1. Límites y derivadas

Ejercicio 1. *Derivar las siguientes funciones:*

$(a)\ \ y = (2x-1)^3(3x-2)^2$ $\qquad (b)\ \ y = \dfrac{2x+3}{(x+1)^2}$

Solución:

$(a)\ \ y' = 3(2x-1)^2 \cdot 2 \cdot (3x-2)^2 + 2(3x-2) \cdot 3 \cdot (2x-1)^3$

$(b)\ \ y' = \dfrac{2 \cdot (x+1)^2 - 2(x+1)(2x-3)}{(x+1)^4}$

Ejercicio 2. *Derivar las siguientes funciones:*

$(a)\ \ y = x\cos^2 x$ $\qquad (b)\ \ y = 2\ln \operatorname{tg} x$

Solución:

$(a)\ \ y' = 1 \cdot \cos^2 x + 2\cos x(-\operatorname{sen} x) \cdot x^2$

$(b)\ \ y' = 2 \cdot \dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$

Ejercicio 3. *Derivar las siguientes funciones:*

$(a)\ \ y = \operatorname{artg} \dfrac{1}{x}$ $\qquad (b)\ \ y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución:

$(a)\ \ y' = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$(b)\ \ y' = \dfrac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x}{1-x^2}$

Ejercicio 4. *Derivar las siguientes funciones:*

$(a)\ \ y = \dfrac{x^2e^x}{1+\cos x}$ $\qquad (b)\ \ y = x^{\sqrt{x+1}}$

Solución:

$(a)\ \ y' = \dfrac{(2xe^x + e^x x^2)(1+cosx) - (-\operatorname{sen} x) \cdot x^2 e^x}{(1+\cos x)^2}$

(b) Puesto que $y = x^{\sqrt{x+1}} = e^{\sqrt{x+1}\ln x}$:

$$y' = e^{\sqrt{x+1}\ln x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\ln x + \frac{1}{x}\sqrt{x+1}\right) = x^{\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\ln x + \frac{1}{x}\sqrt{x+1}\right)$$

Ejercicio 5. *Derivar las siguientes funciones y simplificar el resultado:*

(a) $y = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$

(b) $y = \operatorname{tg} \operatorname{arsen} x$

Solución:

(a) Puesto que $y = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ resulta que $y' = 0$.

(b) Podemos simplificar la función como sigue:

$$y = \operatorname{tg} \operatorname{arsen} x = \frac{\operatorname{sen} \operatorname{arsen} x}{\cos \operatorname{arsen} x} = \frac{x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \operatorname{arsen} x}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

de modo que la derivada es:

$$y' = \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x}{1-x^2} = \frac{1 - x^2 + x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Ejercicio 6. *Calcular la derivada segunda de las siguientes funciones:*

(a) $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$

(b) $y = x^2 e^{-x}$

Solución:

(a) Las derivadas son:

$$y' = \frac{2 \cdot (x+2) - 1 \cdot (2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$y'' = \frac{0 - 2(x+2)}{(x+2)^4} = -\frac{2}{(x+2)^3}$$

(b) Igualmente:

$$y' = 2xe^{-x} + e^{-x}(-1) \cdot x^2 = e^{-x}(2x - x^2)$$

$$y'' = e^{-x}(-1)(2x - x^2) + (2 - 2x)e^{-x}$$

Ejercicio 7. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} - x\right)$

Solución:

(a) Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + x}{x(1+\sqrt{1-x})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(1+\sqrt{1-x})} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(*b*) Transformamos el radicando:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x-2)^2-4+1}-x\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}(x-2-x)\\ &= -2\end{aligned}$$

Ejercicio 8. *Calcular los siguientes límites:*

(*a*) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen} 2x}$ (*b*) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x}$

Solución:

(*a*) Aplicando las aproximaciones $e^x-1\sim x$ y $\operatorname{sen} 2x\sim 2x$ cuando x tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

(*b*) Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicamos la aproximación $u^v\sim e^{(u-1)v}$ válida cuando u tiende a 1 y v a infinito y se obtiene:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x-3}{x+1}-1\right)2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x-3-x-1}{x+1}\,2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-4}{x+1}\,2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-8x}{x}}\\ &= e^{-8}\end{aligned}$$

Ejercicio 9. *Calcular los siguientes límites:*

(*a*) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2}$ (*b*) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$

Solución:

(*a*) Sustituyendo vemos que se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Simplificamos la fracción:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}{x^4+4x^3+4x^2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2(x^2+1)}{(x+2)^2x^2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{5}{4}$$

(*b*) También se trata de una indeterminación $\frac{0}{0}$. Simplificando:

$$\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x-\sqrt{5}}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{1}{x+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Ejercicio 10. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

(a) $y = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$ (b) $y = \dfrac{2x^2+1}{x-3}$

Solución:

(a) La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la curva puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-4} = 0$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical de la curva puesto que:

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x+1}{x^2-4} = \infty$$

También $x = 2$ es asíntota vertical de la curva puesto que:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{x^2-4} = \infty$$

(b) La recta $x = 3$ es asíntota vertical ya que:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2+1}{x-3} = \infty$$

No hay asíntota horizontal pues:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x-3} = \infty$$

Veamos si hay asíntota oblicua. Calculamos los límites:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{2x^2+1}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$
$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x-3} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1-2x^2+6x}{x-3} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{x} = 6$$

Por consiguiente, la recta $y = 2x + 6$ es asíntota de la curva.

2. Otro examen de límites y derivadas

Ejercicio 1. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = (2x^2-1)^2(3x-2)^3$ (b) $y = \dfrac{x+3}{(3x+1)^2}$

Solución:

(a) $y' = 2(2x^2-1)\cdot 4x\cdot(3x-2)^3 + 3(3x-2)^2\cdot 3\cdot(2x^2-1)^2$

(b) $y' = \dfrac{1\cdot(3x+1)^2 - 2(3x+1)\cdot 3(x+3)}{(3x+1)^4}$

Ejercicio 2. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = e^x\cos^2 x$ (b) $y = 2\ln\cos 2x$

Solución:

(a) $y' = e^x\cdot\cos^2 x + 2\cos x\cdot(-\operatorname{sen} x)\cdot e^x$

(b) $y' = 2\cdot\dfrac{1}{\cos 2x}\cdot(-\operatorname{sen} 2x)\cdot 2$

Ejercicio 3. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = \operatorname{artg}\dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

Solución:

(a) $y' = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\cdot\dfrac{-2}{x^3}$

(b) $y' = \dfrac{0-\left(1\sqrt{1-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot x\right)}{x^2(1-x^2)}$

$\frac{40}{3}$ y $\frac{20}{3}$

Ejercicio 4. *Derivar las siguientes funciones:*

(a) $y = \dfrac{x^2e^x}{1-\cos x}$ (b) $y = \cos x^{\sqrt{x}}$

Solución:

(a) $y' = \dfrac{(2xe^x + e^x x^2)(1-\cos x) - x^2e^x\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}$

(b) Escribiendo $y = \cos x^{\sqrt{x}} = \cos e^{\sqrt{x}\ln x}$:

$$y' = -\operatorname{sen} e^{\sqrt{x}\ln x}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{x}\sqrt{x}\right)\right) = -\operatorname{sen} x^{\sqrt{x}}\left(x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{x}\sqrt{x}\right)\right)$$

Ejercicio 5. *Derivar las siguientes funciones y simplificar el resultado:*

(a) $y = \operatorname{sen}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ (b) $y = \operatorname{tg}\ \arccos x$

Solución:

(a) Simplificamos la función:

$$y = \operatorname{sen}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{sen}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

de modo que:

$$y' = 2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

(b) Simplificamos la función:

$$y = \operatorname{tg}\ \arccos x = \frac{\operatorname{sen}\ \arccos x}{\cos\ \arccos x} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\ \arccos x}}{x} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

y la derivada es:

$$y' = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - 1 \cdot \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$$

Ejercicio 6. *Calcular la derivada segunda de las siguientes funciones:*

(a) $y = \dfrac{3x - 1}{x + 1}$ (b) $y = x^3 e^{-x}$

Solución:

(a) Las derivadas son

$$y' = \frac{3(x + 1) - 1 \cdot (3x - 1)}{(x + 1)^2} = \frac{4}{(x + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{0 - 2(x + 1) \cdot 4}{(x + 1)^4} = \frac{-8}{(x + 1)^3}$$

(b) Del mismo modo:

$$y' = 3x^2 e^{-x} + e^{-x}(-1)x^3 = e^{-x}\left(3x^2 - x^3\right)$$

$$y'' = e^{-x}(-1)(3x^2 - x^3) + (6x - 3x^2)e^{-x}$$

Ejercicio 7. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} - x\right)$

Solución:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)(x-5)}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}==\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})(\sqrt{x}-\sqrt{5})}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=20\sqrt{5}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x-2)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}(x-2-x)=-2$

Ejercicio 8. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen}^2 x}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}$

Solución:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}$

(b) Es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la aproximación $u^v\sim e^{(u-1)v}$ resulta:

$$D\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6x}{x^2}}=e^0=1$$

Ejercicio 9. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$

Solución:

(a) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Simplificamos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2-5x+3)}{(x-1)(x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3(x+3)}{(x-1)^3(x+1)}=2$$

(b) También es del tipo $\frac{0}{0}$. Simplificamos la fracción:

$$\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{x-\sqrt{5}}{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Ejercicio 10. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

(a) $y=\dfrac{3x+1}{x^2-1}$ $\qquad$ (b) $y=\dfrac{2x^2+1}{2x-3}$

Solución:

(a) La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la curva puesto que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x^2-1}=0$$

Las rectas $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales de la curva puesto que:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x+1}{x^2-1}=\infty,\qquad \lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{x^2-1}=\infty$$

(b) La recta $x = \frac{3}{2}$ es asíntota vertical ya que:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{2x^2+1}{2x-3} = \infty$$

No hay asíntota horizontal pues:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{2x-3} = \infty$$

Veamos si hay asíntota oblicua. Calculamos los límites:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{2x^2+1}{2x-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x-3} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+1-2x^2+3x}{2x-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

Por consiguiente, la recta $y = x + \frac{3}{2}$ es asíntota de la curva.

---

3. Derivadas

Ejercicio 1. *Dada la función $f(x) = \ln(x^2+4x-5)$, se pide estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.*

Solución:

El dominio de la función es $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5}$$

El numerador se anula en $x = -2$ y el denominador para $x = -5$ y $x = 1$. El esquema de signos es el siguiente:

	-5		-2		1	
$-$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$+$

La función es decreciente en $(-\infty, -5)$ y creciente en $(1, \infty)$.

Ejercicio 2. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-20}{x+5}$$

Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

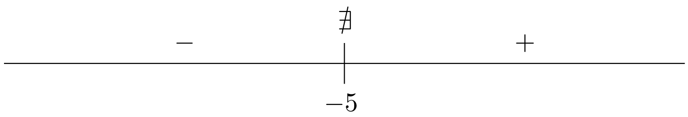
Solución:

Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(6x+5)(x+5)-(3x^2+5x-20)}{(x+5)^2} \\
&= \frac{3x^2+30x+45}{(x+5)^2} \\
&= \frac{3(x^2+10x+15)}{(x+5)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 3\cdot\frac{(2x+10)(x+5)^2-2(x+5)(x^2+10x+15)}{(x+5)^4} \\
&= 3\cdot\frac{(2x+10)(x+5)-2(x^2+10x+15)}{(x+5)^3} \\
&= \frac{60}{(x+5)^3}
\end{aligned}$$

El numerador no tiene raíces y el denominador se anula para $x=-5$. El esquema de signos para la derivada segunda es el siguiente:



La función es convexa en $(-\infty,-5)$ y cóncava en $(-5,\infty)$. No hay puntos de inflexión.

Ejercicio 3. *Demostrar que la ecuación $4x^5+3x+1=0$ solo tiene una raíz real. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función $f(x)=4x^5+3x+1$ se anula en un único punto.

