

# EJERCICIOS MATRICES

## Ejercicio nº 1.-

Un hipermercado quiere ofertar tres clases de bandejas: *A*, *B* y *C*. La bandeja *A* contiene 40 g de queso manchego, 160 g de roquefort y 80 g de camembert; la bandeja *B* contiene 120 g de cada uno de los tres tipos de queso anteriores; y la bandeja *C*, contiene 150 g de queso manchego, 80 g de roquefort y 80 g de camembert.

Si se quiere sacar a la venta 50 bandejas del tipo *A*, 80 de *B* y 100 de *C*, obtén matricialmente la cantidad que necesitarán, en kilogramos de cada una de las tres clases de quesos.

### **Solución:**

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos, con las cantidades en gramos.

$$\begin{matrix} & A & B & C \\ M & \begin{pmatrix} 40 & 120 & 150 \\ 160 & 120 & 80 \\ 80 & 120 & 80 \end{pmatrix} & A & \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} & = & R & \begin{pmatrix} 26\ 600 \\ 25\ 600 \\ 21\ 600 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Si queremos las cantidades expresadas en kilogramos, haremos:

$$\frac{1}{1000} \cdot \begin{pmatrix} 26\ 600 \\ 25\ 600 \\ 21\ 600 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 26,6 \\ 25,6 \\ 21,6 \end{pmatrix}$$

## Ejercicio nº 2.-

Resuelve razonadamente la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

### **Solución:**

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ :

$$|A| = 1 \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix} = X$$

### Ejercicio nº 3.-

a) Estudia para qué valores de  $\lambda$  existe la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula  $A^{-1}$  para  $\lambda = 0$ .

**Solución:**

• Utilizando determinantes:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista  $A^{-1}$  es que  $|A| \neq 0$ .

Calculamos  $|A|$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda + 4 + 2 = 0 \rightarrow \lambda = 6$$

Por tanto, existe  $A^{-1}$  si  $\lambda = 6$ .

b) Para  $\lambda = 0$  la matriz es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 6$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

• Por método de Gauss:

a) Estudiamos el rango de  $A$ :

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - \lambda \cdot 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ -3 \cdot 3^a + \lambda \cdot 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si  $\lambda = 6$ ,  $\text{ran}(A) = 2 \rightarrow$  No existe  $A^{-1}$

Si  $\lambda \neq 6$ ,  $\text{ran}(A) = 3 \rightarrow$  Existe  $A^{-1}$

b) Para  $\lambda = 0$  la matriz es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 3 \cdot 1^a + 2^a \\ 2^a + 3^a \\ 3^a \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} -2 \cdot 1^a + 3 \cdot 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Ejercicio n° 4.-

Expresa y resuelve el siguiente sistema de forma matricial:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \\ 2x + y = -4 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

- Utilizando determinantes:

Expresamos el sistema en forma matricial:

Si llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Para resolverlo, despejamos  $X$  multiplicando por la izquierda por  $A^{-1}$ :

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

Comprobamos que  $|A| = -1 \neq 0$  y hallamos  $A^{-1}$ :

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos  $X$ :

$$X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = -2, y = 0, z = 1$$

- Por método de Gauss:

Calculo de  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 5 \cdot 2^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a - 2 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio nº 5.-

Tres personas, **A**, **B**, **C**, quieren comprar las siguientes cantidades de fruta:

**A:** 2 kg de peras, 1 kg de manzanas y 6 kg de naranjas.

**B:** 2 kg de peras, 2 kg de manzanas y 4 kg de naranjas.

**C:** 1 kg de peras, 2 kg de manzanas y 3 kg de naranjas.

En el pueblo en el que viven hay dos fruterías,  $F_1$  y  $F_2$ .

En  $F_1$ , las peras cuestan 1,5 euros/kg, las manzanas 1 euro/kg, y las naranjas 2 euro/kg.

En  $F_2$ , las peras cuestan 1,8 euros/kg, las manzanas 0,8 euros/kg, y las naranjas 2 euros/kg.

