1. Límites y continuidad

Ejercicio 1. *Prueba que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto. Si c es la abscisa de ese punto, calcula la parte entera de c.*

Solución:

Las dos gráficas se cortan en la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = e^{-x} \end{cases}$$

Resolviendo por igualación resulta la ecuación:

$$\ln x = e^{-x} \qquad \text{o bien} \qquad \ln x - e^{-x} = 0$$

Demostraremos que esta ecuación tiene solución por medio del teorema de Bolzano:

- Sea la función

  $$F(x) = \ln x - e^{-x}$$

  continua para $x > 0$ por ser diferencia de funciones continuas.

- Busquemos dos puntos en que la función tome valores de signo opuesto:

  $$F(1) = \ln 1 - e^{-1} = 0 - e^{-1} < 0$$
  $$F(2) = \ln 2 - e^{-2} \simeq 0{,}558 > 0$$

- De acuerdo con el teorema de Bolzano, existe un valor $c \in (1, 2)$ en el que $F(c) = 0$. El número c es la abscisa del punto de corte entre las dos curvas.

Puesto que c está en el intervalo $(1, 2)$, su parte entera es igual a 1.

Ejercicio 2. *Hallar el valor de λ y $f(0)$ para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Solución:

Para que la función sea continua, los límites por la derecha y por la izquierda cuando x tiende a cero deben ser iguales:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} && \text{puesto que } e^{\lambda x^2} - 1 \sim \lambda x^2 \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\lambda x^2}{3x^2} \\ &= \frac{\lambda}{3} \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} && \text{puesto que } \operatorname{sen} 2x \sim 2x \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{x} = 2 \end{aligned}$$

Puesto que los dos límites deben ser iguales se deduce que $\lambda = 6$.

Para que la función sea continua, el valor de la función debe coincidir con el límite, o sea que debe ser $f(0) = 2$.

Ejercicio 3. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}$$

según los valores del parámetro α*.*

Solución:

Se trata de un límite indeterminado del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}(x+1)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}}$$

Pueden darse dos casos:

- Si $\alpha \neq 0$, la fracción en el exponente tiende a cero puesto que el denominador es de mayor grado que el numerador. En este caso, el límite es $e^0 = 1$.
- Si $\alpha = 0$, la fracción en el exponente tiende a $\frac{1}{4}$, de forma que el límite es $e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$.

Ejercicio 4. *Demuestra que la ecuación* $x^3 + x - 5 = 20$ *tiene solución. Calcula su parte entera.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la ecuación $x^3 + x - 25 = 0$ tiene solución. Lo demostraremos a partir del teorema de Bolzano:

- Sea la función

  $$F(x) = x^3 + x - 25$$

  continua en todo $\mathbb{R}$.
- Encontremos valores de x para los que la función tome valores de signo opuesto:

  $$F(2) = 8 + 2 - 25 < 0$$
  $$F(3) = 27 + 3 - 25 > 0$$

- De acuerdo con el teorema de Bolzano existe un valor $c \in (2, 3)$ en el que la función vale 0. Este número es solución de la ecuación.

Puesto que la solución está en el intervalo $(2, 3)$, su parte entera vale 2.

Ejercicio 5. *Estudia la continuidad de la función:*

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

Solución:

Se trata de una función racional. Por consiguiente es continua salvo para los valores de x que anulan el denominador:

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Veamos qué tipos de discontinuidad se presentan en estos puntos:

- $\diamond$ En $x = 2$ el límite de la función es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Simplificamos la fracción dividiendo mediante la regla de Ruffini por $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{5}{3}$$

Existe el límite pero no existe la función. Se trata entonces de una discontinuidad evitable.

- $\diamond$ En $x = -1$ se anula el denominador y no se anula el numerador. El límite es infinito. Se trata de una discontinuidad de tipo salto infinito.