- La función se anula en algún punto. En efecto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y además:

  $$\begin{aligned} f(-1) &= -6<0 \\ f(0) &= 1>0 \end{aligned}$$

  Por el teorema de Bolzano existe un punto $\xi\in(-1,0)$ tal que $f(\xi)=0$. Este número es una solución de la ecuación.

- La solución es única. En efecto, $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Su derivada es:

  $$f'(x)=20x^4+3>0$$

  Por el teorema de Rolle entre dos ceros de la función debería haber al menos un cero de la derivada. Puesto que la derivada nunca se anula, no puede haber dos ceros de la función.

Ejercicio 4. *Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las dos condiciones siguientes:*

1. *Tiene extremos relativos en los puntos de abscisas $x=-\frac{1}{3}$, $x=-1$.*

2. *La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ es $y=x+3$.*

Solución:

La derivada de la función es:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

En los extremos relativos la derivada es cero. Entonces:

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{1}{9}-\frac{2}{3}a+b=\frac{1}{3}-\frac{2a}{3}+b$$
$$f'(-1)=3-2a+b$$

Estas derivadas deben ser cero. Tenemos el sistema:

$$\begin{cases}1-2a+3b=0\\3-2a+b=0\end{cases}$$

cuya solución es $a=2$ y $b=1$.

La otra condición nos dice que $f'(0)=1$ y $f(0)=3$. El dato sobre la derivada es redundante pues, sustituyendo en la derivada nos da $b=1$ que ya habíamos calculado. El segundo dato nos permite calcular $c=3$.

Ejercicio 5. *Dada la función:*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x}{x-1} & x<0\\ a & x=0\\ e^{-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$$

se pide:

a) *Determinar el valor de a para que f sea continua en $x=0$.*

b) *Para ese valor de a estudiar la derivabilidad de f en $x=0$.*

Solución:

a) Para que la función sea continua los límites por la izquierda y por la derecha deben ser iguales al valor de la función a. Calculemos esos límites:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{2x^2+3x}{x-1}=0$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=0$$

Por consiguiente, para que la función sea continua debe cumplirse $a=0$.

b) La derivada de la función es:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-4x-3}{(x-1)^2} & x<0\\ e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right) & x>0\end{cases}$$

La derivada por la izquierda $f'(0^-) = 3$. La función $e^{-\frac{1}{x}}$ no es derivable en $x = 0$. Para calcular la derivada en ese punto podemos utilizar dos procedimientos. Bien calcular el límite de su derivada cuando x tiende a 0 o bien calcularla a partir de la definición:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

Las derivadas por la izquierda y por la derecha no coinciden. La función no es derivable en $x = 0$.

Ejercicio 6. *Obtener el valor de a para que:*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} = 4$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \right)^{ax^2} &= \lim_{x \to \infty} e^{\left(\frac{x^2-3}{x^2+3} - 1\right) ax^2} \\
&= \lim_{x \to \infty} e^{\left(\frac{x^2-3-x^2-3}{x^2+3}\right) ax^2} \\
&= \lim_{x \to \infty} e^{\left(\frac{-6ax^2}{x^2+3}\right)} \\
&= e^{-6a}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$e^{-6a} = 4 \quad \Longrightarrow \quad -6a = \ln 4 \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{6} \ln 4$$

Ejercicio 7. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) *Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.*

b) *Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.*

Solución:

a) Para $x \neq 0$ la función es continua.

Para que sea continua en cero deben coincidir los límites laterales y, además, ser iguales al valor de la función en 0, es decir, a k. Calculemos los límites laterales:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2^x}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2^x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2^x}\cdot\frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sqrt{x}}{2^x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} (x+k)\\
&= k
\end{aligned}$$

Para que la función sea continua debe ser $k=0$.

b) Sustituyendo en la expresión de $f(x)$ obtenemos $f(1)=0$. El punto de tangencia es $(1,0)$. La pendiente de la tangente la obtenemos a partir de la derivada:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{1}{x}\sqrt{x}\right)2^x-2^x\ln 2\sqrt{x}\ln x}{2^{2x}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{1}{x}\sqrt{x}-\ln 2\sqrt{x}\ln x}{2^x}$$

La pendiente es:

$$m=f'(1)=\frac{1}{2}$$

y la ecuación de la tangente:

$$y=\frac{1}{2}(x-1)$$

---

4. Nuevo examen de derivadas

Ejercicio 1. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x-1)}\right)$

Solución:

(a) Se trata de una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de l'Hopital y la aproximación $\operatorname{sen} x \sim x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{1\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x\operatorname{sen} x}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{3x^2} \\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(b) Se trata de una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Hacemos la resta, cambiamos $x-1=t$ y resulta:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x-1)}\right) &= \lim_{x\to 1} \frac{x\operatorname{sen}(x-1) - \ln x}{\operatorname{sen}(x-1)\ln x} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(t+1)\operatorname{sen} t - \ln(1+t)}{\operatorname{sen} t \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(t+1)\operatorname{sen} t - \ln(1+t)}{t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1\operatorname{sen} t + (t+1)\cos t - \frac{1}{1+t}}{2t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\cos t + 1\cos t - (t+1)\operatorname{sen} t + \frac{1}{(1+t)^2}}{2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Dada la función $y = xe^{-x}$ calcular sus asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y representarla gráficamente.*

Solución:

No tiene asíntotas verticales. Para obtener las asíntotas horizontales calculamos los límites:

$$\lim_{x\to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $+\infty$. No hay asíntota en $-\infty$.

Calculamos la derivada:

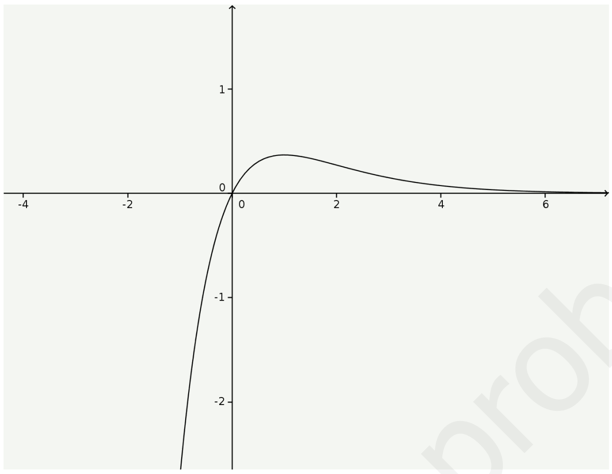
$$y' = 1e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

El signo de la derivada es:

	1	
$+$	0	$-$

La función es creciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$. Hay un máximo en el punto $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

Con estos datos, la gráfica de la función es:



Ejercicio 3. *Calcular los intervalos de concavidad y convexidad de la función:*

$$y = \frac{x}{\ln x}$$

Solución:

Hay que analizar el signo de la segunda derivada:

$$y' = \frac{1 \ln x - \frac{1}{x} x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2 - 2\ln x \frac{1}{x}(\ln x - 1)}{(\ln x)^4} \\ &= \frac{\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}(\ln x - 1)}{(\ln x)^3} \\ &= \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} \end{aligned}$$

El numerador se anula para $x = e^2$ y el denominador para $x = 0$ y $x = 1$. Teniendo en cuenta que la función solo existe para valores positivos de x, el signo de la segunda derivada está dada por el siguiente esquema:

0		1		e^2	
$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

La función es convexa en $(0,1)\cup(e^2,\infty)$, es cóncava en $(1,e^2)$ y tiene un punto de inflexión en $x=e^2$.

Ejercicio 4. *Calcular las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:*

$$y=\frac{x}{x^2-x+4}$$

Solución:

La curva no tiene asíntotas verticales puesto que el denominador no tiene raíces. Hay uan asíntota horizontal $y=0$.

Calculamos la derivada:

$$y'=\frac{x^2-x+4-(2x-1)x}{(x^2-x+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2-x+4)^2}$$

Los ceros de la derivada son -2 y 2. El signo de la derivada es:

$-$	0	$+$	0	$-$
	-2		2	

La función es decreciente en $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ y creciente en $(-2,2)$. Hay un mínimo en $x=-2$ y un máximo en $x=2$.

Ejercicio 5. *Obtener los valores de a y b para que la función $f(x)=x^3+ax^2+b$ tenga un mínimo relativo en el punto $(2,3)$.*

Solución:

De acuerdo con las condiciones dadas debe ocurrir que $f(2)=3$ y $f'(2)=0$. La derivada es:

$$f'(x)=3x^2+2ax$$

Por consiguiente:

$$\begin{cases}3=8+4a+b\\0=12+4a\end{cases}$$

este sistema tiene como solución $a=-3,\ b=7$.

Ejercicio 6. *Hallar el punto de la parábola $y=x^2+x$ que se encuentra más próximo de $A(1,0)$.*

Solución:

Se trata de encontrar un punto $X(x,x^2+x)$ cuya distancia a $A(1,0)$ sea mínima. El cuadrado de la distancia entre los dos puntos es:

$$d^2=(x-1)^2+(x^2+x)^2=x^4+2x^3+2x^2-2x+1$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$(d^2)'=4x^3+6x^2+4x-2=0$$

esta ecuación no tiene soluciones enteras. Puesto que en $x = 0$ toma un valor negativo y en $x = 1$ toma un valor positivo, podemos decir que el mínimo se encuentra en el intervalo $(0, 1)$.

Ejercicio 7. *Demostrar que la función* $y = e^x - x - 3$ *tiene un único cero en el intervalo* $(0, \infty)$.

Solución:

La función $F(x) = e^x - x - 3$ es continua para todo x. Además:

$$F(0) < 0$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$$

y por consiguiente $F(x)$ toma valores positivos entre 0 e ∞. Por el teorema de Bolzano debe existir un punto en que la función se haga cero.

Veamos que este punto es único. La función es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = e^x - 1$$

que solo se anula en $x = 0$. De acuerdo con el teorema de Rolle si hubiese dos ceros de la función, entre ellos debería haber al menos un cero de la derivada. Como la derivada no se anula en $(0, \infty)$ no puede haber dos ceros de la función.

Ejercicio 8. Solución:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + b(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a *y* b *es continua la función? ¿Para cuáles es derivable?*

Solución:

Para $x \neq 1$ la función es continua y derivable.

Para que la función sea continua en $x = 1$ deben coincidir los límites por la derecha y por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ax^2 + b(x-1) = a$$

Por tanto, la función será continua si $a = 3$ sea cual sea el valor de b.

Para que la función sea derivable debe ser continua. Por consiguiente debe ser $a = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 + b(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La derivada de esta función para $x \neq 1$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 1 \\ 6x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable, habrán de coincidir las derivadas por la izquierda y por la derecha:

$$f'(1^-) = 3$$

$$f'(1^+) = 6 + b$$

Para que sea derivable debe ser $b = -3$.

Ejercicio 9. *Hallar el punto de la curva $y = \ln(1 + x^2)$ en que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa* 1.

Solución:

Para que las tangentes sean perpendiculares, el producto de sus pendientes debe ser igual a -1. Por tanto, el producto de las derivadas en $x = 1$ y en el punto que buscamos a debe ser igual a -1.

La derivada de la función es:

$$y' = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Entonces:

$$y'(1)y'(a) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2 \cdot 1}{1 + 1^2} \cdot \frac{2a}{1 + a^2} = -1 \quad \Longrightarrow \quad -1 = \frac{2a}{1 + a^2} \quad \Longrightarrow \quad a = -1$$

Ejercicio 10. *Calcular las asíntotas de la curva $y = xe^{\frac{1}{x}}$.*

Solución:

La posible asíntota vertical es $x = 0$. Estudiemos los límites en ese punto:

$$\lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

Hay una asíntota vertical $x = 0$ por la derecha. En ese punto por la izquierda hay una discontinuidad evitable.

No hay asíntota horizontal pues:

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

Veamos si hay asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \to \infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) \\ &= \lim_{x \to \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

Los límites cuando x tiende a $-\infty$ son los mismos. Por consiguiente hay una asíntota oblicua $y = x + 1$ tanto en $-\infty$ como en $+\infty$.

