1. Límites y derivadas

Ejercicio 1. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = (2x^2 - x)^3(3x-2)^2$

(b) $y = \dfrac{3x+1}{(3x-1)^2}$

Solución:

(a) $y' = 3(2x^2-x)^2(4x-1)\cdot(3x-2)^2 + 2(3x-2)\cdot 3\cdot(2x^2-x)^3$

(b) $y' = \dfrac{3\cdot(3x-1)^2 - 2(3x-1)\cdot 3\cdot(3x+1)}{(3x-1)^4}$

Ejercicio 2. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = e^{-x}\cos^2 x$

(b) $y = 2\ln\cos\frac{x}{2}$

Solución:

(a) $y' = e^{-x}(-1)\cdot\cos^2 x + 2\cos x(-\operatorname{sen} x)\cdot e^{-x}$

(b) $y' = 2\,\dfrac{-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

Ejercicio 3. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = \operatorname{artg}\dfrac{1}{x}$

(b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución:

(a) $y' = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$

(b) $y' = \dfrac{1\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot x}{1-x^2}$

Ejercicio 4. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = \dfrac{x^2e^x}{1-\operatorname{sen} x}$

(b) $y = (\sqrt{x})^{\cos x}$

Solución:

(a) $y' = \dfrac{(2xe^x + e^x x^2)\cdot(1-\operatorname{sen} x) - (-\cos x)x^2e^x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$

(b) Escribimos la función como:

$$y = \left(\sqrt{x}\right)^{\cos x} = e^{\cos x\ln\sqrt{x}} = e^{\frac{1}{2}\cos x\ln x}$$

La derivada es:

$$y' = e^{\frac{1}{2}\cos x\ln x}\cdot\frac{1}{2}\left(-\operatorname{sen} x\ln x + \frac{1}{x}\,\cos x\right)$$

Ejercicio 5. *Derivar las siguientes funciones y simplificar el resultado:*

(a) $y = \operatorname{sen}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ (b) $y = \operatorname{tg}\ \arccos x$

Solución:

(a) La primera función la escribimos como:

$$y = \operatorname{sen}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

Su derivada es:

$$y' = 2 \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

(b) Esta función la podemos escribir como:

$$y = \operatorname{tg}\ \arccos x = \frac{\operatorname{sen}\ \arccos x}{\cos\ \arccos x} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\ \arccos x}}{x} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

y su derivada es:

$$y' = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - 1 \cdot \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{-x^2 - (1 - x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$$

El mismo resultado puede obtenerse derivando $y = \operatorname{tg}\ \arccos x$:

$$y' = \frac{1}{\cos^2\ \arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$$

Ejercicio 6. *Calcular la derivada segunda de las siguientes funciones:*

(a) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$ (b) $y = x^2 e^{-x}$

Solución:

(a)

$$y' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{(-4x + 2)(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)\ 2x \cdot (-2x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 1)^4}$$

(b)

$$y' = 2xe^{-x} - e^{-x}x^2 = e^{-x}\left(2x - x^2\right)$$

$$y'' = -e^{-x}(2x - x^2) + (2 - 2x)e^{-x}$$

Ejercicio 7. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right)$

Solución:

(a)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} &= \lim_{x\to 5} \frac{(x^2-25)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5} \\
&= \lim_{x\to 5} (x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5}) \\
&= 20\sqrt{5}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4x+1}+x\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+1-x^2}{\sqrt{x^2-4x+1}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{2x} \\
&= -2
\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x - 1}$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+x}{x^2-2}\right)^{2x}$

Solución:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{-\frac{x^2}{2}} = -2$

(b)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x}{x^2-2}\right)^{2x} &= \lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{x^2+x}{x^2-2}-1\right)2x} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{(x^2+x-x^2+2)2x}{x^2-2}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{2x^2}{x^2}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

En el primer límite se han utilizado las aproximaciones $\operatorname{sen} x \sim x$ y $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ cuando $x\to 0$. En el segundo $u^v \sim e^{(u-1)v}$ cuando $u\to 1$ y $v\to\infty$.

Ejercicio 9. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3-4x^2-x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$ $\qquad$ $(b)\ \lim\limits_{x\to\sqrt{5}} \dfrac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$

Solución:

(a) Se trata de un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Simplificando:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{3x^3-4x^2-x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(3x+2)}{(x-1)^2(x^2+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{x^2+1}\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} \dfrac{x-\sqrt{5}}{x^2-5} = \lim\limits_{x\to\sqrt{5}} \dfrac{x-\sqrt{5}}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})} = \lim\limits_{x\to\sqrt{5}} \dfrac{1}{x+\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

Ejercicio 10. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

$(a)\ y = \dfrac{\ln(x+3)}{x^2-1}$ $\qquad$ $(b)\ y = \dfrac{3x^3+x^2-x+1}{x^2-1}$

Solución:

(a) Las asíntotas verticales son $x=-3$, $x=-1$ y $x=1$ puesto que:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\ln(x+3)}{x^2-1} = \frac{-\infty}{8} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\ln(x+3)}{x^2-1} = \frac{\ln 2}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+3)}{x^2-1} = \frac{\ln 4}{0} = \infty$$

La asíntota horizontal es $y=0$ ya que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+3)}{x^2-1} = 0$$

Este límite es cero ya que x^2 es un infinito de orden superior a $\ln x$.

(b) Comprobemos si $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^3+x^2-x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(3x^2-2x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{3x^2-2x+1}{x-1} = -3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^3+x^2-x+1}{x^2-1} = \frac{4}{0} = \infty$$

En $x=-1$ no hay asíntota vertical, hay una discontinuidad evitable. Por el contrario, $x=1$ es una síntota vertical.

La función no tiene asíntota horizontal puesto que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x^2-x+1}{x^2-1} = \infty$$

Calculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+x^2-x+1}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^3} = 3$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3+x^2-x+1}{x^2-1} - 3x\right) \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x^2-x+1-3x^3+3x}{x^2-1} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $y = 3x+1$.

---

2. Derivadas, límites, continuidad

Ejercicio 1. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = \dfrac{\sqrt{x}\,\operatorname{sen} x}{1-x^2}$ (b) $y = \operatorname{arsen} e^x$

Solución:

(a) $y' = \dfrac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen} x + \cos x\sqrt{x}\right)(1-x^2) - (-2x)\sqrt{x}\operatorname{sen} x}{(1-x^2)^2}$

(b) $y = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

Ejercicio 2. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = \ln\left(\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^2$ (b) $y = (x^2-5x+1)^6(5x+3)$

Solución:

(a) La primera función puede escribirse:

$$y = \ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^2 = 2\left(\ln(1+\cos x) - \ln(1-\cos x)\right)$$

Derivamos:

$$y' = 2\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{1+\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right)$$

(b) $y' = 6(x^2-5x+1)^5(2x-5)\cdot(5x+3) + 5\cdot\left(x^2-5x+1\right)^6$

Ejercicio 3. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2+x-2}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to\infty} \left(e^x - x^2\right)$

Solución:

$(a)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2+x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+1)} = \dfrac{3}{5}$

$(b)\ \lim_{x\to\infty} \left(e^x - x^2\right) = \infty.$

El límite es infinito porque e^x es un infinito de orden superior a x^2.

Ejercicio 4. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \lim_{x\to 2} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1-\cos x}$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-2}} &= \lim_{x\to 2} e^{\left(\frac{x+1}{2x-1}-1\right)\frac{1}{x-2}}\\ &= \lim_{x\to 2} e^{\frac{x+1-2x+1}{2x-1}\frac{1}{x-2}}\\ &= \lim_{x\to 2} e^{\frac{2-x}{2x-1}\frac{1}{x-2}}\\ &= e^{-\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$(b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{4x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{4}{x} = \infty$

Ejercicio 5. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

$(a)\ y = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$ $\qquad (b)\ y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$

Solución:

(a) Hay una asíntota horizontal $y=0$ y dos asíntotas verticales $x=-2$ y $x=2$.

(b) Las posibles asíntotas verticales son $x=1$ y $x=3$. Sin embargo, $x=3$ no es asíntota puesto que:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-1} = 3$$

En $x=3$ hay una discontinuidad evitable.

Además la función tiene una asíntota horizontal $y=1$ ya que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} = 1$$

Ejercicio 6. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

$(a)\ \ y = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$ $\qquad\qquad$ $(b)\ \ y = xe^{-x}$

Solución:

(a) La función tiene como asíntotas verticales $x=-1$ y $x=1$ que anulan el argumento de la función logaritmo. La recta $x=0$ no es asíntota vertical pues queda fuera del dominio de la función.

Existe una asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$. La asíntota es $y=0$ puesto que:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x}=0$$

(b) Solamente tiene una asíntota horizontal en $+\infty$ puesto que:

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

En $-\infty$ no hay asíntota puesto que

$$\lim_{x\to-\infty}xe^{-x}=(-\infty)\cdot\infty=-\infty$$

Ejercicio 7. *Calcular a y b para que la siguiente función sea continua:*

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax & \text{si } x\leq -1\\ b & \text{si } -1<x<3\\ 2x+4 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$$

Solución:

Se trata de una función a trozos definida mediante funciones continuas. Los posibles puntos de discontinuidad son $x=-1$ y $x=3$. Para que $f(x)$ sea continua, los límites laterales en esos puntos deben coincidir:

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}x^2+ax=1-a\\ \displaystyle\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}b=b\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad b=1-a$$

De la misma manera, en $x=3$:

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}b=b\\ \displaystyle\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}2x+4=10\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad b=10$$

Por consiguiente, $a=-9$, $b=10$.