Ejercicio 6. *Calcula los siguientes límites:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1-3x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x^2-5}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x-2}$

Solución:

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\infty} = \infty$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1-3x} = \infty^{-\infty} = 0$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x^2-5} = \infty$

  puesto que el numerador es una función exponencial y el denominador una potencial.
- $\diamond$ El último límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Para simplificar la fracción, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada del numerador:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}{(x-2)(3+\sqrt{x^2+5})} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{9-x^2-5}{(x-2)(3+\sqrt{x^2+5})} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{(x-2)(3+\sqrt{x^2+5})} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(2+x)(2-x)}{(x-2)(3+\sqrt{x^2+5})} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{-(2+x)}{3+\sqrt{x^2+5}} \\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Ejercicio 7. *Calcular las asíntotas de la curva:*

$$y = \frac{x^2-3x+2}{x}$$

Calcular la posición de la curva respecto a las asíntotas horizontales y oblicuas.

Solución:

- ◇ Existe una asíntota vertical $x = 0$ puesto que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = \infty$$

- ◇ No existe asíntota horizontal puesto que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = \infty$$

- ◇ La pendiente de la asíntota oblicua es

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1$$

y la ordenada en el origen

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2}{x} = -3$$

Así pues la asíntota oblicua es $y = x - 3$.

Para ver la posición de la curva respecto de la asíntota escribimos su ecuación en la forma:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x} = x - 3 + \frac{2}{x}$$

y de aquí deducimos que cuando x tiende a infinito la ordenada de la curva es mayor que la de la asíntota y, por consiguiente, la curva queda por encima de la asíntota. Lo contrario sucede cuando x tiende a menos infinito.

2. Segundo examen de límites y continuidad

Ejercicio 1. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-2x+1}{(2x-1)^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+\ln x}{\ln x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Solución:

- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-2x+1}{(2x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-2x+1}{4x^2-4x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{4x^2} = \frac{5}{4}$
- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+\ln x}{\ln x} = \infty$ puesto que x tiende a infinito más rápidamente que $\ln x$.
- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\infty} = \infty$
- ◇ $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{(\cos x-1)\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-x^2}{2}\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

  donde hemos utilizado la equivalencia $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$

Ejercicio 2. *Determina el valor de a para que se verifique:*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right) = 2$$

Solución:

Calculamos el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax+1}-x)(\sqrt{x^2+ax+1}+x)}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+ax+1-x^2}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} \\
&= \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que el ermino de mayor grado del denominador es $2x$. Y puesto que este límite debe ser igual a 2 resulta queda

$$\frac{a}{2} = 2 \implies a = 4$$

Ejercicio 3. *Calcular el valor de k para que la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$$

sea continua.

Solución:

Para que la función sea continua, el límite de la función cuando x tiende a cero debe coincidir con el valor de la función $f(0)$. Por consiguiente:

$$k = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = 1$$

También podíamos haber calculado el límite teniendo en cuenta que $x-1=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$.

Ejercicio 4. *Para cada una de las siguientes funciones calcular las asíntotas verticales y horizontales u oblicuas y la posición de la curva respecto a estas últimas:*

$$y = \frac{3x^2-5x+6}{x^2-x-2}; \qquad y = \frac{x^2-5x+3}{x+1}$$

Solución:

- Las rectas $x=2$ y $x=-1$ son asíntotas verticales de la función puesto que el límite en estos puntos es infinito.

  Dividiendo encontramos que:

  $$y = \frac{3x^2-5x+6}{x^2-x-2} = 3 + \frac{-2x+12}{x^2-x-2}$$

  De aquí deducimos que la asíntota horizontal es $y=3$ y que la curva queda por encima de la asíntota en $-\infty$ y por debajo en $+\infty$.

- La segunda función tiene una asíntota vertical en $x=-1$.

  Haciendo la división obtenemos:

  $$y = \frac{x^2-5x+3}{x+1} = x-6+\frac{9}{x-1}$$

  y por consiguiente, la recta $y=x-6$ es una asíntota oblicua de la función. Ésta queda por encima de la asíntota en $+\infty$ y por debajo en $-\infty$.