---

5. Otro examen (fácil) de derivadas

Ejercicio 1. *Una hoja de papel debe contener* $18\ \text{cm}^2$ *de texto impreso, márgenes superior e inferior de* 2 cm *y márgenes laterales de* 1 cm. *Obtener las dimensiones que minimizan la superficie de papel.*

Solución:

Sean x e y la base y la altura de la hoja. La función que debe ser mínima es:

$$S = xy$$

Por otra parte, puesto que el texto debe ocupar una superficie de $18\ \text{cm}^2$:

$$(x-2)(y-4) = 18 \quad \Longrightarrow \quad y = 4 + \frac{18}{x-2}$$

de forma que:

$$S = x\left(4 + \frac{18}{x-2}\right) = 4x + \frac{18x}{x-2}$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = 4 + \frac{18(x-2) - 18x}{(x-2)^2} = 4 - \frac{36}{(x-2)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 5$$

Y a partir de este resultado obtenemos $y = 10$.

Ejercicio 2. *Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $y = x^2e^x$.

Solución:

Derivamos:

$$y' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2)$$

Los ceros de la derivada son $x = 0$ y $x = -2$. Tenemos el siguiente esquema de signos:

$$\begin{array}{ccccc} + & 0 & - & 0 & + \\ \hline & -2 & & 0 & \end{array}$$

La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decreciente en $(-2, 0)$. En $x = -2$ hay un máximo y en $x = 0$ un mínimo local.

Ejercicio 3. *Calcular* b *y* c *para que la curva* $y = -x^2 + bx + c$ *tenga un máximo relativo en el punto* $(0, 4)$.

Solución:

Debe ocurrir que $y(0) = 4$ y que $y'(0) = 0$. Con estas condiciones resulta $c = 4$ y $b = 0$.

Ejercicio 4. *Estudia la concavidad y convexidad de la curva* $y = x(x-1)^3$.

Solución:

Calculamos la derivada segunda:

$$y' = 1 \cdot (x-1)^3 + x \cdot 3(x-1)^2 = (x-1)^2(x-1+3x) = (x-1)^2(4x-1)$$
$$y'' = 4 \cdot (x-1)^2 + 2(x-1) \cdot (4x-1) = 2(x-1)[2(x-1) + 4x - 1] = 2(x-1)(6x-3)$$

La derivada segunda se anula en $x = 1$ y $x = \frac{1}{2}$. El esquema de signos es el siguiente:

+	0	−	0	+
	$\frac{1}{2}$		1	

La función es cóncava en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y en $(1, \infty)$. Es convexa en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Hay puntos de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ y en $x = 1$.

Ejercicio 5. *Estudiar si la función* $y = x^2 - 2x + 3$ *cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo* $[1, 3]$. *En caso afirmativo, calcular el valor de* x *cuya existencia asegura el teorema.*

Solución:

La función es continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$. Cumple por tanto las hipótesis del teorema del valo medio. De acuerdo con este teorema existe ξ tal que:

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

Debemos encontrar cuánto vale ξ. Derivamos e igualamos a 2:

$$y' = 2x - 2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Existe un solo punto en el que la derivada de la función es 2. Este punto es $\xi = 2$.

Ejercicio 6. *Calcular los siguientes límites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (x^2 - 2x)^{x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{1(e^x-1)+xe^x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(x^2-2x)^{x^2} &= \lim_{x\to 0} e^{x^2\ln(x^2+2x)}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(x^2+2x)}{\frac{1}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{2x+2}{x^2+2x}}{\frac{-2}{x^3}}}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{2x^4+2x^3}{-2x^3-4x}}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{2x^3+2x^2}{-2x^2-4}}\\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

---

6. Y otro examen de derivadas

Ejercicio 1. *Se considera la función:*

$$f(x) = ae^{x^2+bx+c}\ ; \qquad a>0$$

Calcular los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un mínimo relativo en el punto $(1,a)$ y $f(0)=1$.

Solución:

La derivada de la función es:

$$y' = ae^{x^2+b+c}(2x+b)$$

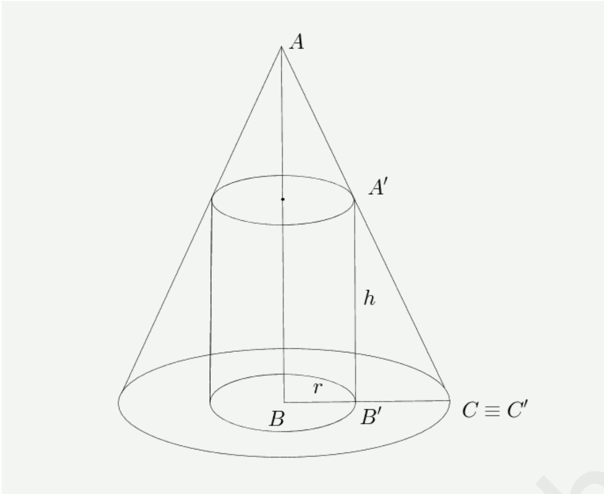
Las condiciones que nos dan son $f(1)=a$, $f'(1)=0$ y $f(0)=1$ además de que $a>0$. Con estas condiciones planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}
ae^{1+b+c}=a \quad\Longrightarrow\quad e^{1+b+c}=1 \quad\Longrightarrow\quad 1+b+c=0\\
ae^{1+b+c}(2+b)=0 \quad\Longrightarrow\quad 2+b=0 \quad\Longrightarrow\quad b=-2\\
ae^c=1
\end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce que $c=1$ y de la tercera que $a=\frac{1}{e}$.

Ejercicio 2. *Hallar el cilindro de máximo volumen inscriptible en un cono recto circular de radio* 10 cm *y altura* 20 cm.

Solución:



El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

De la semejanza de los triángulo ABC y $A'B'C'$ se deduce que:

$$\frac{10}{10-r} = \frac{20}{h} \qquad \Longrightarrow \qquad h = \frac{20(10-r)}{10} = 2(10-r)$$

Entonces:

$$V = 2\pi r^2(10-r) = 2\pi(10r^2 - r^3)$$

Derivando e igualando a cero:

$$V' = 2\pi(20r - 3r^2) = 2\pi r(20-3r) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r = \frac{20}{3}$$

y la altura:

$$h = 2\left(10 - \frac{20}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

Ejercicio 3. *Se considera la función:*

$$y = \frac{x}{x^2+5x+4}$$

Calcular las intersecciones con los ejes, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y representarla gráficamente.

Solución:

◇ Las intersecciones con los ejes son la solución de los sistemas:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{x^2+5x+4} \\ x = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y = \dfrac{x}{x^2+5x+4} \\ y = 0 \end{cases}$$

En este caso hay un solo punto de intersección $(0,0)$.

El denominador de la fracción se anula para $x=-1$ y $x=-4$. Éstas son las asíntotas verticales de la función. La asíntota horizontal es $y=0$ puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+5x+4} = 0$$

- Calculemos la derivada de la función:

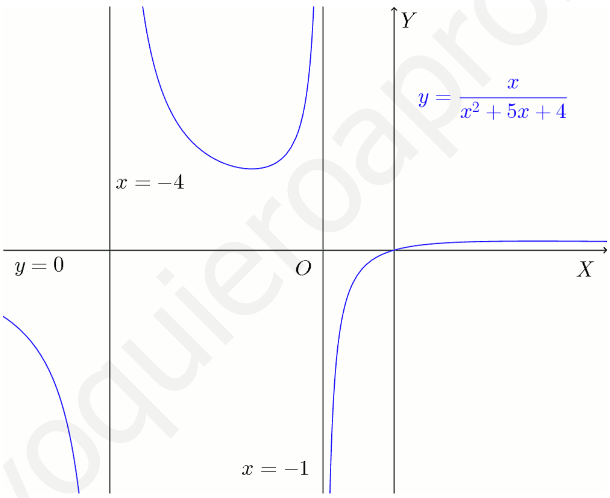
$$y' = \frac{1\cdot(x^2+5x+4) - x\cdot(2x+5)}{(x^2+5x+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+5x+4)^2}$$

La derivada se anula para $x=-2$ y $x=2$. Tenemos el siguiente esquema de signos:

y'	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
x		-4		-2		-1		2	

Es decir, La función es creciente en $(-2,-1)\cup(-1,2)$ y decreciente en $(-\infty,-4)\cup(-4,-2)\cup(2,\infty)$. Tiene un mínimo en $x=-2$ y un máximo en $x=2$.

- La gráfica de esta función aparece en la siguiente figura:



Ejercicio 4. *Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-3x^2$ en su punto de inflexión.*

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$y' = 3x^2 - 6x$$
$$y'' = 6x - 6$$

El punto de inflexión lo calculamos igualando a cero la segunda derivada:

$$6x-6=0 \quad \Longrightarrow \quad x=1$$

El punto de inflexión es $(1,-2)$. La pendiente de la recta tangente en este punto es:

$$m = y'(1) = -3$$

Por consiguiente, la ecuación de la tangente es:

$$y + 2 = -3(x - 1)$$

Ejercicio 5. *Calcular:*

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to 1^+} (x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$$

Solución:

El primer límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hopital y resulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}$$

El segundo es del tipo $0\cdot\infty$. Lo escribimos como fracción y aplicamos la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1^+} (x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{\left(-1-\operatorname{cotg}^2\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} = 0$.

Ejercicio 6. *Razonar si es aplicable el teorema del valor medio a la función*

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

en el intervalo $[0, e]$*. En caso afirmativo, hallar el valor de* x *al que se refiere el teorema.*

Solución:

Para que se pueda aplicar el teorema del valor medio, la función debe ser continua en el intervalo cerrado $[0, e]$ y derivable en el intervalo abierto $(0, e)$. La condición de derivabilidad se cumple puesto que en ese intervalo la función es producto de funciones derivables. Su derivada es:

$$f'(x) = 1\cdot\ln x + \frac{1}{x}\,x = 1 + \ln x$$

Salvo en $x = 0$ la función es continua en $[0, e]$ por ser producto de funciones continuas. Veamos que ocurre en $x = 0$. En este punto el límite de la función es una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$ que podemos resolver con ayuda de la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Puesto que el límite coincide con el valor de la función, ésta es continua también en $x = 0$. Entonces, podemos aplicar el teorema del valor medio a la función. Según este teorema debe existir un punto ξ tal que:

$$f'(\xi) = \frac{f(e) - f(0)}{e - 0}$$

Es decir:

$$1 + \ln\xi = \frac{e-0}{e} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \ln\xi = 0 \quad\Longrightarrow\quad \xi = 1$$

---

7. Integrales

Ejercicio 1. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[4]{2x+1}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 3x}\,\mathrm{d}x$

Solución:

- $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[4]{2x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\int (2x+1)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{(2x+1)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\,\frac{1}{2} + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,3x + C$

Ejercicio 2. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x-3}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

Solución:

- Haciendo la división se obtiene cociente 1 y resto 6, así que
$$\int \frac{x+3}{x-3}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{6}{x-3}\right)\,\mathrm{d}x = x + 6\ln(x-3) + C$$
- Por partes:
$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x$$
$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}\,2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{1}{4}\,\cos 2x + C$$

Ejercicio 3. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Solución:

- Mediante la fórmula trigonométrica $\mathrm{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$:
$$\int \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x + C$$
- Haciendo la división se obtiene de cociente x y de resto $-x$. Entonces:
$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Ejercicio 4. *Calcular las siguientes integrales:*

$(a)\ \displaystyle\int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $(b)\ \displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

Solución:

- ⋄ Descomponiendo en fracciones simples se obtiene:

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \quad\Longrightarrow\quad A=3,\quad B=-1$$

Entonces:

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = 3\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C$$

- ⋄ Con el cambio $e^x = t,\quad e^x\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t$ resulta:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Ahora hay que hacer el cambio $t = \operatorname{tg} u,\quad \mathrm{d}t = \sec^2 u\,\mathrm{d}u$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}\sec^2 u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\sec u}\sec^2 u\,\mathrm{d}u = \int \sec u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\cos u}\,\mathrm{d}u$$

Con el cambio $v = \operatorname{sen} u.\quad \mathrm{d}v = \cos u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\int \sec u\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{\cos u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \frac{1}{\cos u}\frac{1}{\cos u}\,\mathrm{d}v = \int \frac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}v \\
&= \int \frac{1}{1-v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+v}\,\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-v}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+v) - \frac{1}{2}\ln(1-v) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v} + C
\end{aligned}$$

y solo queda deshacer los cambios.