Ejercicio 8. *Obtener y clasificar los puntos de discontinuidad de la función:*

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$$

Solución:

Los posibles puntos de discontinuidad son los ceros del denominador:

$$2x^2+x-3=0\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{cases}x=1\\ x=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

- En $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = \lim \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{2x+3} = \frac{3}{5}$$

Puesto que existe el límite, se trata de una discontinuidad evitable.

- En $x = -\frac{3}{2}$:

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = \infty$$

y tenemos un infinito de la función.

Ejercicio 9. *Probar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \cos x$ se cortan en algún punto.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función:

$$F(x) = \ln x - \cos x$$

se anula en algún punto c.

$$\begin{cases} F(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}^+ \\ F(1) = \ln 1 - \cos 1 < 0 \\ F(2) = \ln 2 - \cos 2 > 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (1, 2)$ tal que $F(c) = 0$. En $x = c$ se cortan ambas curvas.

Ejercicio 10. *Demostrar que la ecuación*

$$x^3 + x^2 = \cos \pi x - 2$$

tiene una solución c. Calcular la parte entera de c.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función:

$$F(x) = x^3 + x^2 - \cos \pi x + 2$$

se hace cero para algún valor de x.

$$\begin{cases} F(x) \text{ es continua para todo } x \\ F(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - \cos(-\pi) + 2 > 0 \\ F(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - \cos(-2\pi) + 2 < 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Bolzano existe $c \in (-2, -1)$ tal que $F(c) = 0$. El número c es solución de la ecuación. La parte entera de c es -2.

---

3. Derivadas, límites, continuidad (grupo G)

Ejercicio 1. *Derivar las siguientes funciones:*

$(a)\ \ y = 5x^2 \ln(1 - x^2)$ $\qquad$ $(b)\ \ y = \dfrac{x^2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Solución:

$(a)\ \ y' = 10x \ln(1 - x^2) + \dfrac{-2x}{1 - x^2} \cdot 5x^2$

$(b)\ \ y' = \dfrac{(2x \cos x - \operatorname{sen} x \cdot x^2) \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x \cdot x^2 \cos x}{\operatorname{sen}^4 x}$

Ejercicio 2. *Derivar las siguientes funciones:*

$(a)\ \ y = e^{-x}(2x - 1)^2$ $\qquad$ $(b)\ \ y = \operatorname{artg} \frac{2}{x}$

Solución:

$(a)\ \ y' = -e^{-x}(2x - 1)^2 + 2(2x - 1) \cdot 2 \cdot e^{-x}$

$(b)\ \ y' = \dfrac{1}{1 + \frac{4}{x^2}} \cdot \dfrac{-2}{x^2}$

Ejercicio 3. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x}$ $\qquad$ $(b)\ \ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 5}{x^2 + 1}$

Solución:

$(a)\ \ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1 - x} - 1)(\sqrt{1 - x} + 1)}{x(\sqrt{1 - x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x(\sqrt{1 - x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x} + 1} = -\dfrac{1}{2}$

$(b)\ \ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 5}{x^2 + 1} = 0$

Puesto que el denominador es un infinito de orden superior.

Ejercicio 4. *Calcular los siguientes límites:*

$(a)\ \ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x + 1}{2x^2} \right)^{x^2}$ $\qquad$ $(b)\ \ \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}$

Solución:

$(a)\ \ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x + 1}{2x^2} \right)^{x^2} = 0^{\infty} = 0$

$$(b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3(x+3)}{(x-1)^3(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=2$$

Ejercicio 5. *Estudiar los puntos de discontinuidad de la función:*

$$y=\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}$$

Solución:

Los posibles puntos de discontinuidad son $x=-3$ y $x=3$. La función puede escribirse:

$$y=\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}=\frac{2(x+3)-12}{x^2-9}=\frac{2x-6}{x^2-9}$$

Cuando x tiende a 3:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2}{x+3}=\frac{1}{3}$$

Puesto que existe el límite, la discontinuidad es evitable.

En $x=-3$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x-6}{x^2-9}=\infty$$

Hay un infinito de la función.

Ejercicio 6. *Estudiar la continuidad de la función:*

$$f(x)=\begin{cases}e^{ax} & \text{si } x\leq 0\\ x+2a & \text{si } x>0\end{cases}$$

según los valores de a.

Solución:

Calculamos los límites laterales en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}e^{ax}=1$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x+2a=2a$$

Los límites son iguales si $a=\frac{1}{2}$. Entonces:

– Para $x\neq 0$ la función es continua para cualquier valor de a.

– En $x=0$ la función es continua si $a=\frac{1}{2}$.

Ejercicio 7. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

(a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad$ (b) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

Solución:

(a) La primera función no tiene asíntotas verticales puesto que el denominador nunca se hace cero. Tiene una asíntota horizontal $y = 0$ puesto queda

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

(b) Las posibles asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = -2$ que son los valores de x que anulan el denominador. Sin embargo, $x = -1$ no es asíntota puesto que:

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to-1} \frac{x^2+x+1}{x+2} = -1$$

Por tanto, en $x = -1$ no hay asíntota sino una discontinuidad evitable.

alculemos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2+3x+2} \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2+3x+2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1-x^3-3x^2-2x}{x^2+3x+2} = -3$$

La asíntota oblicua es $y = x - 3$.

Ejercicio 8. *Calcular las asíntotas de:*

(a) $y = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$ $\qquad$ (b) $y = \dfrac{e^x}{x}$

Solución:

(a) La función tiene dos asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$. La recta $x = 0$ no es asíntota vertical puesto que la función no existe en el intervalo $[-1, 1]$. Además, hay una asíntota horizontal $y = 0$ ya que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = 0$$

(b) Hay una asíntota vertical $x = 0$ y una asintota horizontal $y = 0$ en $-\infty$.

Ejercicio 9. *Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función:

$$F(x) = \ln x - e^{-x}$$

se hace cero para algún valor de x:

$$\begin{cases} F(x) \text{ es continua en} \mathbb{R}^+ \\ F(1) = -e^{-1} < 0 \\ F(2) = \ln 2 - \frac{1}{e^2} > 0 \end{cases}$$

De acuerdo con el teorema de Bolzano, existe un $c \in (1,2)$ tal que $F(c) = 0$. En el punto de abscisa c se cortan ambas curvas.

Ejercicio 10. Dada la función $f(x) = x^3 + x - 5$, demostrar que toma el valor 20 en el intervalo $(1,3)$.

Solución:

$$\begin{cases} f(x) \text{ es continua en } [1,3] \\ f(1) = -3 \\ f(3) = 25 \end{cases}$$

Por el teorema de Bolzano, la función toma en el intervalo $(1,3)$ todos los valores comprendidos entre -3 y 25. Por consiguiente existe un $c \in (1,3)$ tal que $f(c) = 20$.

---

4. Derivadas (grupo G)

Ejercicio 1. *Teorema de Lagrange o del valor medio. Enunciado y demostración.*

Solución:

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe un punto $\xi \in (a,b)$ que cumple que:

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

Demostración. Escojamos λ de forma que la función $F(x) = f(x) - \lambda x$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle. Desde luego, se cumplen las condiciones de continuidad y derivabilidad. Para que se cumpla la tercera condición:

$$F(a) = f(a) - \lambda a$$
$$F(b) = f(b) - \lambda b$$
$$F(a) = F(b) \quad \Longrightarrow \quad f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Para este valor de λ, como consecuencia del teorema de Rolle, existe $\xi \in (a,b)$ tal que:

$$F'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(\xi) - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(\xi) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Longrightarrow \quad f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

$\square$

Ejercicio 2. *Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva* $y = \dfrac{2x}{x-1}$ *que son paralelas a* $2x + y - 1 = 0$.

Solución:

La pendiente de la recta tangente y, por consiguiente, la derivada de la función en el punto de tangencia debe ser igual a -2. Entonces:

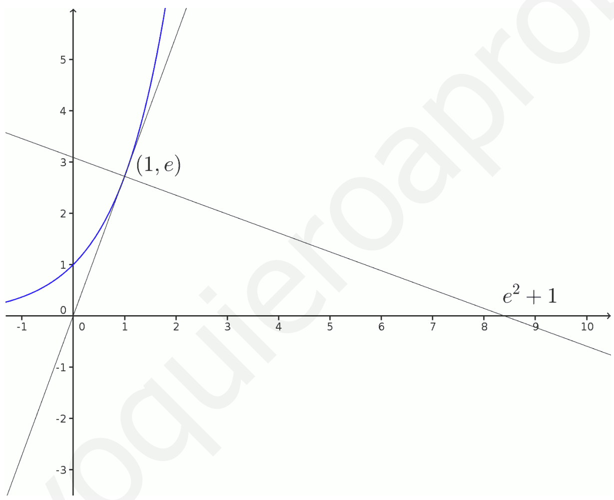
$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

Los puntos de tangencia son $(0,0)$ y $(2,4)$. Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y = -2x; \qquad y - 4 = -2(x-2)$$

Ejercicio 3. *Halla el área del triángulo formado por el eje* X *y las rectas tangente y normal a la curva de ecuación* $y = e^x$ *en el punto de abscisa* $x = 1$.