- Expresa matricialmente la cantidad de fruta (peras, manzanas y naranjas) que quiere comprar cada persona (**A**, **B**, **C**).
- Escribe una matriz con los precios de cada tipo de fruta en cada una de las dos fruterías.
- Obtén una matriz, a partir de las dos anteriores, en la que quede reflejado lo que se gastaría cada persona haciendo su compra en cada una de las dos fruterías.

**Solución:**

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{c} P \quad M \quad N \\ A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ B \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ C \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \quad \text{b) } \begin{array}{c} F_1 \quad F_2 \\ P \begin{pmatrix} 1,5 & 1,8 \\ M \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \\ N \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \end{array}$$

- El producto de las dos matrices anteriores nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{ccc}
 P & M & N \\
 A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} & P \begin{pmatrix} 1,5 & 1,8 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 16 & 16,4 \end{pmatrix} \\
 B \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} 1 & 0,8 \end{pmatrix} & = B \begin{pmatrix} 13 & 13,2 \end{pmatrix} \\
 C \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & N \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} & C \begin{pmatrix} 9,5 & 9,4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

**Ejercicio nº 6.-**

Halla una matriz  $B$ , sabiendo que su primera fila es  $(1, 0)$ , y que verifica

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solución:**

Como  $A$  es una matriz  $2 \times 3$  y  $A \cdot B$  es  $2 \times 2$ ,  $B$  ha de ser una matriz  $3 \times 2$ . Sabemos que su primera fila es  $(1, 0)$ .

Entonces:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2x+2z & 2y+2t \\ 2+x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l}
 -1+2x+2z=1 \\
 2y+2t=0 \\
 2+x=1 \\
 y=0
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \rightarrow 2z=2-2x \rightarrow z=1-x=1-(-1)=2 \\
 \rightarrow y+t=0 \rightarrow t=-y=0 \\
 \rightarrow x=-1 \\
 \rightarrow y=0
 \end{array}$$

Luego:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio nº 7.-**

Expresa en forma matricial y resuelve, utilizando la matriz inversa:

$$\left. \begin{array}{l}
 3x + y - 2z = 10 \\
 x + 2y + z = 5 \\
 -x + 2z = -3
 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

- Utilizando determinantes:

Expresamos el sistema en forma matricial.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por  $A^{-1}$ :

$$A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

Comprobamos que  $|A| = 5 \neq 0$  y hallamos  $A^{-1}$ :

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Obtenemos  $X$ :

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = 3, y = 1, z = 0$$

- Por método de Gauss:

Calculo de  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 5 \cdot 3^a + 2 \cdot 2^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 3^a \\ 3^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 5 \cdot 1^a - 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 10 & 0 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a + 2 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio nº 8.-

Tres familias, **A**, **B**, y **C**, van a ir de vacaciones a una ciudad en la que hay tres hoteles, **H<sub>1</sub>**, **H<sub>2</sub>** y **H<sub>3</sub>**. La familia **A** necesita 2 habitaciones dobles y una sencilla, la familia **B** necesita 3 habitaciones dobles y una sencilla, y la familia **C** necesita 1 habitación doble y dos sencillas.

En el hotel **H<sub>1</sub>**, el precio de la habitación doble es de 84 euros/día, y el de la habitación sencilla es de 45 euros/día. En **H<sub>2</sub>**, la habitación doble cuesta 86 euros/día, y la sencilla cuesta 43 euros/día. En **H<sub>3</sub>**, la doble cuesta 85 euros/día, y la sencilla 44 euros/día.

- Escribe en forma de matriz el número de habitaciones (dobles o sencillas) que necesita cada una de las tres familias.
- Expresa matricialmente el precio de cada tipo de habitación en cada uno de los tres hoteles.
- Obtén, a partir de las dos matrices anteriores, una matriz en la que se refleje el gasto diario que tendría cada una de las tres familias en cada uno de los tres hoteles.