Ejercicio 5. *Demostrar que las curvas $y=x^3+x^2$ e $y=3+\cos x$ se cortan en algún punto. Calcular la parte entera de algún punto de intersección.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la ecuación $x^3+x^2-\cos x-3=0$ tiene solución:

- Sea la función

  $$F(x) = x^3+x^2-\cos x-3$$

  continua para todo x por ser suma de funciones continuas.

- Puesto que:

  $$F(1) = 1+1-\cos 1-3 = -\cos 1-1 < 0$$
  $$F(2) = 8+4-\cos 2-3 = 9-\cos 2 > 0$$

- De acuerdo con el teorema de Bolzano existe un número $c\in(1,2)$ que cumple que $F(c)=0$. Este número c es solución de la ecuación, y, puesto que está en el intervalo $(1,2)$, su parte entera es igual a 1.

---

3. Examen de derivadas

Ejercicio 1. *Dada la función*

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

dibujar la gráfica de f estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

Solución:

Calculemos las derivadas:

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 + 1) + 2xe^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 2x - 1)$$
$$f''(x) = -e^{-x}(-x^2 + 2x - 1) + (-2x + 2)e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 3)$$
$$f'''(x) = -e^{-x}(x^2 - 4x + 3) + (2x - 4)e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 6x - 7)$$

- Para estudiar el crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada. La derivada es cero si

  $$-x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

  El signo de la derivada es:

$-$	0	$-$
	1	

  La función tiene un punto de tangente horizontal en $(1, 2e^{-1})$ pero no tiene máximos ni mínimos, es siempre decreciente.

- La derivada segunda se anula para:

  $$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

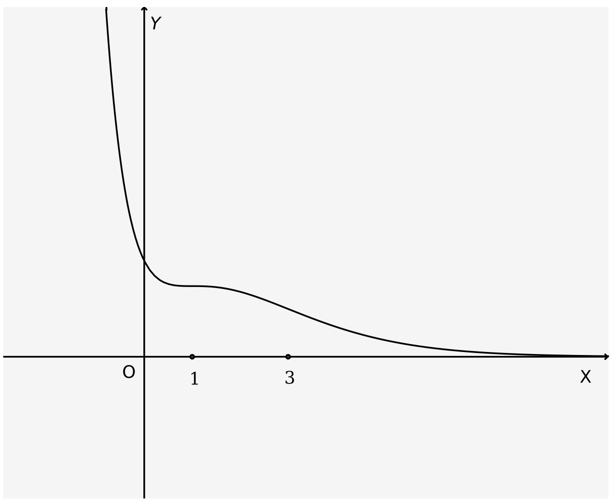
  Hay puntos de inflexión en $(1, 2e^{-1})$ y en $(3, 10e^{-3})$.

- Para obtener las asíntotas calculamos los límites:

  $$\lim_{x \to +\infty} e^{-x}(x^2 + 1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0$$
  $$\lim_{x \to -\infty} e^{-x}(x^2 + 1) = \infty$$

  Así pues, hay una asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \to \infty$.

- Con estos datos, la gráfica es la siguiente



Ejercicio 2. *Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:*

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ *el logaritmo neperiano de* x.

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x\,\frac{1}{x}\,x = (\ln x)^2 + 2\ln x$$

$$f''(x) = 2\ln x\,\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2\ln x + 2}{x}$$

$$f'''(x) = \frac{\frac{2}{x}\,x - 1(2\ln x + 2)}{x^2} = \frac{-2\ln x}{x^2}$$

⋄ Para calcular máximos y mínimos igualamos a cero la derivada:

$$(\ln x)^2 + 2\ln x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ln x\,(\ln x + 2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}\ln x = 0\\ \ln x = -2\end{cases}$$

Es decir $x = 1$ y $x = e^{-2}$:

Para $x = 1$ la derivada segunda es positiva y la ordenada vale 0. Tenemos pues un mínimo en $(1, 0)$.

Para $x = e^{-2}$ la derivada segunda es negativa y la ordenada es $4e^{-2}$. Tenemos un máximo en $(e^{-2}, 4e^{-2})$.

