 = -\frac{-2}{1/2}(x - 4) \Rightarrow 4x - y - 18 = 0$
  - En y = 2: $y - 2 = -\frac{2}{1/2}(x + 4) \Rightarrow 4x + y + 14 = 0$

8.- Deduce razonadamente la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta x + y = 0 y por vértice el punto V = (2, 1).

Resolución:

El vértice es el punto medio de la perpendicular trazada desde el foco a la directriz. La recta $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ tiene pendiente m = -1. Como la pendiente de la perpendicular m' ha de ser tal que m.m' = -1, m' = 1 y pasa por V= (2, 1)
$y-1 = x-2 \Rightarrow y = x-1$

El punto de corte de ambas rectas será:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow -x = x-1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2} \Rightarrow D = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

El foco buscado será el simétrico de D respecto del vértice V, es decir:

$$\frac{1/2+a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4-\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{-1/2+b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

por lo tanto es el punto F = $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Como los puntos de la parábola P = (x, y) equidistan del foco F y de la directriz: igualando ambas distancias y elevando al cuadrado tenemos:

$$\sqrt{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{2}$$

$$x^2-7x+\frac{49}{4}+y^2-5y+\frac{25}{4} = \frac{x^2+y^2+2xy}{2}$$

$4x^2$-28x+49+y^2 -20y+25 = $2x^2$ +$2y^2$ +4xy

Obteniendo finalmente la ecuación:
$2x^2$+$2y^2$ -14x+-10y -2xy +37 = 0

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcula los elementos de la parábola $y^2 = 8x$.
Solución: F = (2, 0) y la directriz es x = -2, p =2, eje: x = 0, vértice: O = (0,0).

2.- Determina la ecuación de la parábola cuyos puntos equidistan del punto (0, 4) y del eje de ordenadas.
Solución: $x^2 = 8y - 16$

3.- Encuentra el foco y la directriz de la parábola de ecuación $y^2 = x$.

Solución: Solución: $F = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ *y la directriz es* $x = -\frac{1}{4}$

4.- Encuentra la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta x + y =-1 y por foco el punto F = (1, 1).
Solución: $x^2 + y^2 – 2xy - 6x - 6y + 3 = 0$

5.- Encuentra el foco y la directriz de la parábola de ecuación $y^2 = 2x$. Demuestra que cualquier punto de la parábola equidista del foco y de la directriz.

Solución: $F = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ *y la directriz es* $x = -\frac{1}{2}$

6.- Deduce razonadamente la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta y = -1 y por vértice el punto V = (0, 1).
Solución: $x^2 = 4y$

7.- Encuentra la tangente y la normal a la parábola $y^2 = 4x$ en el punto P = (1, 2).
Solución: t: x-y+1 = 0, n: x+y-3 = 0.

8.- Halla las ecuaciones de la tangentes trazadas a la parábola $y^2 = x$ desde el punto P = (2, 0).

Solución: $y = -\frac{1}{\sqrt{8}}(x-2)$, $y = \frac{1}{\sqrt{8}}(x-2)$

4.6.- EJERCICIOS DEL TEMA

1.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidisten de las rectas $x+2y+3 = 0$ y $3x+y+2 = 0$.
Solución: $7x^2-7y^2+2xy+20y+14 = 0$

2.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidisten de los puntos A = (3, 4) y B = (-1, –2)
Solución: $2x+3y-5 = 0$

3.- Identifica, indicando algunas de sus características, las formas geométricas de las siguientes expresiones algebraicas: a) $x^2 + y^2 + z^2 + 5x - 8y + z = 3$, b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$

Solución: a) Esfera de centro $C = \left(-\frac{5}{2}, 4, -\frac{1}{2}\right)$ *y radio* $R = \sqrt{\frac{51}{2}}$

b) Es un elipsoide de revolución de semiejes a, b, c y centrada en el origen.