Solución:



El punto de tangencia es $(1, e)$. La ecuación de la recta tangente en ese punto es:

$$y - e = e(x-1) \quad \Longrightarrow \quad y = ex$$

y la normal:

$$y - e = \frac{-1}{e}(x-1) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{e}\,x + e + \frac{1}{e}$$

La intersección de la tangente con el eje de abscisas es el origen de coordenadas. La intersección de la normal es:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{e}\,x + e + \frac{1}{e} \\ y = 0 \end{cases}$$

La intersección es el punto $(e^2 + 1, 0)$.

El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}(e^2+1)e = \frac{e^3 + e}{2}$$

Ejercicio 4. *Determinar los valores de a, b y c para que la función:*

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

Solución:

Calculamos las dos primeras derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) &= 6x + 2a \end{aligned}$$

Las condiciones que nos dan las podemos interpretar como:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f''(-1) = 0 \\ f'(1) = 3 \end{cases}$$

de modo que tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 0 = c \\ -6 + 2a = 0 \\ 3 + 2a + b = 3 \end{cases}$$

que tiene como solución $a = 3$, $b = -6$ y $c = 0$.

Ejercicio 5. *Obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Solución:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

La raíz del numerador es:

$$1 - 2 \ln x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{e}$$

El denominador tiene una raíz triple $x = 0$ pero en ese punto no existe la función. El signo de la derivada se representa en el siguiente esquema:

$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$
	0		$\sqrt{e}$	

La función es creciente en $(0, \sqrt{e})$ y decreciente en $(\sqrt{e}, \infty)$. En el punto $x = \sqrt{e}$ hay un máximo local.

Ejercicio 6. *Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función:*

$$y = \frac{\ln x}{2x}$$

Solución:

Calculamos las derivadas de la función:

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot 2x - 2\ln x}{4x^2} = \frac{1 - \ln x}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot 2x^2 - 4x(1 - \ln x)}{4x^4} = \frac{-2x - 4x + 4x\ln x}{4x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{2x^3}$$

La segunda derivada se anula en $e^{\frac{3}{2}}$. El signo de la segunda derivada es:

	0		$e^{3/2}$	
$\nexists$	$\nexists$	$-$	0	$+$

La función es convexa en $(0, e^{\frac{3}{2}})$ y cóncava en $\left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$. En $e^{\frac{3}{2}}$ hay un punto de inflexión.

Ejercicio 7. *Demostrar que se puede aplicar el teorema del valor medio a la función* $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ *en el intervalo* $[0, 4]$ *y halla el punto que verifica el teorema.*

Solución:

- La función es continua en $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$. Cumple por tanto las condiciones exigidas por el teorema del valor medio.
- De acuerdo con el teorema:

  $$\exists \xi \in (0, 4) \mid f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

  La derivada de la función es:

  $$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

  El punto ξ debe cumplir que:

  $$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 9}} = \frac{5 - 3}{4 - 0} = \frac{1}{2}$$

  Resolviendo la ecuación se obtiene:

  $$\sqrt{\xi^2 + 9} = 2\xi \quad \Longrightarrow \quad \xi^2 + 9 = 4\xi^2 \quad \Longrightarrow \quad \xi = \pm\sqrt{3}$$

  Puesto que $\xi \in (0, 4)$, la solución $\xi = -\sqrt{3}$ no es válida. La única solución es $\xi = \sqrt{3}$.

Ejercicio 8. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 - 1)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

Solución:

(a) Es una indeterminación del tipo ∞^0

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} (x^3 - 1)^{\frac{1}{x}} &= e^{\ln(x^3-1)\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{\ln(x^3-1)}{x}} \\ &= e^0 = 1\end{aligned}$$

(b) Es una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} (x^2 - 1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2-1)\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} + \cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}(x^2-1)}{-\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{-\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

---

5. Derivadas (grupo D)

Ejercicio 1. *Teorema de Cauchy. Enunciado y demostración.*

Solución:

Sean f y g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Supongamos además que la derivada de g no se anula en el intervalo (a, b). Existe un punto $\xi \in (a, b)$ que cumple que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Demostración. En efecto, el denominador del segundo miembro es distinto de cero y también el del primer miembro puesto que, por el teorema del valor medio:

$$g(b) = g(a) + g'(c)(b - a) \neq g(a)$$

Formemos la función:

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

y escojamos λ de forma que pueda aplicarse el teorema de Rolle a $F(x)$. Para ello:

$$F(a) = f(a) - \lambda g(a)$$
$$F(b) = f(b) - \lambda g(b)$$

$$F(a) = F(b) \quad\Longrightarrow\quad f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Como consecuencia del teorema de Rolle, existe un $\xi \in (a,b)$ tal que $F'(\xi) = 0$. Es decir:

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$\square$

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(e^{3x} - 5x\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución:

(a) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ls regla de l'Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \\ &= 2\end{aligned}$$

(b) Es una indeterminación del tipo ∞^0.

$$\lim_{x\to\infty} \left(e^{3x} - 5x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln e^{3x}}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x}{x}} = e^3$$

donde hemos aplicado que e^{3x} es un infinito de orden superior a $5x$.

Ejercicio 3. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{\ln x}\right)$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x + x)^{\frac{2}{\operatorname{sen} x}}$

Solución:

(a) Es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Hacemos la resta y aplicamos la regla de l'Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{\ln x}\right) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x\ln x - 3(x-1)}{(x-1)\ln x} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{2\ln x - 2 - 3}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \\ &= \infty\end{aligned}$$

(b) Es una indeterminación 1^∞. Aplicamos la aproximación $u^v \sim e^{(u-1)v}$:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x + x)^{\frac{2}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0} e^{(\frac{\cos x + x - 1)2}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{(-\operatorname{sen} x + 1)2}{\cos x}} = e^2$$

Ejercicio 4. *Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función*

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{e^x}$$

Solución:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{(4x-3)e^x - e^x(2x^2-3x)}{e^{2x}} = \frac{-2x^2+7x-3}{e^x}$$

El denominador nunca se hace cero. El numerador se anula para $x = \frac{1}{2}$ y $x = 3$. El signo de la derivada se refleja en el siguiente esquema:

$-$	0	$+$	0	$-$
	$\frac{1}{2}$		3	

La función es decreciente para $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$, es creciente en $x \in (\frac{1}{2}, 3)$. Hay un mínimo local en $x = \frac{1}{2}$ y un máximo en $x = 3$.

Ejercicio 5. *Calcular a y b para que la curva*

$$y = ax + b + \frac{8}{x}$$

tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) en el punto $(-2, -6)$.

Solución:

La derivada de la función es:

$$y' = a - \frac{8}{x^2}$$

De los datos se desprende que:

$$\begin{cases} y(-2) = -6 \\ y'(-2) = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -2a + b - 4 = -6 \\ a - 2 = 0 \end{cases}$$

y de aquí $a = 2$, $b = 2$.

Ejercicio 6. *Calcular a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle a la función:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & x \leq 0 \\ x^2 + ax & x > 0 \end{cases}$$

en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$. *Calcular el valor de c que indica el teorema.*

Solución:

Debe ocurrir que $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f(1)$:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1;\quad f(1)=1+a \qquad\Longrightarrow\qquad 1+a=1 \qquad\Longrightarrow\qquad a=0$$

Comprobemos que para este valor de a la función es derivable en $x=0$. Para $x\neq 0$ la derivada es

$$f'(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x & x<0\\ 2x+a & x>0\end{cases}$$

Para que se pueda aplicar el teorema de Rolle la función debe ser derivable en $x=0$. Entonces

$$f'(0^-)=f'(0^+) \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{sen}0=2\cdot 0+a \quad\Longrightarrow\quad a=0$$

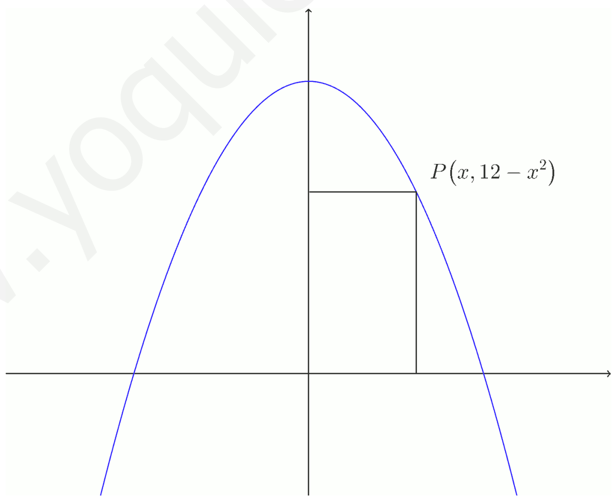
En este caso, la función y su derivada valen:

$$f(x)=\begin{cases}1-\cos x & x\leq 0\\ x^2 & x>0\end{cases};\qquad f'(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x & x<0\\ 0 & x=0\\ 2x & x>0\end{cases}$$

De acuerdo con el teorema de Rolle, debe existir un $c\in\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$ en el que la derivada vale cero. Según hemos visto $c=0$.