**Solución:**

$$\begin{array}{l} a) \begin{array}{l} D \quad S \\ A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad b) \begin{array}{l} H_1 \quad H_2 \quad H_3 \\ D \begin{pmatrix} 84 & 86 & 85 \\ 45 & 43 & 44 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

- El producto de las dos matrices anteriores nos da la matriz que buscamos:



$$\begin{matrix} D & S \\ A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ B \\ C \end{matrix} \cdot \begin{matrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ D \begin{pmatrix} 84 & 86 & 85 \\ 45 & 43 & 44 \end{pmatrix} \\ S \end{matrix} = \begin{matrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ A \begin{pmatrix} 213 & 215 & 214 \\ 297 & 301 & 299 \\ 174 & 172 & 173 \end{pmatrix} \\ B \\ C \end{matrix}$$

**Ejercicio nº 9.-**

Halla la matriz  $X^2 + Y^2$ , donde  $X$  e  $Y$  son dos matrices cuadradas de orden dos, verificando:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \quad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

Llamamos  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ . Tenemos que resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{array} \right\} \begin{array}{l} (-3) \cdot 1^a \rightarrow -15X - 9Y = -3A \\ 5 \cdot 2^a \rightarrow 15X + 10Y = 5B \end{array}$$

$$\text{Sumando:} \quad \underline{\quad \quad \quad} \quad Y = 5B - 3A$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 1^a \rightarrow 10X + 6Y = 2A \\ -3 \cdot 2^a \rightarrow -9X - 6Y = -3B \end{array}$$

$$\text{Sumando:} \quad \underline{\quad \quad \quad} \quad X = 2A - 3B$$

Por tanto:

$$X = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = 5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -12 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos  $X^2$  e  $Y^2$ :

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}; \quad Y^2 = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio nº 10-**

**Expresa y resuelve el siguiente sistema en forma matricial:**

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

- Utilizando determinantes:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por  $A^{-1}$ :

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

Comprobamos que  $|A| = 2 \neq 0$  y hallamos  $A^{-1}$ :

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Obtenemos  $X$ :

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la solución del sistema es:

$$x = 0, y = -1, z = 1$$

- Por método de Gauss:

Calculo de  $A^{-1}$ :

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 \cdot 1^a - 3^a & 2 & 4 & 0 & -2 & 3 & 5 \\ 2^a + 2 \cdot 3^a & 0 & -5 & 0 & 5 & -5 & 10 \\ 3^a & 0 & 0 & -2 & 4 & -3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 10 & -5 & 15 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Ejercicio nº 11.-**

Si la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  satisface la igualdad  $A^2 + xA + yI = 0$ , halla los valores numéricos

de  $x$  e  $y$  ( $I$  representa la matriz identidad de orden 2).

**Solución:**

Calculamos  $A^2$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$$

Así:

$$A^2 + xA + yI = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+x+y & 10+2x \\ -15-3x & 10+4x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, ha de ser:

$$\left. \begin{array}{l} -5+x+y=0 \\ 10+2x=0 \\ -15-3x=0 \\ 10+4x+y=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow y=5-x=5-(-5)=10 \\ \rightarrow x=-5 \\ \rightarrow x=-5 \\ \rightarrow y=-10-4x=-10+20=10 \end{array}$$

Por tanto:  $x = -5$ ;  $y = 10$

**Ejercicio nº 12.-**

**Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:**

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 1 \\ x + y + 2z = 2 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

- Utilizando determinantes:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por  $A^{-1}$ :

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

Comprobamos que  $|A| = -1 \neq 0$  y hallamos  $A^{-1}$ :

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos  $X$ :

$$X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = 1, y = -1, z = 1$$

- Por método de Gauss:

Calculo de  $A^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{1^a + 2^a \\ 2^a + 3 \cdot 3^a \\ 3^a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{1^a + 2 \cdot 3^a \\ 2^a \\ 3^a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & | & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio nº 13.-

Una empresa tiene tres factorías,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , en las que se fabrican diariamente tres tipos diferentes de productos,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , como se indica a continuación:

$F_1$ : 200 unidades de  $A$ , 40 de  $B$  y 30 de  $C$ .