4.- Halla el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de los tres planos
π:x–y+4=0, π': x – y + 4 = 0 y π'': x – y + 4 = 0.
Solución: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 12 = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x - 7y + z + 12 = 0 \end{cases}$

5.- Halla el lugar geométrico de los puntos desde los que se ven los puntos A = (5, 3, 4), B=(7,1,2) bajo un ángulo recto)Qué figura es dicho lugar?
Solución: $(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$, es una esfera de centro C = (6,2,3)

6.- Determina todos los puntos que equidistan de los planos π_1 yπ_2 dados por π_1 / 3x-4yX1 = 0, $\pi_2 \equiv$ 4x-4yX2z = 0)Qué figura representan?
Solución: $x+2y-5z+3 = 0$ y $-19x+22y+5z+3 = 0$. Representan dos planos perpendiculares.

7.- Determina todos los puntos que equidistan de los planos π_1 / x-y-1 = 0 y π_2 / x+y-z = 0.)Qué figura representan?
Solución: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-(\sqrt{3}+\sqrt{2})y+\sqrt{2}z-\sqrt{3} = 0$, $(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+(\sqrt{2}-\sqrt{3})y-\sqrt{2}z-\sqrt{3} = 0$
Son dos planos.

8.- Identifica, indicando algunas de sus características, la forma geométrica de las siguiente expresión algebraica:
$x^2 + y^2 + z^2 + 5x - 8y + z = 3$

Solución: Es una esfera de centro $C = \left(-\frac{5}{2}, 4, -\frac{1}{2}\right)$ *y radio* $R = \sqrt{\frac{51}{2}}$

9.- Determina A para que la ecuación $x^2+y^2-4x-2y+A = 0$ represente una circunferencia.
Solución: $A < 5$.

10.- Considera las circunferencias C: $x^2+y^2+8x+12 = 0$, C': $x^2+y^2-4x = 0$, C'': $x^2+y^2+4x-4y-8 = 0$ halla:
a) La potencia del centro de la segunda respecto de la tercera.
b) El eje radical que determinan la segunda y la tercera.
c) El centro radical de las tres
Solución: a) Pot = 4, b) $2x-y-2 = 0$, c) C = (-1, -4).

11.- Escribe las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto P = (0, 5) a la circunferencia $x^2+y^2 = 4$

Solución: $y = -\frac{\sqrt{21}}{2}x+5$, $y = \frac{\sqrt{21}}{2}x+5$

12.-)Para que valor de a la recta y = x + a es tangente a la circunferencia $x^2+y^2 = 9$?
Solución: $a = \pm 3\sqrt{2}$

13.- Halla la ecuación de la circunferencia concéntrica a $x^2+y^2+8x+16 = 0$ y cuyo radio es 3.
Solución: $x^2+y^2+8x+5 = 0$

14.- Halla la ecuación de la circunferencia de centro C = (5, -2) y pase por el punto P = (-1, 5).
Solución: $x^2+y^2-10x+4y-56 = 0$

15.- Halla la ecuación de la circunferencia que tiene uno de sus diámetros el segmento limitado por los puntos P = (5, -1) y Q = (3, -7).
Solución: $x^2+y^2-8x+6y-75 = 0$

16.- Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos P = (5, 3), Q = (6, 2), R = (3,– 1)
Solución: $x^2+y^2-8x-2y+12 = 0$

17.- Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto (-4, 2) y que sea tangente a la recta 3x+4y-16 = 0.
Solución: $(x+4)^2+(y-2)^2 = 16$

18.- Calcula la potencia del punto P = (-8, 1) respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 -2x -4y+3 = 0$
Solución: $Pot_C(P) = 80$

19.- Determina la posición relativa del punto A = (7, 3) respecto de la circunferencia
$x^2 + y^2 – 6x – 6y + 9 = 0$
Solución: $Pot_C(P) = 7 > 0$*, es exterior.*

20.- Calcula el eje radical de las circunferencias $x^2 + y^2 -4x + 4y + 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 4 x- 4y + 7 = 0$
Solución: $x - y = 0$.