Ejercicio 7. *Determinar el punto P de la curva $y=12-x^2$ de forma que el área del rectángulo determinados por los ejes y las rectas paralelas a ellos que pasan por P sea máxima.*

Solución:



La función que debe presentar el máximo es:

$$S(x)=x(12-x^2)=12x-x^3$$

El máximo de esta función se obtiene igualando a cero la derivada:

$$s'(x)=12-3x^2=0 \qquad\Longrightarrow\qquad x=-2,\ x=2$$

Las soluciones son los puntos $P(2,8)$ y $P'(-2,8)$.

Ejercicio 8. *Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$.

Solución:

Para estudiar la continuidad calculamos los límites:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Como, además $f(0) = 0$ el límite es igual al valor de la función, ésta es continua en $x = 0$. Para $x \neq 0$ la función también es continua por ser un cociente de funciones continuas y el denominador nunca se anula.

Estudiemos las derivadas por la izquierda y por la derecha:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Las derivadas por la izquierda y por la derecha no coinciden y, por consiguiente, la función no es derivable en $x = 0$. Para $x \neq 0$ la función es derivable.

6. Segundo examen de derivadas (grupo G)

Ejercicio 1. *Teorema de Cauchy. Enunciado y demostración.*

Solución:

Sean f y g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Supongamos además que la derivada de g no se anula en el intervalo (a, b). Existe un punto $\xi \in (a, b)$ que cumple que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Demostración. En efecto, el denominador del segundo miembro es distinto de cero y también el del primer miembro puesto que, por el teorema del valor medio:

$$g(b) = g(a) + g'(c)(b-a) \neq g(a)$$

Formemos la función:

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

y escojamos λ de forma que pueda aplicarse el teorema de Rolle a $F(x)$. Para ello:

$$F(a) = f(a) - \lambda g(a)$$
$$F(b) = f(b) - \lambda g(b)$$
$$F(a) = F(b) \quad \Longrightarrow \quad f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Como consecuencia del teorema de Rolle, existe un $\xi \in (a, b)$ tal que $F'(\xi) = 0$. Es decir:

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

Ejercicio 2. *Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.*

Solución:

La parábola corta al eje de abscisas en los puntos $P(-2, 0)$ y $Q(2, 0)$.

La derivada de la función es:

$$y' = -2x$$

De forma que las pendientes de las tangentes en -2 y 2 son 4 y -4 respectivamente.

Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y = 4(x + 2) \qquad \text{y} \qquad y = -4(x - 2)$$

Ejercicio 3. *Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:*

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

Solución:

La derivada de la función es:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \ln x(\ln x + 2)$$

La derivada se anula en $x = 1$ y $x = e^{-2}$. El signo de la derivada es:

$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
	0		e^{-2}		1	

La función es creciente en $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(e^{-2}, 1)$. Hay un máximo en $x = e^{-2}$ y un mínimo en $x = 1$.

Ejercicio 4. *Para $x > -1$ se define la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) *Estudiar si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.*

(b) *Estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.*

Solución:

(a) Calculamos el límite de $f(x)$ cuando x tiende a cero:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-1-x}{2x(1+x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x+2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2+4x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Puesto que el límite de la función coincide con el valor de la función, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

(b) Calculemos la derivada a partir de la definición:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}+\frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\ln(1+h)-2h+h^2}{2h^3} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{1+h}-2+2h}{6h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2}{(1+h)^2}+2}{12h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4}{(1+h)^3}}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La función es derivable en $x = 0$ y su derivada vale $\frac{1}{3}$.

Ejercicio 5. *Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demostrar que las curvas $y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un único punto del intervalo $(0, \pi)$.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función

$$F(x) = \cos x - \sqrt{x}$$

se anula una sola vez en el intervalo $(0, \pi)$.

La función $F(x)$ es continua en $[0, \pi]$. Además:

$$F(0) = 1 - 0 > 0 \ ; \quad F(\pi) = \cos\pi - \sqrt{\pi} = -1 - \sqrt{\pi} < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe al menos un $\xi \in (0, \pi)$ tal que $F(\xi) = 0$.

La función $F(x)$ es derivable en $(0, \pi)$ y su derivada vale:

$$F'(x) = -\operatorname{sen} x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ en } (0, \pi)$$

Entonces, no puede haber dos ceros de la función porque, de acuerdo con el teorema de Rolle, entre los dos ceros debería haber un cero de la derivada y ya hemos visto que $F'(x)$ no se anula en $(0, \pi)$.

Ejercicio 6. *Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función* $y = \dfrac{x^2}{e^x}$.

Solución:

Calculamos la segunda derivada:

$$y' = \frac{2xe^x - e^x x^2}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$y'' = \frac{(2 - 2x)e^x - e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x}$$

La segunda derivada se anula en los puntos $2 - \sqrt{2}$ y $2 + \sqrt{2}$. El signo de la derivada es:

	$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	
$+$	0	$-$	0	$+$

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$ y convexa en $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. Los puntos $x = 2 - \sqrt{2}$ y $x = 2 + \sqrt{2}$ son puntos de inflexión de la función.

Ejercicio 7. *Estudiar el crecimiento y las asíntotas para representar gráficamente la función:*

$$y = \frac{2x - 1}{x - x^2}$$

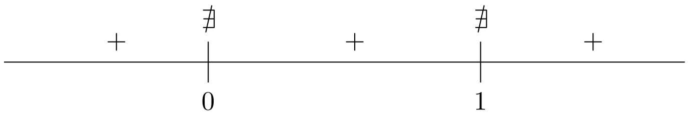
Solución:

La curva tiene dos asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 1$, y una asíntota horizontal $y = 0$.

Calculamos la derivada de la función:

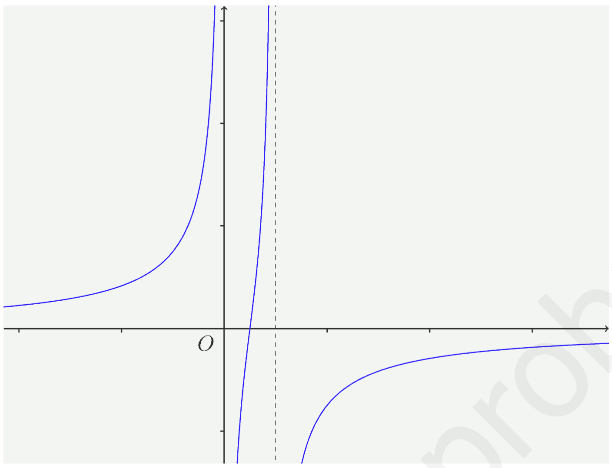
$$y' = \frac{2(x - x^2) - (1 - 2x)(2x - 1)}{(x - x^2)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x - x^2)^2}$$

El numerador no se anula nunca, es fácil ver que es siempre positivo. El signo de la derivada es:



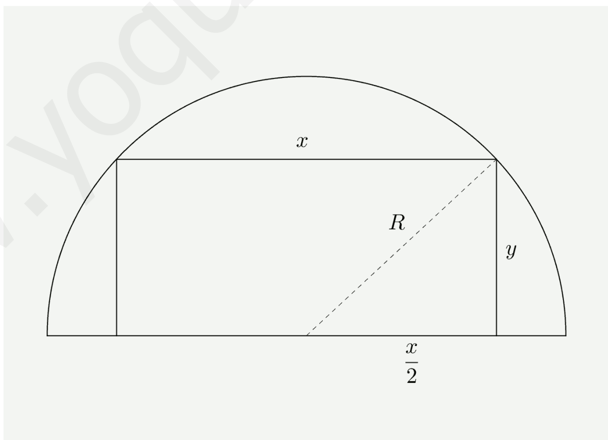
La función es creciente en todo su dominio.