⋄ Igualamos a cero la derivada segunda para obtener los puntos de inflexión:

$$2\ln x + 2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ln x = -1 \quad\Longrightarrow\quad x = e^{-1}$$

Hay un punto de inflexión en (e^{-1}, e^{-1}). Puede comprobarse con la derivada tercera que es punto de inflexión. Pero es evidente que entre el máximo y el mínimo debe existir este punto.

Ejercicio 3. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1 + ax > 0 \text{ y } x \neq 0\\[2ex] -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0\end{cases}$$

se pide:

⋄ *Hallar los valores de los parámetros* a *y* b *para los que la función* $f(x)$ *es continua en* $x = 0$.

⋄ *Para* $a = b = 1$ *estudiar si la función* f *es derivable en* $x = 0$ *aplicando la definición de derivada.*

Solución:

⋄ Veamos en primer lugar que para que exista el límite cuando $x \to 0$, a y b deben ser iguales. En efecto, si a y b son diferentes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{ax - bx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{a-b}{x} = \infty$$

Para $a = b$ calculamos el límite aplicando la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax) - ax}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+ax} - a}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a-a-a^2x}{1+ax}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-a^2\cancel{x}}{2\cancel{x}(1+ax)} = \frac{-a^2}{2}$$

Si la función es continua, el límite debe ser igual al valor de la función:

$$\frac{-a^2}{2} = -\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad a^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad a_1 = -1\,; \quad a_2 = 1$$

◇ Para $a = b = 1$ tenemos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

La derivada es

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}+\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\ln(1+h)-2h+h^2}{2h^3}$$

Calculamos el límite aplicando la regla de l'Hopital:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{1+h}-2+2h}{6h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2-2(1+h)+2h(1+h)}{6h^2(1+h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h^2}}{6\cancel{h^2}(1+h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2}{6(1+h)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

◇ *Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.*

◇ *Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.*

◇ *Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.*

Solución:

◇ Calculamos la derivada

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

La derivada se anula en $x = 0$. El signo es el siguiente:

$+$	0	$-$
	0	

La función es creciente entre $-\infty$ y 0, y decreciente de 0 a ∞. En $(0, 2)$ hay un máximo.

◇ Estudiemos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^{\cancel{2}\,1} - 2\cancel{(x^2+1)}2x(-2x)}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2(x^2+1)-4x(-2x)}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

Obsérvese que hemos simplificado la derivada dividiendo numerador y denominador por x^2+1. La segunda derivada se anula en $x=-\sqrt{1/3}$ y $x=\sqrt{1/3}$. El signo de f'' es el siguiente:

	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$+$	0	$-$	0	$+$

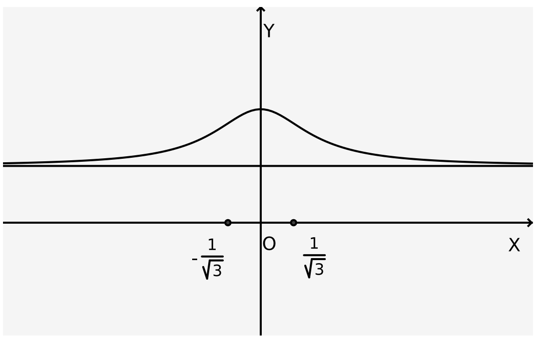
La función es cóncava en $(-\infty,-1)$ y en $(1,\infty)$. Es convexa en $(-1,1)$. Los puntos $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ y $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ son puntos de inflexión.

◇ Puesto que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=1$$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal de la función. No hay asíntotas verticales porque el denominador no se anula para ningún valor de x.

Con estos datos, la gráfica es como sigue.