$F_2$ : 20 unidades de  $A$ , 100 de  $B$  y 200 de  $C$ .

$F_3$ : 80 unidades de  $A$ , 50 de  $B$  y 40 de  $C$ .

Cada unidad de  $A$  que se vende proporciona un beneficio de 5 euros; por cada unidad de  $B$ , se obtienen 20 euros de beneficio; y por cada una de  $C$ , 30 euros. Sabiendo que la empresa vende toda la producción diaria, obtén matricialmente el beneficio diario obtenido con cada una de las tres factorías.

### **Solución:**

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{matrix} & A & B & C \\ F_1 & \begin{pmatrix} 200 & 40 & 30 \end{pmatrix} \\ F_2 & \begin{pmatrix} 20 & 100 & 200 \end{pmatrix} \\ F_3 & \begin{pmatrix} 80 & 50 & 40 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2700 \\ 8100 \\ 2600 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio nº 14.-

En una pastelería elaboran tres tipos de postres:  $A$ ,  $B$  y  $C$ , utilizando leche, huevos y azúcar (entre otros ingredientes) en las cantidades que se indican:

**A:** 3/4 de litro de leche, 100 g de azúcar y 4 huevos.

**B:** 3/4 de litro de leche, 112 g de azúcar y 7 huevos.

**C:** 1 litro de leche y 200 g de azúcar.

El precio al que se compran cada uno de los tres ingredientes es de 0,6 euros el litro de leche, 1 euro el kg de azúcar, y 1,2 euros la docena de huevos. Obtén matricialmente el gasto que supone cada uno de estos tres postres (teniendo en cuenta solamente los tres ingredientes indicados).

**Solución:**

El precio de cada litro de leche es de 0,6 euros; el precio de cada gramo de azúcar es de 0,001 euros; y el precio de cada huevo es de 0,1 euros.

Organizamos los datos que nos dan en dos matrices; su producto es la matriz que buscamos:

$$\begin{matrix} & L & Az & H \\ A & \begin{pmatrix} 3/4 & 100 & 4 \end{pmatrix} & L & \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,001 \\ 0,1 \end{pmatrix} & A & \begin{pmatrix} 0,95 \\ 1,262 \\ 0,8 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 3/4 & 112 & 7 \end{pmatrix} & \cdot & Az & \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,001 \\ 0,1 \end{pmatrix} & = & B & \begin{pmatrix} 0,95 \\ 1,262 \\ 0,8 \end{pmatrix} \\ C & \begin{pmatrix} 1 & 200 & 0 \end{pmatrix} & \cdot & H & \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,001 \\ 0,1 \end{pmatrix} & = & C & \begin{pmatrix} 0,95 \\ 1,262 \\ 0,8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Por tanto, el postre  $A$  supone 0,95 euros, el  $B$  1,26 euros; y el  $C$ , 0,8 euros.

**Ejercicio nº 15.-**

Halla una matriz,  $X$ , tal que  $AX = B$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

- Utilizando determinantes:

Despejamos  $X$  en la ecuación, multiplicando por la izquierda por  $A^{-1}$ :

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Comprobamos que  $|A| = -2 \neq 0$  y hallamos  $A^{-1}$ :

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Por método de Gauss:

Calculamos  $A^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1^a + 2^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio nº 16.-

Expresa y resuelve en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} -x - y + 2z = 4 \\ 2x + y - 2z = -3 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

- Utilizando determinantes:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow AX = C$$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por  $A^{-1}$ :

$$AX = C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$$

Comprobamos que  $|A| = 3 \neq 0$  y hallamos  $A^{-1}$ :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos X:

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$x = 1, y = -1, z = 2$$

• Por método de Gauss:

Calculo de  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a - 2^a \\ 3 \cdot 2^a - 2 \cdot 3^a \\ 3^a \end{array} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$