Con estos datos la gráfica es:



Ejercicio 8. *Hallar el rectángulo de área máxima inscriptible en un semicírculo de radio* 60 cm*.*

Solución:



La función que debe presentar un máximo es:

$$S = x \cdot y = x \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + \frac{-\frac{\cancel{2}x}{4} \cdot x}{\cancel{2}\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}} = 0$$

Quitando denominadores:

$$R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad R^2 - \frac{x^2}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = R\sqrt{2}$$

y sustituyendo

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Puesto que $R = 60$ cm resulta:

$$x = 60\sqrt{2}\text{ cm} \ ; \qquad y = 30\sqrt{2}\text{ cm}$$

---

7. Segundo examen de derivadas (grupo D)

Ejercicio 1. *Teorema del valor medio. Enunciado y demostración. Consecuencias.*

Solución:

Teorema 1 (Teorema del valor medio, de Lagrange o de los incrementos finitos)**.** *Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe un punto $\xi \in (a,b)$ que cumple que:*

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

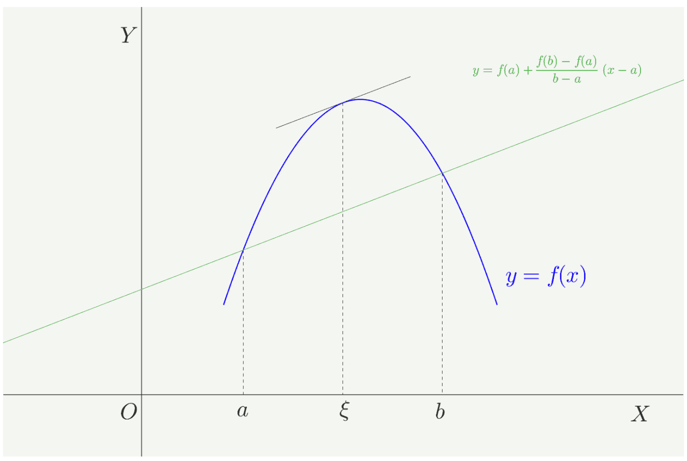
Demostración. Escojamos λ de forma que la función $F(x) = f(x) - \lambda x$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle. Desde luego, se cumplen las condiciones de continuidad y derivabilidad. Para que se cumpla la tercera condición:

$$F(a) = f(a) - \lambda a$$
$$F(b) = f(b) - \lambda b$$
$$F(a) = F(b) \quad \Longrightarrow \quad f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Para este valor de λ, como consecuencia del teorema de Rolle, existe $\xi \in (a,b)$ tal que:

$$F'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(\xi) - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(\xi) = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Longrightarrow \quad f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

□



Consecuencias del teorema del valor medio:

- Si $f'(x) > 0$ en (a,b), $f(x)$ es creciente en (a,b). En efecto, sean x_1, x_2, dos puntos del intervalo (a,b). Aplicando el teorema del valor medio:

$$\begin{aligned} x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad & f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad \qquad \text{puesto que } f'(\xi) > 0 \\ & f(x_2) > f(x_1) \end{aligned}$$

  De la misma forma se demuestra que si $f'(x) < 0$ la función es decreciente.

- Si una función tiene derivada cero en un intervalo (a,b) es constante en ese intervalo o, lo que es lo mismo, toma el mismo valor en todos sus puntos.

  En efecto, sean x_1 y x_2 dos puntos del intervalo (a,b). En el intervalo $[x_1, x_2]$ la función cumple las condiciones del teorema del valor medio de forma que:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)\ ; \qquad \xi \in (x_1, x_2)$$

  y como la derivada es cero en el intervalo, resulta $f(x_2) = f(x_1)$.

- Si dos funciones tienen la misma derivada, su diferencia es constante.

  En efecto, si $f'(x) = g'(x)$, la diferencia $F(x) = f(x) - g(x)$ tiene derivada cero y de acuerdo con el apartado anterior es constante.

Ejercicio 2. *Determinar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función*

$$f(x) = xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$$

en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

La ordenada del punto es:

$$f(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x + xe^x + \frac{3x^2(x^2+4) - 2x(x^3-2)}{(x^2+4)^2}$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'(0) = 1$$

y la pendiente de la normal:

$$m' = \frac{-1}{m} = -1$$

La ecuación de la tangente es:

$$y + \frac{1}{2} = x$$

y la de la normal:

$$y + \frac{1}{2} = -x$$

Ejercicio 3. *Para $x > -1$ se define la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) *Estudiar si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.*

(b) *Estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.*

Solución:

(a) Calculamos el límite de $f(x)$ cuando x tiende a cero:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 - x}{2x(1+x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x + 2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2 + 4x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Puesto que el límite de la función coincide con el valor de la función, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

(b) Calculemos la derivada a partir de la definición:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} + \frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\ln(1+h) - 2h + h^2}{2h^3} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{1+h} - 2 + 2h}{6h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2}{(1+h)^2} + 2}{12h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4}{(1+h)^3}}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La función es derivable en $x = 0$ y su derivada vale $\frac{1}{3}$.

Ejercicio 4. *Obtener el valor de a para que:*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$$

Solución:

Se trata de un límite indeterminado del tipo 1^∞. Aplicando la aproximación $u^v \sim e^{(u-1)v}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}-1\right)ax^2} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6ax^2}{x^2}} = e^{-6a}$$

Puesto que el límite debe ser igual a 4:

$$e^{-6a} = 4 \implies -6a = \ln 4 = 2\ln 2 \implies a = -\frac{1}{3}\ln 2$$

Ejercicio 5. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-20}{x+5}$$

se pide:

(a) *Calcular las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

(b) *Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad y representar gráficamente la función.*

Solución:

(a) Hay una asíntota vertical $x=-5$. Calculamos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-20}{x(x+5)} = 3$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+5x-20}{x+5} - 3x\right)\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-20-3x^2-15x}{x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{-10x-20}{x+5} = -10$$

Para analizar el crecimiento y decrecimiento estudiaremos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(6x+5)(x+5)-(3x^2+5x-20)}{(x+5)^2} = \frac{3x^2+30x+45}{(x+5)^2} = \frac{3(x^2+10x+15)}{(x+5)^2}$$

La derivada se anula en $-5-\sqrt{10}$ y $-5+\sqrt{10}$. El signo de la derivada según los valores de x es:

	$-5-\sqrt{10}$		-5		$-5+\sqrt{10}$	
$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$

La función es:

– creciente en $\left(-\infty,-5-\sqrt{10}\right)\cup\left(-5+\sqrt{10},\infty\right)$

– decreciente en $\left(-5-\sqrt{10},-5+\sqrt{10}\right)-\{-5\}$

– hay un máximo en $x=-5-\sqrt{10}$

– hay un mínimo en $x=-5+\sqrt{10}$

(b) Estudiemos ahora la segunda derivada para calcular los intervalos de concavidad y convexidad:

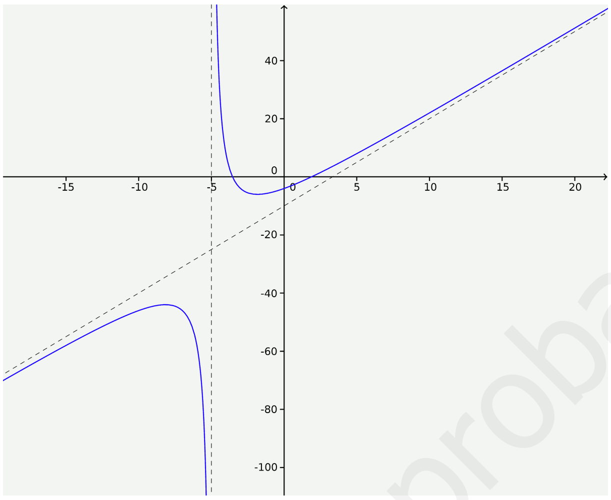
$$\begin{aligned} f''(x) &= 3\cdot\frac{(2x+10)(x+5)^2-2(x+5)(x^2+10x+15)}{(x+5)^4} \\ &= 3\cdot\frac{(2x+10)(x+5)-2(x^2+10x+15)}{(x+5)^3} \\ &= \frac{60}{(x+5)^3} \end{aligned}$$

El signo de la segunda derivada está dado por:

$$\begin{array}{ccc} & \nexists & \\ - & | & + \\ & -5 & \end{array}$$

La función es cóncava en $(-5, \infty)$ y convexa en $(-\infty, -5)$.

La gráfica de la función tiene la siguiente forma:



Ejercicio 6. *Hallar a, b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.*

Solución:

Las condiciones dadas son equivalentes a:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \\ f''(3) = 0 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \ ; \qquad f''(x) = 6x + 2a$$

de modo que resulta el sistema:

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 2 \\ 3 + 2a + b = 0 \\ 18 + 2a = 0 \end{cases}$$

que tiene como solución $a = -9$, $b = 15$, $c = -5$.

Ejercicio 7. *Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, se pide determinar el dominio de definición de $f(x)$, las asíntotas verticales de su gráfica y los los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.*

Solución:

El dominio de definición de la función es la solución de la inecuación $x^2 + 4x - 5 > 0$. Este polinomio tiene como raíces $x = -5$ y $x = 1$. El signo del polinomio es:

	-5		1	
$+$	0	$-$	0	$+$

El dominio de la función es $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

Las rectas $x = -5$ y $x = 1$ son asíntotas verticales puesto que esos valores anulan el argumento del logaritmo y entonces la función tiende a $-\infty$.

Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5}$$

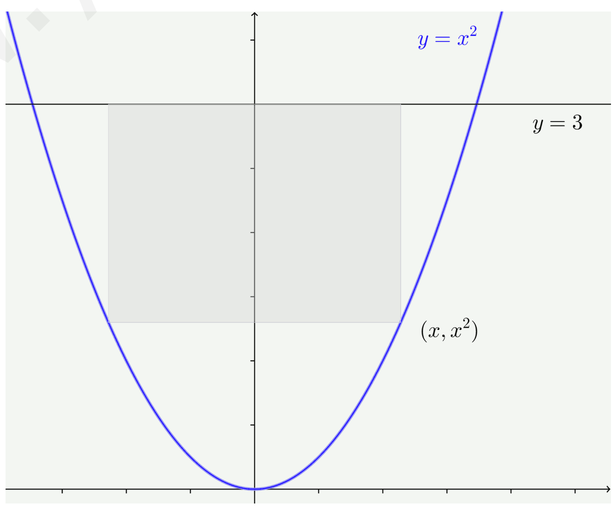
El numerador se anula para $x = -2$ y el denominador para $x = -5$ y $x = 1$. Hacemos el esquema de signos:

	-5		-2		1	
$-$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$+$

La función es decreciente en $(-\infty, -5)$ y creciente en $(1, \infty)$.