21.- Calcula un punto cuya potencia sea la misma. respecto de las circunferencias C: $x^2+y^2-4 =0$, C’: $2x^2+2y^2-6x-2y-3 = 0$ y C’’: $x^2+y^2+2x+2y-3 = 0$

Solución: El centro radical $C = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$

22.- Sea C la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. El centro y el radio son:
a) C = (1 , -2), r = 3, b) C = (-1 , 2), r = 3, c) C = (1 , -2), r = 4.
Solución: a)

23.- Idea un método que, sin resolver el sistema, le permita averiguar si la recta 3x+4y-8 = 0 es exterior, tangente o secante a la circunferencia $C \equiv (x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$. Razona la respuesta.

24.- Sea la recta r: x = 3.
a) Halla el punto simétrico de A = (1 , 4) respecto de r, A'.
b) Halla la circunferencia cuyo centro es A' y es tangente a la recta r.
Solución: $(x-5)^2+(y-4)^2 = 4$

25.- Halla las ecuaciones de las circunferencias que cumplan:
a) Su centro es (1, 0) y su radio 2.
b) Su centro es (1, 0) y pasa por (2, 2).
c) Su diámetro es el segmento que une los puntos P = (1, 0) y Q = (2, 2).
d) Pasa por los puntos A = (0, 1), B = (1, 2) y C = (2, 1)
e) Su centro es el punto (1, 3) y es tangente al eje de ordenadas.
f) Su centro es el punto (3, 1) y es tangente al eje de abscisas.

Solución: a) $(x-1)^2+y^2 = 4$, *b)* $(x-1)^2+y^2 = 5$, *c)* $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 5$

d) $x^2+y^2-7x+3y-4 = 0$, *e)* $(x-1)^2+(y-3)^2 = 1$, *f)* $(x-3)^2+(y-1)^2 = 1$

26.- Encuentra la ecuación de la elipse de focos F = (1, 1) y F' = (1,-1) si a = 2.
Solución: $4x^2+3y^2-8x-8 = 0$

27.- Halla la tangente y la normal a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$ en el punto $P = \left(3, \frac{16}{5}\right)$.

Solución: t º $y-\frac{16}{5} = -\frac{3}{5}(x-3)$, $n \equiv y-\frac{16}{5} = \frac{5}{3}(x-3)$

28.- Determina la ecuación reducida de la elipse cuyo eje mayor mide 18 y pasa por P = (6, 4).

Solución: $\frac{x^2}{81}+\frac{5y^2}{144} = 1$

29.- Halla las ecuaciones de las tangentes trazada desde P = (4, 0) a la elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Solución: $y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(x-4)$, $y = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-4)$

30.- Halla la ecuación reducida de la elipse tal que pasa por P = (3, 4) y excentricidad $e = \frac{3}{5}$

Solución: $\frac{x^2}{34}+\frac{25y^2}{544} = 1$

31.- Si $ax^2-9y^2 = 4$ es la ecuación de una hipérbola equilátera halla el valor de a.
Solución: $a = 9$

32.- Halla la ecuación respecto de sus asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4} = 1$

Solución: $xy = 2$

33.- Halla la tangente a hipérbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9} = 1$ en el punto de abcisa 6 y ordenada positiva.

Solución: $\left(y-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{9}{4\sqrt{5}}(x-6)$

34.- Determina la ecuación reducida de la hipérbola en la que uno de los focos es F = (13, 0) y uno de sus vértices es V = (12, 0).

Solución: $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25} = 1$

35.- Halla la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto F = (0, 2) y cuya directriz es la recta de ecuación y = -2.
Solución: $x^2 = 8y$.

36.- Una parábola tiene su eje paralelo al de ordenadas y pasa por los puntos A = (2, 0), B = (6, 0) y C = (0, 6). Calcula la ecuación de la parábola.

Solución: $y = \frac{x^2}{2}-4x+6$

34.- Halla la ecuación de la parábola que tiene por foco F = (0, 2) y su directriz es x-y-2 = 0.
Solución: $x^2+y^2+2xy+4x-4y+4 = 0$

35.- Encuentra el vértice, el foco, el eje y la directriz de la parábola de ecuación $y^2 = -14x$.

Solución: V = (0, 0), eje: y = 0, $F = \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{7}{2}$