Ejercicio 5. *Calcular las siguientes integrales:*

$(a)\ \displaystyle\int x\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $(b)\ \displaystyle\int \frac{2+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

Solución:

- ⋄ Hacemos el cambio $2x+1 = t^2,\quad 2\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{1}{2}(t^2-1),\quad \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}(t^2-1)\cdot t\cdot t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (t^4-t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{(2x+1)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

- ⋄ Es casi inmediata:

$$\int \frac{2+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int (2+\ln x)\,\mathrm{d}(2+\ln x) = \frac{(2+\ln x)^2}{2} + C$$

Ejercicio 6. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int xe^{2x^2+5}\,\mathrm{d}x$

Solución:

- ⋄ Puesto que el denominador no tiene raíces, hacemos la descomposición:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = c_1\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x + c_2\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$$

Igualando coeficientes se obtiene $c_1 = \frac{3}{2}$ y $c_2 = 4$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x &= c_1\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x + c_2\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5) + 4\int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5) + 4\,\frac{1}{2}\,\mathrm{artg}\,\frac{x-1}{2} + C\end{aligned}$$

- ⋄ Con el cambio de variable $t = 2x^2+5$, $\quad \mathrm{d}t = 4x\,\mathrm{d}x$, $\quad x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t$:

$$\int xe^{2x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}e^t + C = \frac{1}{4}e^{2x^2+5} + C$$

Ejercicio 7. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{28-12x-x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+4)^3}\,\mathrm{d}x$

Solución:

- ⋄ Escribiendo $28-12x-x^2 = 8^2-(x+6)^2$ resulta:

$$\int \frac{1}{\sqrt{28-12x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{8^2-(x+6)^2}}\,\mathrm{d}x = \ \mathrm{arsen}\,\frac{x+6}{8} + C$$

- ⋄ Es casi inmediata:

$$\int \frac{x}{(x^2+4)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+4)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (x^2+4)^{-3}\,\mathrm{d}(x^2+4) = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+4)^{-2}}{-2} + C$$

Ejercicio 8. *Calcular las siguientes integrales:*

(a) $\displaystyle\int x\sec^2 x^2\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \cos^4 x\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x$

Solución:

- ⋄ Con el cambio $x^2 = t$, $\quad 2x\,\mathrm{d}x = \ \mathrm{d}t$, $\quad x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$:

$$\int x\sec^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sec^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,t + C = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,x^2 + C$$

◇ Es casi inmediata:

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -\int \cos^4 x \, \mathrm{d}(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$$

Ejercicio 9. *Calcular el área comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.*

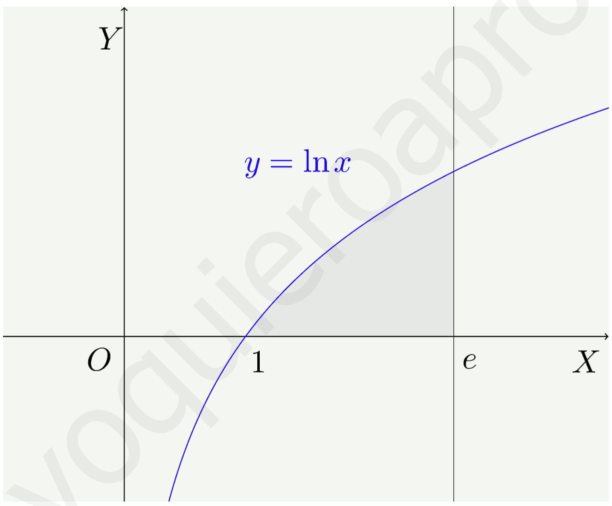
Solución:

Los puntos de corte están en $x = -2$ y $x = 2$. El área es:

$$S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) \, \mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

Ejercicio 10. *Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = \ln x$, el eje OX y la recta $x = e$.*

Solución:



$$S = \int_{1}^{e} \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln x - x \Big]_{1}^{e} = e \ln e - e - (1 \ln 1 - 1) = 1$$

---

8. Calculo. Selectividad.

Ejercicio 1. *Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:*

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ *el logaritmo neperiano de* x*.*

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,x = (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x(\ln x + 2)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}(\ln x + 2) + \frac{1}{x}\ln x = \frac{2\ln x + 2}{x}$$

La primera derivada se anula en $x = e^{-2}$ y en $x = 1$. El signo de la derivada se representa en el siguiente esquema:

	0		e^{-2}		1	
$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

De manera que hay un máximo en $x = e^{-2}$ y un mínimo en $x = 1$.

En cuanto a la derivada segunda, el esquema de signos es como sigue:

	0		e^{-1}	
$\nexists$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Hay un punto de inflexión en $x = e^{-1}$.

Ejercicio 2. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) *Determinar el valor de* k *para que la función sea continua en* $\mathbb{R}$*.*

(b) *Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.*

(c) *Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto del abscisa* $x = 1$*.*

Solución:

(a) Para que sea continua los límites laterales en $x = 0$ deben ser iguales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x}$$

y puesto que el denominador tiende a 1:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} == \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} -2x^{\frac{1}{2}} = 0$$

El límite por la izquierda vale:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x + k = k$$

Por consiguiente, para que $f(x)$ sea continua, debe ser $k = 0$.

(b) La función corta a los ejes en $(0,0)$ y $(1,0)$.

(c) El punto de tangencia es $(1,0)$. Para calcular la pendiente, obtenemos primero la derivada:

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{x}\sqrt{x})2^x - 2^x\ln 2\sqrt{x}\ln x}{2^{2x}}$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

y la ecuación de la tangente es $y = \frac{1}{2}(x-1)$.

Ejercicio 3. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x+5}$$

se pide:

(a) *Estudiar y obtener las asíntotas.*

(b) *Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.*

(c) *Representar gráficamente la función.*

Solución:

(a) Hay una asíntota vertical $x = -5$ y una asíntota oblicua (puede obtenerse por división) $y = 3x - 10$.

(b) Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = \frac{(6x+5)(x+5) - (3x^2+5x-20)}{(x+5)^2} = \frac{3x^2+30x+45}{(x+5)^2} = 3\cdot\frac{x^2+10x+15}{(x+5)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3\cdot\frac{(2x+10)(x+5)^2 - 2(x+5)(x^2+10x+15)}{(x+5)^4} \\ &= 3\cdot\frac{(2x+10)(x+5) - 2(x^2+10x+15)}{(x+5)^3} \\ &= \frac{60}{(x+5)^3} \end{aligned}$$

De aquí que la función sea convexa en $(-\infty,-5)$ y cóncava en $(-5,\infty)$.

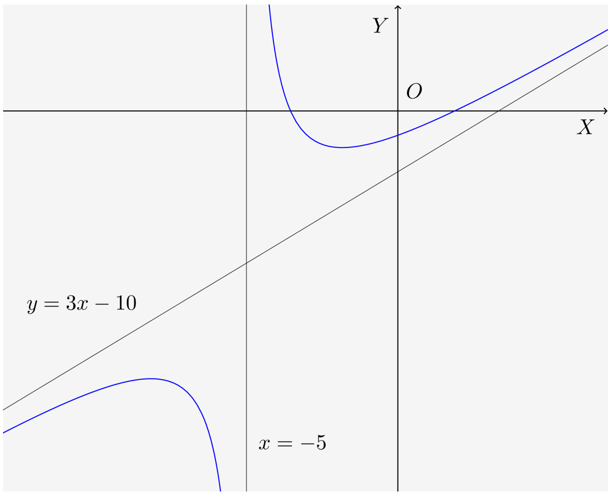


Figura 1: Ejercicio 3

(c) Ver figura 1.

Ejercicio 4. *Hallar:*

(a) $\displaystyle\int_{14}^{16} (x-15)^8 \, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{9}^{11} (x-10)^{19}(x-9) \, \mathrm{d}x$

Solución:

(a) Es inmediata:

$$\int_{14}^{16} (x-15)^8 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{(x-15)^9}{9}\right]_{14}^{16} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

(b) Por partes:

$$u = x - 9 \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = (x-10)^{19} \, \mathrm{d}x \qquad v = \frac{(x-10)^{20}}{20}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{9}^{11} (x-10)^{19}(x-9) \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20}\right]_9^{11} - \frac{1}{20}\int_9^{11} (x-10)^{20} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{20}\left[\frac{(x-10)^{21}}{21}\right]_9^{11} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{21} \\
&= \frac{2}{21}
\end{aligned}$$

Ejercicio 5. *Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:*

(a) *El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -\frac{1}{3}$, $x = -1$.*

(b) *La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$.*

Solución:

Las condiciones que nos dan son $P'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$, $P'(-1) = 0$, $P'(0) = 1$ y $P(0) = 3$. La derivada de la función es

$$P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Sustituyendo se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{3}{9} - \frac{2}{3}a + b = 0 \\ 3 - 2a + b = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

que tiene como solución $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$.

Ejercicio 6. *Obtener el valor de a para que:*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} = 4$$

Solución:

Aplicando la aproximación $u^v \sim e^{(u-1)v}$ resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}-1\right)ax^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2-3-x^2-3}{x^2+3}\,ax^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6ax^2}{x^2+3}} \\ &= e^{-6a} \end{aligned}$$

Entonces:

$$e^{-6a} = 4 \quad\Longrightarrow\quad -6a = \ln 4 \quad\Longrightarrow\quad a = -\frac{1}{3}\ln 2$$

Ejercicio 7. *Se considera la función*

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

(a) *¿Es continua en el punto $x = 0$?*

(b) *¿Es derivable en el punto $x = 0$?*

(c) *¿Alcanza algún extremo?*

Solución:

(a) Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x - 1 = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + x = 0$$

Los dos límites son iguales y, además, coinciden con el valor de la función. Por tanto $f(x)$ es continua en cero.

(b) La derivada de la función para $x \neq 0$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Las derivadas laterales son:

$$f'(0^-) = 1$$
$$f'(0^+) = 1$$

La función es derivable en $x = 0$ y su derivada vale 1.

(c) La derivada no se anula en ningún punto. No hay extremos relativos.

Ejercicio 8.