Ejercicio 8. *Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$. De entre los rectángulos que tienen un lado sobre la porción de recta que queda sobre la curva y los otros dos vértices sobre la parábola, determinar el que tiene área máxima.*

Solución:



El área del rectángulo es:

$$S = 2x(3 - x^2) = 6x - 2x^3$$

Para calcular el valor máximo derivamos e igualamos la derivada a cero:

$$S' = 6 - 6x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

8. Integral indefinida

Ejercicio 1. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{1-x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x+2}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Es una integral inmediata:

$$\int \frac{2}{1-x}\,\mathrm{d}x = -2\ln|1-x| + C$$

(b) Hacemos la división e integramos:

$$\int \frac{3x-1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(3 - \frac{7}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x = 3x - 7\ln|x+2| + C$$

Ejercicio 2. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \operatorname{artg} x\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Mediante la identidad trigonométrica $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$:

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$$

(b) Por partes:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{artg} x & \mathrm{d}u &= \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{artg} x\,\mathrm{d} = x\operatorname{artg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{artg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{artg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Ejercicio 3. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3x}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Es inmediata:

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + C$$

(*b*) Por partes:

$$u = \ln x \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Ejercicio 4. *Calcular las siguientes integrales:*

(*a*) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ (*b*) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(*a*) Hacemos la división y resulta:

$$\int \frac{3x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(3 + \frac{4}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{-2}{x+1} + \frac{2}{x-1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(3 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= 3x - 2\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C \\ &= 3x - 2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C\end{aligned}$$

(*b*) Es inmediata:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arsen} 2x + C$$

Ejercicio 5. *Calcular las siguientes integrales:*

(*a*) $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$ (*b*) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(*a*) Por partes:

$$u = e^{-x} \qquad \mathrm{d}u = -e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \qquad v = \operatorname{sen} x$$

$$\int e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\operatorname{sen} x + \int e^{-x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

De nuevo por partes:

$$u = e^{-x} \qquad \mathrm{d}u = -e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \qquad v = -\cos x$$

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x &= -e^{-x}\operatorname{sen} x + \int e^{-x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\\ &= -e^{-x}\operatorname{sen} x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando resulta:

$$\int e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{-e^{-x}\,(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C$$

(b) Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$$

resulta:

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$$

Ejercicio 6. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Por partes: Por partes:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{2(x+3)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{2x(x+3)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3}\int (x+3)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2x(x+3)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{2(x+3)^{\frac{5}{2}}}{5}\\ &= \frac{2x(x+3)\sqrt{x+3}}{3} - \frac{4(x+3)^2\sqrt{x+3}}{15} + C\end{aligned}$$

También podría hacerse con el cambio de variable $t = \sqrt{x+3}$ o $t^2 = x+3$.

(b) Es casi inmediata:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{2}\int \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-4}}\,\mathrm{d}(x^2+2x-4)\\ &= \sqrt{x^2+2x-4}\end{aligned}$$

Ejercicio 7. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Con el cambio de variable $\operatorname{sen} t = x$, $\cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)+C\\ &= \frac{1}{2}(t+\operatorname{sen} t\cos t)+C\\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right)+C\end{aligned}$$

(b) Hacemos el cambio de variable $t=\cos x$, $\mathrm{d}t = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$ y resulta:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}+\frac{\frac{1}{2}}{t-1}$$

Sustituyendo, la integral queda:

$$= \int\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

Ejercicio 8. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int (2x+1)(3x-2)^5\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{28-12x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Por partes:

$$\begin{aligned} u &= 2x+1 & \mathrm{d}u &= 2\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v &= (3x-2)^5\,\mathrm{d}x & v &= \frac{(3x-2)^6}{6}\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (2x+1)(3x-2)^5\,\mathrm{d}x &= \frac{(2x+1)(3x-2)^6}{18}-\frac{1}{9}\int (3x-2)^6\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{(2x+1)(3x-2)^6}{18}-\frac{1}{9}\frac{(3x-2)^7}{7}\frac{1}{3}+C\\ &= \frac{(2x+1)(3x-2)^6}{18}-\frac{(3x-2)^7}{189}+C\end{aligned}$$

(b) Teniendo en cuenta que $28-12x-x^2=64-(x+6)^2$:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{28-12x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{8^2-(x+6)^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{arsen}\frac{x+6}{8}+C$$

---

9. Examen de problemas de selectividad. Grupo G.

Ejercicio 1.

(a) *Calcular los valores de a y b para que la función:*

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0\\ x^2+2a\cos x & \text{si } 0\le x<\pi\\ ax^2+b & \text{si } x\ge\pi\end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

(b) *Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.*

Solución

(a) La función es continua en $\mathbb{R}-\{0,\pi\}$. Para estudiar la continuidad en esos puntos calculamos los límites laterales:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(3x+2)=2\\
&\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x^2+2a\cos x)=2a\\
&\lim_{x\to\pi^-}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}(x^2+2a\cos x)=\pi^2-2a\\
&\lim_{x\to\pi^+}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}(ax^2+b)=a\pi^2+b
\end{aligned}$$

De los dos primeros límites resulta que para que la funciones sea continua debe ser $a=1$ y, dado este valor, para que la función sea continua en π debe ser $b=-2$.

(b) Sea ahora la función:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0\\ x^2+2\cos x & \text{si } 0\le x<\pi\\ x^2-2 & \text{si } x\ge\pi\end{cases}$$

Para $x\ne0,\pi$ la derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<0\\ 2x-2\operatorname{sen}x & \text{si } 0<x<\pi\\ 2x & \text{si } x>\pi\end{cases}$$

En $x=0$ las derivadas laterales son:

$$\begin{aligned}
&f'(0^-)=3\\
&f'(0^+)=0
\end{aligned}$$

en consecuencia, la función no es derivable en $x=0$.

En $x = \pi$:

$$f'(\pi^-) = 2\pi$$
$$f'(0^+) = 2\pi$$

y por tanto, la función es derivable en $x = \pi$.

Ejercicio 2. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

(a) *Estudiar y obtener las asíntotas.*

(b) *Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.*

(c) *Representar gráficamente la función.*

Solución

(a) Hay una asíntota vertical $x = -5$. Calculamos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x(x+5)} = 3$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} - 3x\right) \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 5x - 20 - 3x^2 - 15x}{x + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{-10x - 20}{x + 5} = -10$$

(b) Para analizar la concavidad calculamos las derivadas:

$$f'(x) = \frac{(6x+5)(x+5) - (3x^2 + 5x - 20)}{(x+5)^2} = \frac{3x^2 + 30x + 45}{(x+5)^2} = \frac{3(x^2 + 10x + 15)}{(x+5)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3 \cdot \frac{(2x+10)(x+5)^2 - 2(x+5)(x^2 + 10x + 15)}{(x+5)^4} \\ &= 3 \cdot \frac{(2x+10)(x+5) - 2(x^2 + 10x + 15)}{(x+5)^3} \\ &= \frac{60}{(x+5)^3} \end{aligned}$$

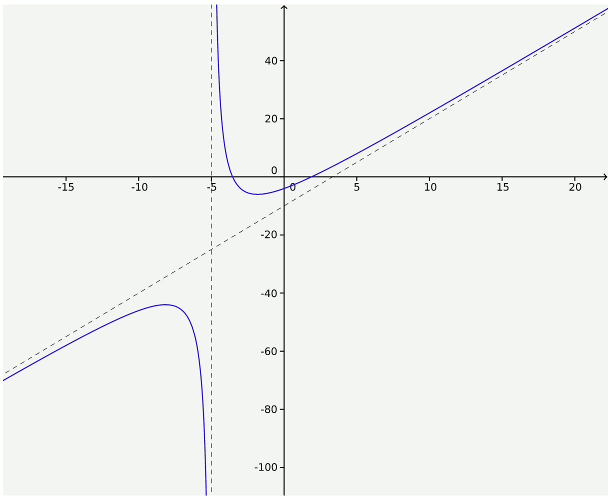
El signo de la segunda derivada está dado por:

$-$ $\quad\nexists\quad$ $+$

-5

La función es cóncava en $(-5, \infty)$ y convexa en $(-\infty, -5)$.