Ejercicio 5. *Dada la función:*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si } x>0\\ x+k & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

se pide:

◇ *Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.*

◇ *Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.*

◇ *Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.*

Solución:

◇ Si la función es continua, los limites laterales en $x=0$ deben ser iguales. Calculemos primero el límite de $\sqrt{x}\ln x$:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-1/2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}=\lim_{x\to 0}-2x^{-1+3/2}=\lim_{x\to 0}-2x^{1/2}=0$$

y por consiguiente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x}=0$$

Como, por otra parte

$$\lim_{x\to 0}(x+k)=k \quad\Longrightarrow\quad k=0$$

- Si $x = 0$, $f(x) = 0$ y tenemos un primer punto de corte en $(0,0)$. Por otra parte, si $y = 0$, $\sqrt{x}\ln x = 0$ nos da que o bien $x = 0$, o bien $x = 1$ y tenemos otro punto de corte en $(1,0)$.
- En el punto de abscisa 1 ya hemos visto que la ordenada vale 0. La derivada es:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{x}\sqrt{x}\right)2^x - 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sqrt{x}\ln x}{2^{2x}}$$

En $x = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}$ y la ecuación de la recta tangente es:

$$y = \frac{1}{2}\,(x-1)$$

Ejercicio 6. *Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:*

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

Solución:

Calculamos la derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x+1)(x^2+1) - 2x(3x^2+x+3)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\cancel{6x^3} + \cancel{6x} + x^2 + 1 \cancel{-6x^3} - 2x^2 \cancel{-6x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

La derivada se anula en $x = -1$ y en $x = 1$. Analizamos el signo de la derivada:

$-$	0	$+$	0	$-$
	-1		1	

Entonces tenemos un mínimo en $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ y un máximo en $\left(1, \frac{7}{2}\right)$.

Para obtener los puntos de inflexión calculamos la derivada segunda:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{-2x(x^2+1)^{\overset{1}{\cancel{2}}} - 2\cancel{(x^2+1)} \cdot 2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^{\overset{3}{\cancel{4}}}} \\ &= \frac{-2x(x^2+1) - 2 \cdot 2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{-2x^3 + 4x^3 - 2x - 4x}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Los ceros de la derivada segunda son $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Analizamos el signo de la derivada segunda:

$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	

Como en esos puntos cambia la curvatura, se trata de puntos de inflexión.

Ejercicio 7. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se pide:

- *Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto* $(a, f(a))$ *para* $a > 0$.
- *Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los dos ejes coordenados.*
- *Hallar el valor de* $a > 0$ *que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.*

Solución:

- La derivada de la función es:

  $$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

  de forma queda

  $$f(a) = \frac{1}{a}\,; \qquad f'(a) = \frac{-1}{a^2}$$

  y la ecuación de la recta tangente es

  $$y - \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}(x-a)$$

- Las intersecciones con los ejes de esta recta son:

  $$\begin{cases} y - \dfrac{1}{a} = \dfrac{-1}{a^2}(x-a) \\ x = 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad y - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{2}{a}$$

  $$\begin{cases} y - \dfrac{1}{a} = \dfrac{-1}{a^2}(x-a) \\ y = 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad -\frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} \quad\Longrightarrow\quad -\frac{2}{a} = -\frac{x}{a^2} \quad\Longrightarrow\quad x = 2a$$

  Por tanto, los puntos de corte con los ejes son $A\,(2a, 0)$ y $B\left(0, \frac{2}{a}\right)$

- La distancia al cuadrado entre estos dos puntos es:

  $$d^2 = 4a^2 + \frac{4}{a^2}$$

  Si queremos que esta cantidad sea mínima, derivamos e igualamos a cero:

  $$\left(d^2\right)' = 8a - \frac{8}{a^3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad 8a^4 - 8 = 0 \quad\Longrightarrow\quad a^4 - 1 = 0$$

  La solución positiva de esta ecuación es $a = 1$.

---

4. Segundo examen de derivadas

Ejercicio 1. *Calcular los siguientes límites:*

- $\diamond \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$
- $\diamond \lim_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}(1+x)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2} &= \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2(\ln x)\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{2\ln x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{\frac{2}{x}}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Se ha aplicado la regla de l'Hopital y las equivalencias $\ln(1+x)\sim x$ y $\operatorname{sen}(x-1)\sim x-1$.