(a) *Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = \frac{1}{e}$ y $x = e$.*

(b) *Calcular el área de dicho recinto.*

(c) *Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX.*

Solución:

(a) (ver figura 2)

(b) Calculamos las integrales:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln x - x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1} = 1 \ln 1 - 1 - \left(\frac{1}{e}(-1) - \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e} - 1$$

$$\int_{1}^{e} \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln x - x\Big]_{1}^{e} = e \ln e - e - (1 \ln 1 - 1) = 1$$

El área es la suma de las valores absolutos de las integrales:

$$S = 2 - \frac{2}{e}$$

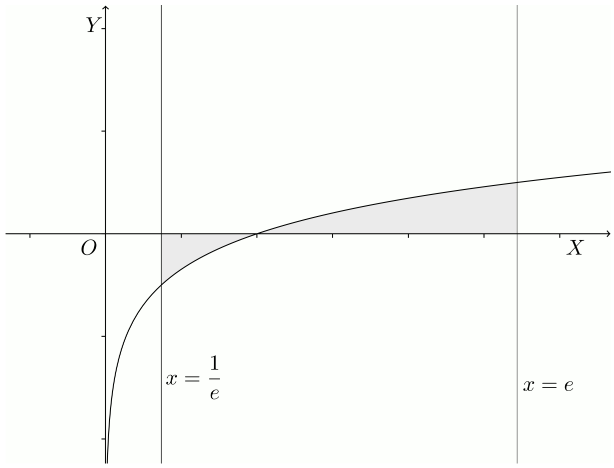


Figura 2: Problema 8

(c) El volumen es:

$$V = \pi \int_{\frac{1}{e}}^{e} (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x$$

Integramos por partes:

$$u = (\ln x)^2 \qquad \mathrm{d}u = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \qquad v = x$$

Entonces:

$$\int (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x \, \mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

y el volumen es

$$V = \pi \Big[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x \Big]_{\frac{1}{e}}^{e} = \pi\,(e - 2e + 2e) - \pi\left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e} + \frac{2}{e}\right) = \pi\left(e - \frac{5}{e}\right)$$

9. Matrices y sistemas

Ejercicio 1. *De las siguientes afirmaciones señalar las que sean verdaderas:*

1. *Si se intercambian dos filas de un determinante, el valor del determinante no cambia.*
2. *El determinante de la matriz unidad es igual al orden del determinante.*
3. *Si* A *es una matriz* 4×2 *y* B *es* 3×4 *podemos hacer el producto* BA.
4. *Si una matriz* 3×3 *tiene rango 2, su determinante es cero.*
5. *Si en una matriz* 3×4 *la segunda fila es combinación lineal de la primera y la tercera, las tres primeras columnas son linealmente dependientes.*
6. *Si multiplicamos una matriz por su inversa, el resultado es la matriz cero.*
7. *Si se multiplica una fila de un determinante por* 3, *el determinante queda multiplicado por* 3.
8. *En algunas matrices* 4×3, *las cuatro filas son independientes.*

Solución:

Son verdaderas las afirmaciones 3, 4, 5 y 7.

Ejercicio 2. *Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:*

1. *En un sistema compatible indeterminado el rango de la matriz ampliada es mayor que el rango de la matriz de coeficientes.*
2. *Los sistemas de Cramer son siempre compatibles.*
3. *Si el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas el sistema es indeterminado.*
4. *Si el rango de la matriz ampliada es menor que el de la matriz de coeficientes, el sistema es incompatible.*
5. *Los sistemas de Cramer tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.*
6. *Para que un sistema sea compatible las matrices de coeficientes y ampliada deben tener el mismo rango.*
7. *En un sistema incompatible el rango de la matriz ampliada es mayor que el número de incógnitas.*
8. *Si se intenta resolver por la regla de Cramer un sistema indeterminado con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, todos los determinantes resultan ser cero.*

Solución:

Son verdaderas las afirmaciones 2, 4, 5, 6 y 8.

Ejercicio 3. *Calcular el determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ 9 & -8 & 8 & -5 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ 9 & -8 & 8 & -5 \end{vmatrix} \underset{F_1 \to F_1 + 3F_2}{=} \begin{vmatrix} -10 & 0 & 24 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ 9 & -8 & 8 & -5 \end{vmatrix} \underset{F_4 \to F_4 + 8F_2}{=} \begin{vmatrix} -10 & 0 & 24 & 2 \\ -4 & 1 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \\ -23 & 0 & 88 & -5 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la segunda columna, el determinante es igual a:

$$\begin{vmatrix} -10 & 24 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -23 & 88 & -5 \end{vmatrix} = 400$$

Ejercicio 4. *Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Teniendo en cuenta que $B = 2A$ la ecuación se puede escribir:

$$XA^2 + BA = A^2$$
$$XA^2 + 2A^2 = A^2$$
$$XA^2 = -A^2$$

Puesto que el determinante de A es distinto de cero, podemos multiplicar por la derecha por la inversa de A y obtenemos:

$$X = -I = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5. *Calcula los valores de a para los que la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & a \\ a & -1 & -2 \\ a & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

no tiene inversa. Calcula la inversa de esta matriz para $a = 0$.

Solución:

- ◇ La matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero, es decir cuando se cumple que:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  Calculando el determinante, esta ecuación se reduce a:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 4a^2 - 9a + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

  Por consiguiente, la matriz inversa no existe para $a = 1$ y $a = \frac{5}{4}$

◇ Para $a = 0$ la matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculemos la inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5; \qquad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. *Se considera el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} (m+2)x + (m-1)y - z &= 3 \\ mx - \quad y + z &= 2 \\ x + \quad my - z &= 1 \end{aligned}$$

(a) *Discutirlo para los distintos valores de m.*

(b) *Resolverlo para $m = 1$.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m = m(-m-1)$$

El determinante se hace cero para $m = 0$ y $m = -1$. Pueden distinguirse los siguientes casos:

◇ $m \neq 0$ y $m \neq -1$. En este caso el rango de las dos matrices, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, es igual a 3. El sistema es compatible determinado.

◇ Si $m = 0$ el rango de las matrices es:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se ha suprimido la tercera columna puesto que sabemos que entre las tres primeras sólo hay dos independientes y las dos primeras lo son. Calculamos el determinante de esta matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por consiguiente, el rango de la matriz ampliada A^* es 3, distinto del rango de la matriz A. El sistema es incompatible.

◇ Hacemos lo mismo para $m = -1$:

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde hemos suprimido la tercera columna por la misma razón que en el caso anterior. Calculamos este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3 mayor que el rango de la matriz de coeficientes. El sistema es incompatible.

Vamos a resolver ahora el sistema para $m = 1$. El sistema es compatible determinado y podemos aplicar la regla de Cramer. Para $m = 1$ el determinante de la matriz de coeficientes es -2 así que:

$$x = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$z = \frac{1}{-2} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

---

10. Matrices y sistemas

Ejercicio 1. *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

Ponemos ceros en la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & -3 & 0 \\ -5 & -15 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 8 & -3 \\ -5 & -15 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 9 & 0 \\ -5 & -15 & 5 \end{vmatrix} = -45$$

Ejercicio 2. *Calcular el rango de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución:

Comenzamos poniendo ceros en la quinta columna:

$$\text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8\end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 8 & 2 & 6 & 2 & 0 & 12\end{bmatrix}$$

$$= \text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\end{bmatrix} = 2$$

puesto que la tercera y cuarta fila son combinación lineal de la segunda.

Ejercicio 3. *Hallar los valores de k para los cuales la matriz*

$$A = \begin{bmatrix}1 & k & 2\\ k-1 & 1 & 1\\ k-2 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

no posee inversa. Calcular A^{-1} para $k = 0$.

Solución:

No tiene inversa si el determinante es cero:

$$\begin{vmatrix}1 & k & 2\\ k-1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -2\end{vmatrix} = 2k^2 - 9k + 9 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene que la matriz no tiene inversa para $k = 3$ y $k = \frac{3}{2}$.

Para $k = 0$ el determinante de la matriz es $|A| = 9$. Entonces:

$$\text{adj}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ -4 & 3 & 2\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

de modo que:

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & -4 & -2\\ -3 & 3 & -3\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Ejercicio 4. *Estudia la compatibilidad del sistema y resuelve si es posible:*

$$\begin{cases}2x + 3y - z = 3\\ -x - 5y + z = 0\\ 3x + \ \ y - z = 6\end{cases}$$

Solución:

Calculamos el rango de las matrices. Poniendo ceros en la tercera columna:

$$\text{rango}\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 3\\ -1 & -5 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1 & 6\end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

y de aquí vemos que rango $A =$ rango $A^* = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z &= 3 \\ -x - 5y + z &= 0 \end{cases}$$

y $z = t$ como parámetro:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 + t \\ -x - 5y = -t \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se obtiene $x = \frac{15}{7} + \frac{2}{7}t$, $y = -\frac{3}{7} + \frac{1}{7}t$, $z = t$.

Ejercicio 5. *Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro m:*

$$\begin{cases} x + y + z &= m - 1 \\ 2x + y + mz &= m \\ x + my + z &= 1 \end{cases}$$

Solución:

Poniendo ceros en la primera fila, el determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & m-2 \\ 1 & m-1 & 0 \end{vmatrix} = -(m-1)(m-2)$$

Entonces:

- ⋄ Para $m \neq 1$ y $m \neq 2$ el rango de ambas matrices es 3 y el sistema es compatible determinado.
- ⋄ Para $m = 1$:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

  El rango de A es igual a 2 y el de A^* es 3. El sistema es incompatible.

- ⋄ Para $m = 2$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

  El rango de ambas matrices es 2 y el sistema es compatible indeterminado.

Ejercicio 6. *Discutir en función del parámetro a el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ ax + 2z &= 0 \\ 2x - y + az &= 0 \end{cases}$$

Resolverlo para $a = 1$.

Solución:

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6$$

El determinante se anula para $a = -3$ y $a = 2$. Para estos valores el sistema es compatible indeterminado. Para el resto de valores el sistema es compatible determinado y solamente tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.

Para $a = 1$ la solución es la trivial $x = y = z = 0$.

---

11. Otro examen de matrices y sistemas

Ejercicio 1. *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

Ponemos ceros en la primera fila:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 14 & -5 & -2 \\ 2 & 5 & -5 & -2 \\ 4 & 12 & -5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \begin{vmatrix} 14 & -5 & -2 \\ 5 & -5 & -2 \\ 12 & -5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \begin{vmatrix} 14 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 45 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Calcular el rango de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución:

Ponemos ceros en la quinta columna:

$$\begin{aligned}\text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 7\end{bmatrix} &= \text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 8 & 2 & 6 & 2 & 0 & 11\end{bmatrix}\\ &= \text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 8 & 2 & 6 & 2 & 0 & 11\end{bmatrix}\\ &= 3\end{aligned}$$

Ejercicio 3.

(a) *Hallar todas las matrices* $A=\begin{bmatrix}a & a\\ 0 & b\end{bmatrix}$ *distintas de* $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ *tales que* $A^2=A$.

(b) *Para una cualquiera de las matrices calculadas en el apartado anterior calcular:*

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}$$

Solución:

Calculamos A^2:

$$A^2=\begin{bmatrix}a & a\\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & a\\ 0 & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2 & a^2+ab\\ 0 & b^2\end{bmatrix}$$

Puesto que $A^2=A$:

$$\begin{cases}a^2=a\\ a^2+ab=a\\ b^2=b\end{cases}$$

Este sistema tiene dos soluciones $a=1,\ b=0$ y $a=0,\ b=1$. Por consiguiente, las matrices solución son:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ ; \qquad \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Puesto que $A^2=A$, todas las potencias son iguales a A:

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}=10A$$

Para la primera solución:

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}=10A=\begin{bmatrix}10 & 10\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ejercicio 4. *Dado el sistema:*

$$\begin{cases}4x+4\lambda y+2z=2\lambda\\ \lambda x+y-\lambda z=\lambda\\ 4\lambda x+4\lambda y+\lambda z=9\end{cases}$$

se pide:

(*a*) *Discutir el sistema según los valores de* λ.

(*b*) *Resolver el sistema para* $\lambda = -1$.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda \begin{vmatrix} 2 & 2\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda(2 + 4\lambda - 8\lambda^2 - 4 + 8\lambda - 2\lambda^2) = -4\lambda(5\lambda^2 - 6\lambda + 1)$$

El determinante se anula para $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{5}$.

Podemos distinguir los siguientes casos:

- ◇ Para $\lambda \notin \{0, 1, \frac{1}{5}\}$ el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada es 3. El sistema es compatible determinado.
- ◇ Se comprueba fácilmente que para $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ y $\lambda = \frac{1}{5}$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3. El sistema es incompatible

Para $\lambda = -1$ el sistema es compatible determinado. La solución es $x = y = z = -1$.

Ejercicio 5. *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

se pide:

(*a*) *Calcular el rango de* A *según los valores del parámetro* a.

(*b*) *Decir cuándo la matriz* A *es invertible. Calcular la inversa para* $a = 1$.