(c) La gráfica de la función tiene la siguiente forma:



Ejercicio 3. *Calcular la integra definida*

$$\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Solución

Por partes:

$$\begin{aligned} u &= 1-x & \mathrm{d}u &= -\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= e^{-x}\,\mathrm{d}x & v &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 (1-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-(1-x)e^{-x}\Big]_1^4 - \int_1^4 e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[e^{-x} - (1-x)e^{-x}\Big]_1^4 \\ &= \Big[xe^{-x}\Big]_1^4 \\ &= 4e^{-4} - e^{-1} \\ &= \frac{4}{e^4} - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Dada la función $f(x) = xe^{2x}$ se pide:*

(a) *Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.*

(b) *Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \le x \le 1$.*

Solución

(a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. No tiene asíntotas verticales. Tiene una asíntota horizontal $y = 0$ en $-\infty$ ya que:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-2x}} = 0$$

por ser el infinito exponencial de rango superior al infinito potencial.
Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x+1)e^{2x}$$

La derivada se anula en $x = -\frac{1}{2}$. El signo de la derivada está dado por:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ - & | & + \\ & -\frac{1}{2} & \end{array}$$

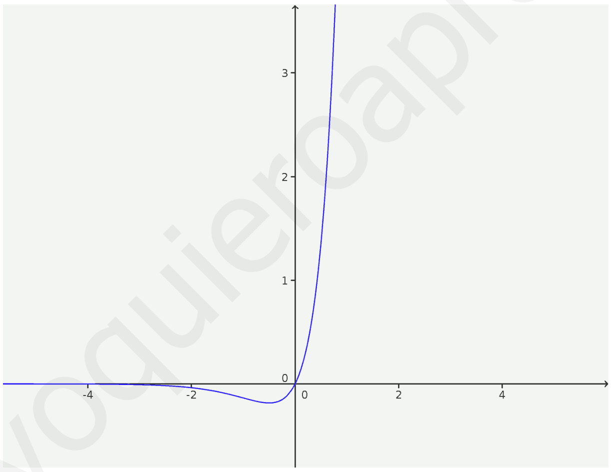
La función es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Tiene un mínimo en $x = -\frac{1}{2}$.
Calculamos ahora la segunda derivada:

$$f''(x) = 2e^{2x} + 2(2x+1)e^{2x} = (4x+4)e^{2x}$$

Esta derivada se anula en $x = -1$. El signo de la segunda derivada está dado en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ - & | & + \\ & -1 & \end{array}$$

La función es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en $x = -1$.
Con estos datos, la gráfica de la función es la siguiente:



(*b*) Por partes:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = e^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Integramos por separado entre -1 y 0 donde la función es negativa y entre 0 y 1 donde es positiva:

$$\int_{-1}^{0} xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-2}$$

$$\int_{0}^{1} xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4}e^{2} + \frac{1}{4}$$

El área de -1 a 0 es la integral cambiada de signo. Así:

$$S = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4e^2}$$

Ejercicio 5.

(a) *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

(b) *Demostrar que la ecuación $4x^5+3x+m=0$ solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justifica la respuesta indicando qué teoremas se usan.*

Solución:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$

(b) El problema es equivalente a demostrar que la función $F(x)=4x^5+3x+m$ se anula para un solo valor de x.

La función $F(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Además:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$$

Por consiguiente, la función toma valores positivos y negativos. De acuerdo con el teorema de Bolzano debe existir algún punto en que la función se hace cero.

Veamos que este punto es único. La función $F(x)$ es derivable siempre y su derivada es:

$$F'(x) = 20x^4 + 3 > 0$$

Puesto que la derivada nunca se hace cero, la función no puede anularse en más de un punto. En caso contrario, de acuerdo con el teorema de Rolle entre los dos ceros de la función debería haber un cero de la derivada.

Ejercicio 6. Sabiendo que la función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7)$$

(a) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.

(c) ¿Es el punto $x=4$ un punto de inflexión de f? Justificar razonadamente la respuesta.

Ejercicio 7. Hallar :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1+4x^3\right)^{\frac{2}{x^3}}$

10. Matrices. Grupo G

Ejercicio 1. *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} && F_2 \to F_2 - F_1,\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \\
&= 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} && \text{sacando factor común} \\
&= 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && F_3 \to F_3 - F_1 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Resuelve la ecuación matricial $AX - B = C$ siendo:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución:

Calculamos el determinante de A para ver si existe la matriz inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Como el determinante es distinto de cero, podemos calcular la matriz inversa:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Despejamos X:

$$\begin{aligned}
&AX - B = C \\
&AX = B + C \\
&A^{-1}AX = A^{-1}(B + C) \\
&X = A^{-1}(B + C)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

Operando:

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ -2 & -7 & -4\\ 4 & 8 & 6\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6 & -5 & -4\\ -2 & -7 & -4\\ -2 & 13 & 8\end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. *Estudia según los valores de a el rango de la matriz:*

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 2 & 2a & 2a\\ 3 & 3 & a+2\end{pmatrix}$$

Solución:

calculamos el determinante de la matriz. Restando la primera columna a la segunda:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 2 & 2a & 2a\\ 3 & 3 & a+2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & a\\ 2 & 2a-2 & 2a\\ 3 & 0 & a+2\end{vmatrix} = (2a-2)[a+2-3a] = -(2a-2)^2$$

El determinante se hace cero para $a = 1$. Por consiguiente:

- Si $a \neq 1$ el determinante es distinto de cero y el rango de la matriz es 3.
- Si $a = 1$:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix} = 1$$

Ejercicio 4. *Calcula los valores de a para los que la matriz:*

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & a\\ 3 & -1 & 3\\ a & a & 1\end{pmatrix}$$

no tiene inversa. Calcula la inversa de esta matriz para $a = 0$.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & a\\ 3 & -1 & 3\\ a & a & 1\end{vmatrix} = -1 + 3a^2 - 6a + a^2 - 3a + 6 = 4a^2 - 9a + 5$$

El determinante se anula para $a = \frac{5}{4}$ y para $a = 1$. Para estos valores de a la matriz no tiene inversa.

Ahora vamos a calcular la inversa de:

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es igual a 5.

Además:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. *Calcular el rango de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3$$

Para calcular el rango hemos aplicado el método de Gauss procediendo de la siguiente manera:

- ⋄ Hemos suprimido la tercera columna que es igual que la primera.
- ⋄ Hemos sumado la primera fila a la tercera y a la cuarta.
- ⋄ Hemos sumado la segunda fila a la tercera y a la cuarta.
- ⋄ Hemos suprimido la tercera fila que es el doble de la cuarta.
- ⋄ Hemos obtenido una matriz escalonada de rango 3.

Ejercicio 6. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

Solución:

Calculamos los productos:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2c & 5b + 2c & 0 \\ 2a + 5c & 2b + 5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2b & 2a + 5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente:

$$\begin{cases} 5a+2c=5a+2b \\ 5b+2c=2a+5b \\ 2a+5c=7c \\ 2b+5c=7c \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a=b=c$$

Las matrices que conmutan con A son las de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. *Calcular el valor del determinante:*

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Restando la cuarta columna a todas las demás:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & y-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(z-1)$$

Ejercicio 8. *Dadas las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(*a*) *Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2=aA+bI$.*

(*b*) *Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.*

Solución:

Calculamos A^2:

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad a=-1,\ b=3$$

y por tanto $A^2 = -A + 3I$. Así:

$$\begin{aligned} A^4 &= A^2A^2 = (-A+3I)(-A+3I) \\ &= A^2 - 3A - 3A + 9I \\ &= -A + 3I - 6A + 9I \\ &= -7A + 12I \\ A^5 &= -7A^2 + 12A = -7(-A+3I) + 12A \\ &= 19A - 21I \end{aligned}$$

Entonces:

$$A^5 = 19\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 21\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

11. Matrices. Grupo D

Ejercicio 1. *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Ponemos ceros en la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ -5 & -5 & 0 & -5 \\ -4 & -12 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando y sacando factor común:

$$= 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 12 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 12 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

Ejercicio 2. *Calcular el rango de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Ponemos ceros en la primera columna:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 3$$

Ejercicio 3. *Hallar todas las matrices* $A = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ *distintas de* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *tales que* $A^2 = A$.

Solución:

Calculamos A^2:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2+ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

y por consiguiente:

$$\begin{cases} a^2 = a \\ a^2 + ab = a \\ b^2 = b \end{cases}$$

Las soluciones son $a = 0,\ b = 1$ o $a = 1,\ b = 0$.

Ejercicio 4. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(*a*) *Hallar el valor o valores de* a *para que la matriz* A *tenga inversa.*

(*b*) *Calcular la matriz inversa de* A*, en el caso* $a = 2$.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ 0 & 5 & -2a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = 5 - 2a^2$$

El determinante se anula para $a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Existe inversa para todos los valores de a excepto para estos.

Calculamos ahora la inversa para $a = 2$. El determinante de la matriz vale -3.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \\ -6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & -4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

se pide:

(*a*) *Hallar el rango de A en función de los valores de k.*

(*b*) *Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución de la ecuación $AX = B$.*

Solución:

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2k \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -2 & 0 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k(-2)(1-k^2)$$

El determinante se anula para $k = 0$, $k = -1$ y $k = 1$. Entonces tenemos:

- Si $k \notin \{0, -1, 1\}$ el rango de la matriz es igual a 3.
- Si $a = 0$:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

- Si $k = -1$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

- Si $k = 1$:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Resolvamos ahora el sistema para $k = 2$. Por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -6 & -16 \end{pmatrix}$$

que da $x = \frac{2}{3}$, $y = 0$, $z = \frac{8}{3}$

Ejercicio 6. *Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$. siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Hay que tener en cuenta que $B = 2A$ por lo que $BA = 2A^2$. Entonces:

$$XA^2 + BA = A^2$$
$$XA^2 + 2A^2 = A^2$$
$$XA^2 = -A^2$$

Y, puesto que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

resulta

$$X = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7.