Ejercicio 2. *Hallar las tangentes a la curva* $y=\dfrac{2x}{x-1}$ *paralelas a la recta* $2x+y=0$.

Solución:

Como la pendiente de la recta tangente es -2, la derivada de la función en el punto de tangencia debe valer -2. Entonces, en es punto:

$$y'=\frac{2(x-1)-1\cdot 2x}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}=-2 \quad\Longrightarrow\quad (x-1)^2=1 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}x_1=2\\ x_2=0\end{cases}$$

Para $x_1=2$, $y_1=4$. La ecuación de la tangente es:

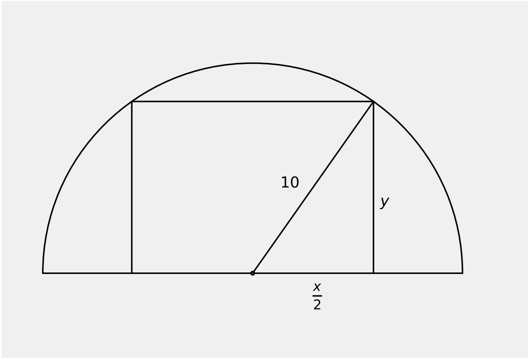
$$y-4=-2(x-2)$$

y para $x_2=0$, $y_2=0$ y la tangente es:

$$y=-2x$$

Ejercicio 3. *Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene su base sobre el diámetro de una circunferencia de* 10 *m de radio y los otros dos vértices sobre la circunferencia.*

Solución:



La función que ha de ser máxima es el área (o su cuadrado):

$$S = x \cdot y = x\sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} \qquad \Longrightarrow \qquad S^2 = x^2\left(100 - \frac{x^2}{4}\right) = 100x^2 - \frac{x^4}{4}$$

Derivando e igualando a cero:

$$\left(s^2\right)' = 200x - \frac{4x^3}{4} = 200x - x^3 = x(200 - x^2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x = 10\sqrt{2} \end{cases}$$

La solución $x = 0$ no se corresponde evidentemente con ningún máximo del área. La solución válida es:

$$x = 10\sqrt{2} \qquad y = 5\sqrt{2}$$

Ejercicio 4. *Hallar los coeficientes a, b, c y d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = -3x + 3$ y que la función tiene un extremo relativo en $x = 0$.*

Solución:

Las derivadas de la función son:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Las condiciones del problema son las siguientes:

- La curva pasa por el punto $(1, 0)$:

$$f(1) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a + b + c + d = 0$$

- La derivada primera en $x = 1$ es -3 (la pendiente de la recta tangente):

$$3a + 2b + c = -3$$

- La derivada segunda en $x = 1$ es cero (por ser punto de inflexión)

$$6a + 2b = 0$$

- Finalmente, la derivada en $x = 0$ debe valer 0:

$$c = 0$$

Resolviendo el sistema resulta $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 2$.

Ejercicio 5. *Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la curva $y = xe^x$.*

Solución:

Calculamos la derivada segunda:

$$\begin{aligned} y' &= e^x + e^x x = (x+1)e^x \\ y'' &= e^x + e^x(x+1) = (x+2)e^x \end{aligned}$$

El único cero de la derivada segunda es $x = -2$. El signo de la derivada segunda es (hay que tener en cuenta que e^x siempre es positivo):

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ - & \vert & + \\ & -2 & \end{array}$$

Así pues, la función es convexa en $(-\infty, -2)$ y es cóncava en $(2, \infty)$. El punto $\left(-2, -2e^{-2}\right)$ es un punto de inflexión.

Ejercicio 6. *Calcula a, b y c para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x < 3 \\ bx + c & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 8]$. Calcular el punto cuya existencia asegura el citado teorema.