Solución:

- ◇ Calculamos el determinante de la matriz:

  $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -(a+1)(2a^2 + 2a - 2) = -2(a+1)(a^2 + a - 1)$$

  El determinante se anula para $a = -1$, $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Para estos valores el rango de la matriz es 2. Para todos los demás es 3.

- ◇ El determinante de la matriz es -4. Calculamos la matriz adjunta:

  $$\operatorname{adj} \begin{bmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

  Entonces, la matriz inversa es:

  $$A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. *Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) *Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.*

(b) *Resolverlo para el caso $k = 3$.*

Solución:

- Se trata de un sistema homogéneo. El determinante de la matriz de coeficientes es:

  $$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} = -2k^2 + k + 15$$

  El determinante se anula para $k = 3$ y $k = -\frac{5}{2}$. Para estos valores el sistema es compatible indeterminado. Para el resto de valores es compatible determinado y solo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.

- El sistema es indeterminado. Dos ecuaciones independientes son:

  $$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

  La solución es:

  $$x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} t = 5t$$

  $$y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} t = -4t$$

  $$z = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} t = -7t$$

---

12. Geometría

Ejercicio 1. *Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 2, -1)$ y es paralela a*

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2z = 6 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación de la recta en paramétricas es:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 - \frac{3}{2}\lambda \end{cases}$$

Podemos tomar como vector director:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

y la ecuación de la paralela es:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-3}$$

Ejercicio 2. *Calcular la ecuación del plano que contiene al punto $P(1,2,-1)$ y a la recta:*

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

Solución:

El haz de planos que contiene a la recta es:

$$s(2x - y + z - 3) + t(x + y - z - 6) = 0$$

Puesto que el plano debe pasar por $P(1,2,-1)$:

$$s(2 - 2 - 1 - 3) + t(1 + 2 + 1 - 6) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2s + t = 0$$

Podemos tomar como solución $s = 1$, $t = -2$. Sustituyendo:

$$2x - y + z - 3 - 2x - 2y + 2z + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y - z - 3 = 0$$

Ejercicio 3. *Calcular la proyección del punto $A(4,7,-3)$ sobre el plano $x + 2y - z + 3 = 0$.*

Solución:

La perpendicular al plano por el punto es:

$$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

La intersección de esta recta y el plano es la proyección:

$$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = -3 - \lambda \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

La solución es $P(0,-1,1)$.

Ejercicio 4. *Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:*

$$\frac{x+3}{2} = \frac{x-1}{-2} = \frac{z}{3}$$

y es perpendicular al plano $2x + y + z = 3$.

Solución:

El vector normal del plano y el vector director de la recta dados son vectores directores del plano que nos piden. Entonces, la ecuación de este plano es:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2 & 2 \\ y-1 & -2 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y en forma general $-5x + 4y + 6z - 19 = 0$.

Ejercicio 5. *Determinar la posición relativa de las rectas:*

$$r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

Solución:

La ecuación de la primera recta en paramétricas es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

de modo que un punto de la recta es $P(1, -1, 0)$ y un vector director es:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para la segunda recta un punto es $Q(1, 0, 3)$ y un vector director:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las retas no son paralelas. Para distinguir si se cortan o se cruzan formamos el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}]$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Este determinante es distinto de cero. Por consiguiente, se cruzan.

Ejercicio 6. *Sean los puntos* $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$, $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$. *¿Existe algún valor de* λ *para el que los puntos* A, B *y* C *estén alineados?*

Solución:

El vector $\overrightarrow{AB}$ es:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ -\lambda - 2 \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

y $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Si los puntos están alineados, estos vectores deben tener la misma dirección, es decir:

$$\frac{0}{2-\lambda}=\frac{-2}{\lambda-2}=\frac{2}{-\lambda}$$

Este sistema no tiene solución. No existe ningún valor de λ que haga que los puntos estén alineados.

Ejercicio 7. *Determinar la posición relativa de la recta*

$$x=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{4}$$

y el plano $2x+y-z=0$.

Solución:

El vector director de la recta es:

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

y el vector normal del plano:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Puesto que:

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=2+2-4=0$$

o bien son paralelos o bien la recta está contenida en el plano. Puesto que el punto de la recta $P(0,-1,-1)$ pertenece al plano (cumple su ecuación), la recta está contenida en el plano.

Ejercicio 8. *Halla el ángulo que forman la recta* r *de ecuación*

$$r\colon\begin{cases}x=-z\\y=0\end{cases}$$

con el plano que contiene la recta

$$s\colon -x=y-2=1-z$$

y el punto $A(3,1,6)$.

Solución:

La recta en paramétricas se escribe:

$$\begin{cases}x=-\lambda\\y=0\\z=\lambda\end{cases}$$

de forma que su vector director es:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el vector normal al plano, escribimos la recta s en forma continua:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Un punto de la recta es $B(0,2,1)$ y un vector director:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El vector normal del plano tiene la dirección del producto vectorial $\vec{v} \times \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 3 \\ \vec{j} & 1 & -1 \\ \vec{k} & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El ángulo de la recta y el plano está dado por:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{|2(-1) - 1|}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 60^{\text{o}}$$

---

13. Otro examen de geometría

Ejercicio 1. *Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(-1,0,2)$, $B(3,-2,1)$ y $C(-2,4,-1)$.*

Solución:

Tomemos como vectores directores del plano:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

La ecuación del plano es

$$\begin{vmatrix} x+1 & 4 & -1 \\ y & -2 & 4 \\ z-2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante:

$$10(x+1) + 13y + 14(z-2) = 0$$

Finalmente:

$$10x + 13y + 14z - 18 = 0$$

Ejercicio 2. *Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta:*

$$\begin{cases} x - y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Tomamos $x = 0$ para obtener un punto de la recta:

$$\begin{cases} -y + 3z = 1 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$$

y obtenemos el punto $P(0, -7, -2)$.

Un vector director de la recta es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 2 \\ \vec{\jmath} & -1 & 1 \\ \vec{k} & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -7 + 8t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

Ejercicio 3. *Calcular la ecuación del plano que contiene el punto $P(1, 1, 1)$ y a la recta:*

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

Solución:

Un punto de la recta es $Q(2, 0, -1)$ y su vector director:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Podemos tomar como vectores directores del plano $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PQ}$. La ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & -1 & 1 \\ y - 1 & 3 & -1 \\ z - 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

y en forma general:

$$4 + 2y + z + 7 = 0$$

Ejercicio 4. *Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta:*

$$\frac{x - 2}{3} = y - 2 = \frac{z + 1}{-1}$$

y es perpendicular al plano $2x - 5y + 3z + 2 = 0$.

Solución:

La ecuación en forma de determinante es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 2 \\ y-2 & 1 & -5 \\ z+1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

y en forma general $2x + 11y + 17z - 9 = 0$.

Ejercicio 5. *Sean las rectas:*

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \qquad s: \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s

Solución:

La ecuación en forma de determinante es

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z-2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

y en forma general $-3x + 5y + 4z - 13 = 0$.

Ejercicio 6. *Se consideran la recta y los planos siguientes:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 \; ; \quad \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

Determinar la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.

Solución:

El vector director de la recta es

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- En el primer caso, el vector normal al plano es:

  $$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u} \cdot \vec{n_1} \neq 0$$

  y el plano y la recta se cortan en un punto.

- En el segundo caso:

  $$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \qquad \vec{u} \cdot \vec{n_2} = 0$$

En este caso, o bien son paralelos o la recta está contenida en el plano. Como el punto $A(2,1,4)$ está en la recta pero no está en el plano, son paralelos.

Ejercicio 7. *Dados el punto $A(1,-2,-3)$, la recta*

$$r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

y el plano $\pi: \; x-2y-3z+1=0$, calcular la ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

Solución:

En forma paramétrica, la recta r se puede escribir:

$$\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+2 & 1 & -2 \\ z+3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

y en forma general $-3x-3y+z=0$.

Ejercicio 8. *Calcular la posición relativa de los planos:*

$$\pi_1 : x-2y+z-3=0 \; ; \qquad \pi_2 : 2x-y-3z+1=0 \; ; \qquad \pi_3 : x+4y-9z+11=0$$

Solución:

Formamos el sistema con las tres ecuaciones. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -9 & 11 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & 14 \end{pmatrix} = 2$$

Como el rango de la matriz de coeficientes también es igual a 2, el sistema es compatible indeterminado. Los tres planos se cortan en una recta.

---

14. Más geometría

Ejercicio 1. *Se consideran la recta y los planos siguientes:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 \ ; \quad \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

Se pide:

(*a*) *Determinar la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.*

(*b*) *Determinar la posición relativa de los planos.*

(*c*) *Calcular la distancia de r a π_2.*

Solución:

El vector director de la recta y los vectores normales a los planos son:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{n_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(*a*) El vector director de la recta y el vector normal al plano π tienen la misma dirección. Entonces, la recta corta perpendicularmente al plano.

Calculamos el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{n_2}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{n_2} = -3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 0$$

La recta y el plano o bien son paralelos o bien la recta está contenida en el plano. Puesto que el punto de la recta $P(2, 1, 4)$ no está en el plano, la recta y el plano son paralelos.

(*b*) Los vectores normales a los planos no tienen la misma dirección. Los lanos se cortan.

(*c*) Puesto que son paralelos basta calcular la distancia al plano de un punto cualquiera de la recta. Tomemos, por ejemplo, $P(2, 1, 4)$:

$$d = \frac{3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

Ejercicio 2. *Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:*

$$\begin{aligned} &\pi_1 : x + z = \lambda \\ &\pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ &\pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)y = -\lambda \end{aligned}$$

Solución:

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda - 2 & \lambda + 2 \\ 2\lambda + 2 & -(\lambda + 6) & 0 \end{vmatrix} = -4(\lambda + 6) - (\lambda - 2)(2\lambda + 2) + (\lambda + 2)(\lambda + 6) = -\lambda^2 + 6\lambda - 8$$

Este determinante se anula para $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$. Podemos distinguir los siguientes casos:

(*a*) Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 4$ 3l sistema es compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.

(*b*) Si $\lambda = 2$ el rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 4 & 4\\ 6 & -8 & 0 & -2\end{pmatrix} = 3$$

El sistema es incompatible. Viendo los coeficientes, observamos que hay dos planos paralelos (el primero y el segundo) y otro que los corta.

(*c*) Para $\lambda = 4$ el rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 4\\ 4 & 2 & 6 & 6\\ 10 & -10 & 0 & -4\end{pmatrix} = 3$$

El sistema es incompatible pero no hay planos paralelos. Los tres planos se cortan dos a dos en rectas paralelas.

Ejercicio 3. *Dadas las rectas*

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}\ ; \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3\\ 3x + z = 1\end{cases}$$

(*a*) *Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.*

(*b*) *Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.*

Solución:

Escribimos las ecuaciones paramétricas de la segunda recta:

$$s: \begin{cases} x = \lambda\\ y = -2 - 2\lambda\\ z = 1 - 3\lambda\end{cases}$$

Así, los dos rectas están definidas por los siguientes puntos y vectores directores:

$$r:\ P(1,-1,k),\quad \vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\ ; \qquad s:\ Q(0,-2,1),\quad \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\ -2\\ -3\end{pmatrix}$$

(*a*) Calculamos el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}]$:

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & -3 & 1-k\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -k\end{vmatrix} = -(k-4)$$

El producto mixto se anula para $k = 4$. Para este valor, las dos rectas son coplanarias (se cortan).

(*b*) La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix}x & -1 & 1\\ y+2 & 1 & -2\\ z-1 & 1 & -3\end{vmatrix} = 0$$

o en forma general $x + 2y - z + 5 = 0$.