(*a*) *Demostrar que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

verifica una ecuación del tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$*, determinando* α *y* β*.*

(*b*) *Utilizar el apartado anterior para calcular la inversa de* A*.*

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos $\alpha = -4$ y $\beta = 3$. Entonces:

$$\begin{aligned} &A^2 - 4A + 3I = 0 \\ &3I = 4A - A^2 \\ &3I = A(4I - A) \\ &I = \frac{1}{3}A(4I - A) \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\,(4I - A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. *Calcular el valor del siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$$

Solución:

Sumando a la primera las otras tres columnas se obtiene:

$$\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b-1 & c & d+1 \\ a+b+c+d & b & c-1 & d \\ a+b+c+d & b+1 & c & d-1 \\ a+b+c+d & b & c+1 & d \end{vmatrix}$$

Sacando factor común:

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b-1 & c & d+1 \\ 1 & b & c-1 & d \\ 1 & b+1 & c & d-1 \\ 1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$$

(restando la primera fila a las otras tres)

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b-1 & c & d+1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

(desarrollando por la primera columna)

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

(y puesto que la primera y la tercera columna son dependientes)

$$= 0$$

---

12. Matrices y sistemas

Ejercicio . *Resolver la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ x & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

Ponemos ceros en la tercera columna y desarrollamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ x & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 14 \\ x+1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 14 \\ x+1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 5 & 4 \\ x+1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ x-2 & 3 \end{vmatrix}$$

La ecuación se reduce a:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ x-2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Ejercicio 2. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Determinar la matriz inversa de B.

(b) Determinar una matriz X tal que $A = BX$.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz B:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

La matriz adjunta es:

$$\operatorname{adj} B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la inversa:

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz X despejamos esta matriz en la ecuación:

$$\begin{aligned} BX &= A \\ B^{-1}BX &= B^{-1}A \\ X &= B^{-1}A \end{aligned}$$

Entonces:

$$X = B^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -11 \\ -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. *Se consideran las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular los valores que puede tomar k para que la matriz AB tenga inversa.

Solución:

Calculamos el producto de las dos matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz vale:

$$\begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k + k - k(-2+2k) = 0$$

La matriz no tiene inversa para ningún valor de k.

Ejercicio 4. *Dado el sistema:*

$$\begin{cases} x+y+z &= -2 \\ -\lambda x+3y+z &= -7 \\ x+2y+(\lambda+2)z &= -5 \end{cases}$$

(a) *Estudiar el sistema según los valores del parámetro λ.*

(b) *Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.*

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 3+\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 3+\lambda & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

Podemos distinguir los siguientes casos:

– Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq -2$ el rango de ambas matrices es 3 y el sistema es compatible determinado.

– Si $\lambda = -1$ el rango $A = 2$. La matriz ampliada:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 3$$

El sistema es incompatible.

– Si $\lambda = -2$ el rango $A = 2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado.

(b) Vamos a resolver el sistema en el caso $\lambda = -2$. Como el rango de las matrices del sistema es 2, solo hay dos ecuaciones independientes. Escogemos la primera y la tercera:

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x+2y=-5 \end{cases}$$

Podemos tomar $z = t$ como parámetro:

$$\begin{cases} x+y=-2-t \\ x+2y=-5 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene:

$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \\ z=t \end{cases}$$

Ejercicio 5. *Estudiar la compatibilidad según los valores de a y resolver cuando sea posible el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} 5x+2y-z &= 0 \\ x+ay-3z &= 0 \\ 3x+5y-2z &= 0 \end{cases}$$

Solución:

Es un sistema homogéneo y, por consiguiente, será siempre compatible. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & a & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -10a - 18 - 5 + 3a + 75 + 4 = -7a + 56$$

El determinante se anula para $a = 8$. Podemos distinguir los siguientes casos:

- Si $a \neq 8$ el rango de la matriz es 3. El sistema es compatible determinado y solo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$-
- Si $a = 8$, el rango de la matriz es 2. Hay dos ecuaciones independientes. Tomando las dos primeras, el sistema queda:

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x + 8y + 3z = 0 \end{cases}$$

La solución es:

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} \lambda = 2\lambda$$

$$y = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \lambda = 14\lambda$$

$$z = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \lambda = 38\lambda$$

La solución puede escribirse también $(t, 7t, 19t)$.

Ejercicio 6.

(a) *Dado el sistema:*

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$, distinta de las anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

(b) *Dado el sistema:*

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ distinta de las dos anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

(a) El sistema es compatible determinado. Si queremos que siga siendo compatible deberemos añadir una combinación lineal de las dos ecuaciones que no cambiará las soluciones. Por ejemplo la suma de las dos ecuaciones $4x + y = 3$.

(b) El sistema que tenemos es compatible indeterminado. Si añadimos una ecuación independiente de las que tenemos el rango aumentará a 3 y se convertirá en uno compatible determinado o incompatible.

Entonces, debemos añadir una ecuación que no cambie los rangos, una combinación lineal de las anteriores y que dé 1 como término independiente. Por ejemplo, multiplicando la primera ecuación por 2 y restándole la segunda se onbtiene:

$$3x + 3y - 4z = 1$$

---

13. Geometría. Contenidos básicos.

Ejercicio 1. *Calcular el valor de m para que los puntos $A(0,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(1,m,1)$ y $D(m,-1,2m)$ pertenezcan a un mismo plano.*

Solución:

Si los cuatro puntos son coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & m-1 & -2 \\ 1 & -1 & 2m-2 \end{vmatrix} = 0$$

Ponemos ceros en la primera columna y resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & m-2 \\ 0 & -2 & m-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} m & m-2 \\ -2 & m-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (m-2)\begin{vmatrix} m & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando

$$(m-2)(m+2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 2, \quad m = -2$$

Ejercicio 2. *Calcular las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta de ecuaciones implícitas:*

$$r: \begin{cases} 3x - y - z - 1 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

El vector director de la recta es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 3 & 1 \\ \vec{\jmath} & -1 & 1 \\ \vec{k} & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos un punto de la recta dando valores. Para $x = 0$:

$$\begin{cases} -y - z - 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = 1 \quad z = -2$$

El punto es $P(0,1,-2)$. La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \quad \text{o} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$$

Ejercicio 3. *Calcular la ecuación de la recta paralela a:*

$$\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 2x+3y-z+7=0 \end{cases}$$

por el punto $P(0,1,2)$.

Solución:

El vector director de la recta es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 2 \\ \vec{\jmath} & 1 & 3 \\ \vec{k} & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$$

Ejercicio 4. *Dados el plano* $\pi \equiv x+3y-z=1$ *y la recta*

$$r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

hallar la ecuación general del plano π' *que contiene a* r *y es perpendicular a* π.

Solución:

El vector director de la recta y el vector normal al plano que nos dan son vectores directores del plano que buscamos. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 6 & 1 \\ y-1 & 2 & 3 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -5(x+2)+7(y-1)-16z=0$$

Haciendo operaciones la ecuación resulta $-5x+7y-16z-17=0$.

Ejercicio 5. *Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:*

$$\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z-3=0 \end{cases}$$

y pasa por el punto $P(1,3,-1)$.

Solución:

El haz de planos que contiene a la recta dada es:

$$\alpha(2x-y+z-1)+\beta(x+y-z-3)=0$$

Si debe contener el punto $P(1,3,-1)$:

$$\alpha(2-3-1-1)+\beta(1+3+1-3)=0 \quad \Longrightarrow \quad -3\alpha+2\beta=0$$

Para $\alpha = 2$ y $\beta = 3$:

$$2(2x - y + z - 1) + 3(x + y - z - 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 7x + y - z - 11 = 0$$

Ejercicio 6. *Calcular la ecuación de la recta paralela a los planos:*

$$\pi : \ 2x + y - z - 3 = 0 \ ; \qquad \pi' : \ x + y + 2z - 1 = 0$$

que pasa por el punto $P(-1, 2, 0)$.

Solución:

Los vectores normales a los dos planos son perpendiculares a la recta. El vector director de la recta es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 2 & 1 \\ \vec{\jmath} & 1 & 1 \\ \vec{k} & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases}$$

Ejercicio 7. *Calcular la ecuación general del plano que contiene al punto* $P(1, -2, 1)$ *y al eje* OY.

Solución:

Podemos tomar como vectores directores del plano el vector director del eje OY y el vector OP y como punto del plano el origen de coordenadas. Así:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & -2 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - z = 0$$

Ejercicio 8. *Dadas las rectas:*

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \ ; \qquad s \equiv \begin{cases} y + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

se pide hallar la ecuación del plano π *que contiene a* r *y* s.

Solución:

Tomando y como parámetro la ecuación de la recta s puede escribirse como:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

La ecuación del plano que nos piden es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y - 1 & 2 & 2 \\ z + 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2x + y - 1 = 0$$