Ejercicio 4. *Dados el plano*

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 *determinado por el punto* $P(0,2,4)$ *y los vectores* $\vec{u_1} = (0,2,6)$ *y* $\vec{u_2} = (1,0,b)$*, se pide:*

(a) *Calcular los valores de* a *y* b *para que* π_1 *y* π_2 *sean paralelos.*

(b) *Para* $a = 1$ *y* $b = 0$ *determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de* π_1 *y* π_2*.*

(c) *Para* $a = 4$ *y* $b = -2$ *determinar los puntos que están a igual distancia de* π_1 *y* π_2*.*

Solución:

Escribimos la ecuación general del plano π_2:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -bx - 3y + z = -2$$

(a) Observando las ecuaciones de los dos planos vemos que para $b = -2$ son paralelos. Además para $a = -2$ son coincidentes.

(b) En este caso los planos son:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ -3y + z = -2 \end{cases}$$

Tomando $y = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

(c) Los planos son:

$$2x - 3y + z - 4 = 0, \qquad 2x - 3y + z + 2 = 0$$

Los dos planos son paralelos. El plano intermedio es $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Ejercicio 5. *Dado el plano* $\pi:\ x + 3y + z = 4$*, se pide:*

1. *Calcular el punto simétrico* P *del punto* $O(0,0,0)$ *respecto del plano* π*.*
2. *Calcular el coseno del ángulo* α *que forman el plano* π *y el plano* $x = 0$*.*
3. *Calcular el volumen del tetraedro* T *determinado por el plano* π*, y los planos* $x = 0$*,* $y = 0$ *y* $z = 0$*.*

Solución:

(a) La proyección del punto $O(0,0,0)$ sobre el plano π es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 4 \\ x = t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

resolviendo obtenemos el punto $Q\left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{8}{11}\right)$. Este punto es punto medio entre el origen $O(0,0,0)$ y su simétrico $O'(x', y', z')$. Teniendo esto en cuenta obtenemos el punto $O'\left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$.

(*b*) Los vectores normales a los planos son:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El coseno del ángulo que forman es

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

(*c*) Los puntos de intersección del plano con los ejes de coordenadas son $A(4,0,0)$, $B(0,\frac{4}{3},0)$ y $C(0,0,4)$. Podemos calcular el volumen del tetraedro a partir del producto mixto $[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]$:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{32}{9}$$

---

15. Y más geometría

Ejercicio 1. *Sean r_A la recta con vector de dirección $(1,\lambda,2)$ que pasa por el punto $A(1,2,1)$, r_B la recta con vector de dirección $(1,1,1)$ que pasa por $B(1,-2,3)$, y r_C la recta con vector de dirección $(1,1,-2)$ que pasa por $C(4,1,-3)$. Se pide:*

(*a*) *Hallar λ para que r_A y r_B se corten.*

(*b*) *Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C.*

(*c*) *Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.*

Solución:

(*a*) Para que las rectas se corten el producto mixto de los dos vectores directores y el vector que une un punto de cada recta debe ser igual a cero. En este caso:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y el producto mixto

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2(\lambda-1)+4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1$$

(*b*) El plano determinado por las rectas dadas tiene como vector normal:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 1 \\ \vec{\jmath} & 1 & 1 \\ \vec{k} & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este vector y el director de la recta son perpendiculares y, por tanto, su producto escalar debe ser cero:

$$-3+3\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1$$

(c) El ángulo está dado por

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-2)}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 90^{\text{o}}$$

Ejercicio 2. *Dadas las rectas:*

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}\,; \qquad s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

Solución:

Si son perpendiculares, el producto escalar de sus vectores directores debe ser cero:

$$b+2-a=0 \quad\Longrightarrow\quad a=b+2$$

y si se cortan, el producto mixto de los vectores directores y el vector que tiene como extremos un punto de cada recta debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ b+2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9-9b=0 \quad\Longrightarrow\quad b=-1\,; \quad a=1$$

Ejercicio 3. *Dados el punto $P(1,0,-1)$, el plano $\pi \equiv 2x-y+z+1=0$, y la recta:*

$$r \equiv \begin{cases} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$$

se pide:

(a) *Determinar la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.*

(b) *Hallar el ángulo entre r y π.*

Solución:

(a) Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-3+3\lambda \end{cases}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 2 & -1 \\ z+1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad 5(x-1)+5y-5(z+1)=0 \quad\Longrightarrow\quad x+y-z-2=0$$

(b) El ángulo de la recta y el plano cumple:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

Ejercicio 4. *Sean las rectas:*

$$r:\ \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-4} \qquad s:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$$

(a) *Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.*

(b) *Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.*

Solución:

(a) Calculamos el plano que contiene al origen y la primera recta:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y & 1 & 2 \\ z & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x+2y-z=0$$

Hacemos lo mismo con la segunda recta:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -x+8y-5z=0$$

La recta que nos piden (si existe) es la intersección de los dos planos:

$$\begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ -x+8y-5z=0 \end{cases}$$

(b) Calculamos el vector director de la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & -1 & 3 \\ \vec{\jmath} & 1 & 1 \\ \vec{k} & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

El plano que contiene la primera recta y la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 3 \\ y-2 & 1 & -5 \\ z & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 7x+5y-z-3=0$$

El que contiene la segunda recta y la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ y+1 & 1 & -5 \\ z+2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5x+15y-18z-23=0$$

La perpendicular común es la intersección de los dos planos:

$$\begin{cases} 7x+5y-z-3=0 \\ 5x+15y-18z-23=0 \end{cases}$$

Ejercicio 5. *Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x-2y-z-7=0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.*

Solución:

El vector $\overrightarrow{AB}$ es:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El plano tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & -2 & 2 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x+y-2=0$$

---

16. Examen global de álgebra y geometría

Ejercicio 1. *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1-\lambda \\ x + y + (\lambda-1)z = -2\lambda \\ (\lambda-1)x + y + z = \lambda - 1 \end{cases}$$

se pide:

(*a*) *Discutirlo según los valores del parámetro λ.*

(*b*) *Resolverlo para el caso $\lambda = 1$.*

(*c*) *Resolverlo para el caso $\lambda = -1$.*

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \\ \lambda-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda(\lambda-1)-2) = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

Pueden darse los siguinetes casos:

- ⋄ Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$, rango $A =$ rango $A^* = 3$. El sistema es compatible determinado.
- ⋄ Si $\lambda = -1$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. Calculamos el de la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 12 & \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado.

- ⋄ Si $\lambda = 2$ el rango de la matriz de coeficientes es 1 y el de la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

El sistema es incompatible.

(*b*) Resolvemos por el método de Gauss. Restando la primera fila a la tercera:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde resulta $x = 0$, $y = -2$, $z = 2$.

(c) Para $\lambda = -1$ el sistema es compatible indeterminado. Solo hay dos ecuaciones independientes. Tomamos las dos primeras:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

Tomando $z = \lambda$ como parámetro resulta:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 + \lambda \\ x + y = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene la solución $x = \frac{4}{3} + \lambda,\ y = \frac{2}{3} + \lambda,\ z = \lambda.$

Ejercicio 2. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) *Estudiar el rango de la matriz B en función de a.*

(b) *Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.*

Solución:

(a) Tomamos tres columnas de la matriz y calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & -8 & -3 \\ 3 & 3 & 2-a \end{vmatrix} = -32(2-a) + 6 + 18 - 24 + 36 - 4(2-a) = 36a - 36$$

El determinante se anula para $a = 1$. Pueden darse los siguientes casos:

- ⋄ Para $a \neq 1$ el rango de la matriz es 3.
- ⋄ Para $a = 1$ calculamos el rango (restamos a la segunda fila la primera multiplicada por 3 y a la tercera le sumamos la primera):

$$\operatorname{rango} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -14 & 0 & -10 & -2 \\ 7 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

(b) Puesto que $X = A^{-1}B$, calcularemos la matriz inversa de A. El determinante de esta matriz es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Entonces:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos las matrices:

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$.

Solución:

Despejando mediante la matriz inversa se obtiene:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}(A+B)B^{-1} && \text{(por la propiedad distributiva)} \\ &= A^{-1}AB^{-1} + A^{-1}BB^{-1} \\ &= IB^{-1} + A^{-1}I \\ &= B^{-1} + A^{-1} \\ &= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Dadas la recta r y la familia de rectas s, mediante:*

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) *Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.*

(b) *Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando ambas se cortan.*

Solución:

Escribimos las ecuaciones paramétricas de ambas rectas:

$$r : \begin{cases} x = -3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad ; \quad s : \begin{cases} x = \mu \\ y = \frac{a}{2} - \frac{\mu}{2} \\ z = -\mu \end{cases}$$

Un punto de la primera recta es $A(-3, 0, 1)$ y uno de la segunda $B\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$

(a) Para que las rectas se corten, el producto mixto de $\overrightarrow{AB}$ y los vectores directores de las rectas debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & \frac{a}{2} \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies a = -3$$

El punto de corte es $P(-1, -1, 1)$.

(b) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas es:

$$\begin{vmatrix} x+3 & -2 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z-1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \implies x + 2y + 3 = 0$$

Ejercicio 5. *Se dan la recta r y el plano π, mediante:*

$$r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}\ , \qquad \pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a 1.

Solución:

Calculamos los planos paralelos al plano dado que se encuentran a una distancia igual a 1. La ecuación de estos planos tiene la forma $2x + y + 2z + D = 0$. Además:

$$\frac{D+7}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad D + 7 = \pm 3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} D = -4 \\ D = -10 \end{cases}$$

Los puntos de la recta que nos piden son la solución de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z - 4 = 0 \\ x = 4 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \qquad ; \qquad \begin{cases} 2x + y - 2z - 10 = 0 \\ x = 4 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Resolviendo estos sistemas obtenemos los puntos $P\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)$ y $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -3\right)$.

---

17. Otro examen de álgebra y geometría

Ejercicio 1. *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) *Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1}.*

(b) *Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.*

(c) *Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.*

Solución:

(a) Para que exista la matriz inversa, el determinante debe ser distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 1$$

La matriz inversa existe para cualquier valor de k.

(b) La matriz adjunta es:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y, puesto que el determinante es igual a 1, la inversa es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Despejamos X:

$$AX = A + B \quad\Longrightarrow\quad X = A^{-1}(A+B) = I + A^{-1}B$$

Sustituyendo:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y finalmente:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \\ mx + my = 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) *Discutirlo según los valores de m.*

(b) *Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.*

Solución:

(a) Es un sistema homogéneo por lo que el rango de la matriz de coeficientes es siempre igual al rango de la matriz ampliada y el sistema es siempre compatible. La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \\ m & m \end{pmatrix}$$

Tomemos las dos primeras filas. El determinante es:

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

Este determinante es cero para $m = -1$ y $m = 1$. Los rangos de las matrices son:

– Si $m \neq \pm 1$ el rango es 2 y el sistema es compatible determinado (solución trivial).

– Si $m = -1$:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

y, de nuevo, el sistema es compatible determinado y solo tiene la solución trivial.

– Si $m = 1$:

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = 1$$

y el sistema es compatible indeterminado.

(*b*) Para $m = 1$, la solución es $x = \lambda,\ y = -\lambda$.

Ejercicio 3. *Dados el punto $P(1, 2, 1)$ y las rectas:*

$$r : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 3z = -2 \end{cases} \quad ; \qquad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

se pide:

(*a*) *Calcular la mínima distancia entre r y s.*

(*b*) *Determinar el punto P' simétrico de P respecto de r.*

Solución:

Escribamos las ecuaciones de las rectas en paramétricas. Un punto de la recta r es $A(1, 3, 0)$ y un vector director es:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & 1 & 1 \\ \vec{\jmath} & 1 & -1 \\ \vec{k} & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s son:

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad ; \qquad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases}$$

Un punto de s es $B(2, -3, 0)$ y un vector director:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(*a*) La distancia entre las dos rectas es:

$$d = \frac{[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Puesto que:

$$[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11\ ; \qquad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -2 & 0 \\ \vec{\jmath} & 1 & 0 \\ \vec{k} & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$d = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

(*b*) El plano perpendicular a r por el punto $P(1,2,1)$ es:

$$-2(x-1)+1(y-2)-1(z-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad 2x-y+z-1=0$$

y la intersección de este plano con r:

$$\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x=1-2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad 2-4\lambda-3-\lambda-\lambda-1=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=-\frac{1}{3}$$

lo que nos da el punto $C\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)$. Este es el punto medio entre P y $P'(x',y',z')$. Así:

$$\frac{5}{3}=\frac{1+x'}{2},\quad \frac{8}{3}=\frac{2+y'}{2},\quad \frac{1}{3}=\frac{1+z'}{2}$$

con lo que obtenemos $P'\left(\frac{7}{3}.\frac{10}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Ejercicio 4.

(*a*) *Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que*

$$X+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\ ;\qquad X+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(*b*) *Hallar Z, matriz invertible 2×2 tal que:*

$$Z^2\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}Z^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Solución:

(*a*) Escribamos el sistema en la forma:

$$\begin{aligned} X+&\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\\ X+&\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones resulta:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad Y=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

y sustituyendo:

$$X+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -5 & -1\end{pmatrix}$$

(*b*) Teniendo en cuenta que

$$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3I \quad\Longrightarrow\quad Z^2\cdot 3I\cdot Z^{-1}=3Z^2Z^{-1}=3Z$$

Entonces:

$$3Z=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad Z=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. *Dados los puntos* $P_1(1,-1,2)$, $P_2(2,-3,0)$ *y* $P_3(3,1,2)$, *se pide:*

(a) *Determinar la ecuación del plano* π *que contiene los tres puntos.*

(b) *Determinar la ecuación de la recta* r *que pasa por* P_1 *y es perpendicular a* π.

(c) *Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio* $\sqrt{17}$ *que son tangentes al plano* π *en el punto* P_1.

Solución:

(a) Tomando $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$ como vectores directores:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y+1 & -2 & 2 \\ z-2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad 4(x-1)-4(y+1)+6(z-2)=0 \quad\Longrightarrow\quad 2x-2y+3z-10=0$$

(b) Las ecuaciones paramétricas de esta recta son:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1-2t \\ z = 2+3t \end{cases}$$

(c) Los centros de las superficies esféricas están sobre esta recta y a una distancia del plano igual a $\sqrt{17}$. Por consiguiente estos puntos cumplen:

$$\frac{2(1+2t)-2(-1-2t)+3(2+3t)-10}{\sqrt{2^2+2^2+3^2}} = \pm\sqrt{17} \quad\Longrightarrow\quad 17t=\pm 17 \quad\Longrightarrow\quad t=\pm 1$$

Los centros de las superficies esféricas son los puntos $C(3,-3,5)$ y $C'(-1,1,-1)$. Las ecuaciones de las superficies son:

$$(x-3)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=17$$
$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=17$$

18. Selectividad junio 2015

OPCIÓN A

Ejercicio 1. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

(*a*) *Determinar el dominio de f y sus asíntotas.*

(*b*) *Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.*

(*c*) *Calcular $\int f(x)\,\mathrm{d}x$*

Solución:

(*a*) Para que exista el logaritmo debe ser $x > -1$. Además hay que excluir $x = 2$ que anula el denominador de la primera fracción. Por consiguiente, el dominio es:

$$D = (-1, \infty) - \{2\}$$

(*b*) Ya que $f(0) = 0$, el punto de tangencia es $(0, 0)$. Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2-4-2x\cdot x}{(x^2-4)^2} + \frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'(0) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \frac{3}{4}x$.

(*c*) Calculamos la integral:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x + \int \ln(x+1)\,\mathrm{d}(\ln(x+1)) \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + \frac{\ln^2(x+1)}{2} + C\end{aligned}$$

Ejercicio 2.

(*a*) *Discutir según los valores de m el sistema:*

$$\begin{cases} 4x + 3y + (m-1)z = 0 \\ x - 2y + mz = 1 \\ 5x + my + z = 1 \end{cases}$$

(*b*) *Resolver el sistema anterior en el caso $m = 1$.*

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & m-1 \\ 1 & -2 & m \\ 5 & m & 1 \end{vmatrix} = -8+15m+m(m-1)+10(m-1)-4m^2-3 = -3m^2+24m-21$$

El determinante se anula para:

$$-3m^2+24m-21=0 \quad\Longrightarrow\quad m^2-8m+7=0 \quad\Longrightarrow\quad m=1;\ m=7$$

Entonces:

– Si $m \neq 1$ y $m \neq 7$, rango $A =$ rango $A^* = 3$. El sistema es compatible determinado.

– Si $m = 7$, rango $A = 2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

El sistema es incompatible.

– Si $m = 1$, rango $A = 2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

y el sistema es compatible indeterminado.

(*b*) El sistema es compatible indeterminado, Solo hay dos ecuaciones independientes. Tomemos las dos primeras:

$$\begin{cases} 4x+3y=0 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$$

Tomando $z = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} 4x+3y=0 \\ x-2y=1-\lambda \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene la solución $\left(\frac{3-3\lambda}{11}, \frac{-4+4\lambda}{11}, \lambda\right)$.

Ejercicio 3.

(*a*) *Dados los vectores $\vec{u} = (2,3,4)$, $\vec{v} = (-1,-1,-1)$ y $\vec{w} = (-1,\lambda,-5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.*

(*b*) *Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2,-1,4)$ y que pasa por el punto $(1,1,0)$.*

Solución:

(*a*) El volumen del paralelepípedo está dado por el módulo del producto mixto de los tres vectores. Entonces, si el volumen es 6:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} = \pm 6 \quad\Longrightarrow\quad 10-4\lambda+3-4+2\lambda-15 = -6-2\lambda = \pm 6$$

y de aquí las dos soluciones $\lambda = 0$, $\lambda = -6$.

(b) El vector normal a $z = 0$ es $\vec{n} = (0, 0, 1)$ es perpendicular a la recta que nos piden. Conocemos por tanto, dos direcciones perpendiculares a la recta. Su vector director es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (1, 2, 0)$$

así que la ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. *Dado el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.*

Solución:

La superficie esférica tiene como centro el punto $C(1, 1, 2)$ y radio $r = 3$. El problema es equivalente a calcular los planos paralelos al plano dado, es decir, planos de la forma $x - 2y + 2z + D = 0$ que se encuentra a distancia 3 del punto $C(1, 1, 2)$. Así que:

$$\left| \frac{1 - 2 + 4 + D}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3 + D}{3} = \pm 3$$

y resolviendo la ecuación se obtienen las soluciones $D_1 = 6$ y $D_2 = -12$. Los planos que buscamos son:

$$x - 2y + 2z + 6 = 0 \; ; \qquad x - 2y + 2z - 12 = 0$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. *Dados el punto $P(-4, 6, 6)$, el origen de coordenadas O, y la recta*

$$r \equiv \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

se pide:

(a) *Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.*

(b) *Determinar la distancia de P a r.*

(c) *¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados?. En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.*

Solución:

(a) Sea $M(-2, 3, 3)$ el punto medio del segmento OP. Si Q se proyecta perpendicularmente sobre M, los dos vectores $\overrightarrow{MQ}$ y $\overrightarrow{OP}$ son perpendiculares. Sea $Q(-4 + 4\lambda, 8 + 3\lambda, -2\lambda)$, entonces:

$$\overrightarrow{MQ} = (-2 + 4\lambda, 5 + 3\lambda, -3 - 2\lambda) \,, \qquad \overrightarrow{OP} = (-4, 6, 6)$$

Si son perpendiculares, su producto escalar es cero:

$$8 - 16\lambda + 30 + 18\lambda - 18 - 12\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad 20 - 10\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 2$$

y el punto es $Q(4, 14, -4)$.

Otra manera de resolver este problema es calcular el plano perpendicular a OP por el punto M:

$$\begin{aligned}
&-4(x+2) + 6(y-3) + 6(z-3) = 0\\
&-4x + 6y + 6z - 44 = 0\\
&-2x + 3y + 3z - 22 = 0
\end{aligned}$$

y ahora hallar el punto de intersección de este plano con la recta r:

$$\begin{cases}
-2x + 3y + 3z - 22 = 0\\
x = -4 + 4\lambda\\
y = 8 + 3\lambda\\
z = -2\lambda
\end{cases}$$

Resolviendo por sustitución:

$$\begin{aligned}
&-2(-4+4\lambda) + 3(8+3\lambda) + 3(-2\lambda) - 22 = 0\\
&-5\lambda + 10 = 0\\
&\lambda = 2
\end{aligned}$$

y obtenemos la misma solución que por el primer procedimiento.

(*b*) Sea $P'(-4, 8, 0)$ un punto de r y $\vec{u}$ su vector director. La distancia está dada por:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PP'} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{PP'} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -6\\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (14, -24, -8) = 2(7, -12, -4)$$

La distancia es:

$$d = \frac{2\sqrt{49 + 144 + 16}}{\sqrt{16 + 9 + 4}} = \frac{2\sqrt{209}}{\sqrt{29}}$$

(*c*) El problema es equivalente a determinar la posición relativa de las rectas OP y r. Para ello calculamos el producto mixto de los vectores directores de las rectas y el vector que une un punto de cada recta:

$$\begin{vmatrix} -4 & 8 & 0\\ -2 & 3 & 3\\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 3\\ 4 & 11 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Las rectas se cruzan. No existe el punto R.

Ejercicio 2. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0\\ xe^x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) *Estudiar la continuidad de f.*

(b) *Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.*

(c) *Calcular* $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solución:

(a) Para $x \neq 0$ la función es continua porque está definida a trozos mediante funciones continuas. En $x = 0$ los límites laterales valen:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (xe^x + 1) = 1$$

los dos límites laterales son iguales y, además, estos límites coinciden con el valor de la función. Por consiguiente, $f(x)$ también es continua en $x = 0$

(b) Para $x \neq 0$ la función es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ las derivadas por la izquierda y por la derecha son:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\operatorname{sen} x}{2x} = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} (e^x + xe^x) = 1$$

La función no es derivable en $x = 0$.

(c) Calculamos por partes la integral indefinida:

$$\begin{aligned} \int (xe^x + 1)\ \mathrm{d}x &= \int xe^x\ \mathrm{d}x + \int\ \mathrm{d}x \\ &= \int x\ \mathrm{d}(e^x) + x \\ &= xe^x - \int e^x\ \mathrm{d}x + x \\ &= xe^x - e^x + x + C \end{aligned}$$

Calculamos ahora la integral definida:

$$\int_1^3 (xe^x + 1)\ \mathrm{d}x = \Big[xe^x - e^x + x\Big]_1^3 = \big(3e^3 - e^3 + 3\big) - \big(e^1 - e^1 + 1\big) = 2e^3 + 2$$

Ejercicio 3. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) *Calcular* A^{15} *y* A^{20}.

(b) *Resolver la ecuación matricial* $6X = B - 3AX$, *donde* X *es una matriz cuadrad de orden 3.*

Solución:

(a) Puesto que $A^2 = I$ resulta que $A^{15} = A$ y $A^{20} = I$.

(b) Despejamos X:

$$\begin{aligned}
&6X = B - 3AX\\
&6X + 3AX = B\\
&6IX + 3AX = 3I\\
&2IX + AX = I\\
&(2I + A)X = I\\
&X = (2I + A)^{-1}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad |2I + A| = 9$$

Calculamos la inversa:

$$\operatorname{adj}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \;;(2I + A)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

y de aquí, simplificando:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & t & 2\\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} \quad ; \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

(a) *Hallar el rango de* A *en función de* t.

(b) *Calcular* t *para que* $\det(A - tI) = 0$.

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & t & 2\\ 3 & -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 12 - 9t + 2 = t^2 - 9t + 14$$

El determinante se anula para $t = 2$ y $t = 7$. Entonces tenemos que:

– si $t \neq 2$ y $t \neq 7$, rango $A = 3$.

– si $t = 2$ o $t = 7$, rango $A = 2$

(*b*) Calculamos $A - tI$:

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es:

$$|A - tI| = -2\begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2(-1 + t - 6) = -2t + 14$$

El determinante se anula para $t = 7$.