Solución:

Para que se cumplan las tres hipótesis del teorema de Rolle, debe ocurrir:

- $f(0) = f(8) \quad \Longrightarrow \quad 0 = 8b + c$
- La función debe ser continua en el intervalo cerrado $[0, 8]$. Para que sea continua en $x = 3$, debe ocurrir que:

  $$9 + 3a = 3b + c$$

- La función debe ser derivable en $(0, 8)$. Para $x \neq 3$ la derivada de la función es:

  $$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 3 \\ b & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

  Si la función ha de ser derivable en $x = 3$:

  $$f'(3^-) = f'(3^+) \quad \Longrightarrow \quad 6 + a = b$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones resulta:

$$a = -\frac{39}{8}, \quad b = \frac{9}{8}, \quad c = -9$$

El teorema de Rolle asegura que debe existir al menos un punto de derivada cero. Este punto lo obtenemos igualando a cero la derivada:

$$2x - \frac{39}{8} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{39}{16}$$

Ejercicio 7. *Representar gráficamente la función*

$$y = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

calculando las asíntotas y analizando el crecimiento y decrecimiento.

Solución:

Para calcular las asíntotas efectuamos la división:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & & & & & & & x^2-2x+1 \\ \cline{8-8}
-x^3 & + & 2x^2 & - & x & & & x+2 \\ \cline{1-5}
 & & 2x^2 & - & x & & & \\
 & - & 2x^2 & + & 4x & - & 2 & \\ \cline{2-7}
 & & & & 3x & - & 2 &
\end{array}$$

Entonces:

$$y = \frac{x^3}{(1-x)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(1-x)^2}$$

22Las asíntotas son $x = 1$ y $y = x + 2$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento calculamos la derivada:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot (1-x)^2 - 2(1-x)(-1)x^3}{(1-x)^4} = \frac{3x^2 \cdot (1-x) + 2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$$

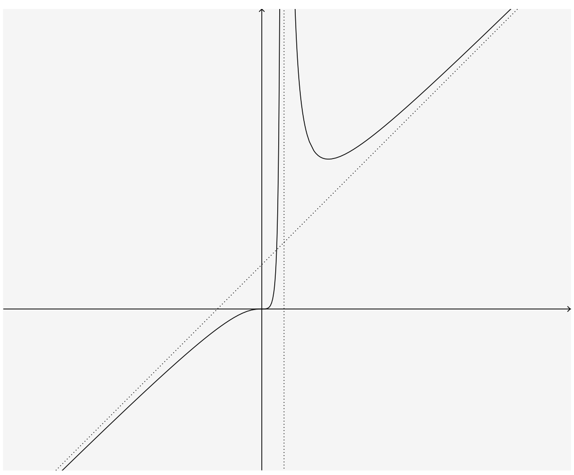
Las raíces del numerador son $x = 0$ (doble) y $x = 3$ (simple). La raíz del denominador es $x = 1$ (triple).

El signo de la derivada responde al siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & \nexists & & 0 & \\
+ & | & + & | & - & | & + \\
 & 0 & & 1 & & 3 &
\end{array}$$

La función es creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(3, \infty)$. Hay que notar que en $x = 0$ la derivada es cero y, por consiguiente, es un punto de tangente horizontal. Puesto que la función es creciente a la izquierda y a la derecha también es creciente en ese punto. Se trata de un punto de inflexión de tangente horizontal. La función es decreciente en $(1, 3)$. La función tiene un mínimo local en $\left(3, \frac{27}{4}\right)$.

Con estos datos tenemos la siguiente gráfica:



5. Integrales

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C = \frac{5\sqrt[5]{x^4}}{4} + C$

2. $\displaystyle\int (x^2+4)x(x^2-1)\,dx = \int (x^5+3x^3-4x)\,dx = \frac{x^6}{6} + \frac{3x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} + C$

3. $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x + e^x)\,dx = -\cos x + e^x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{7}{\cos^2 x}\,dx = 7\operatorname{tg} x + C$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arsen} x + C$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-4)^2} = \int (x-4)^{-2}\,dx = \frac{(x-4)^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{x-4} + C$

8. $\displaystyle\int e^{x-4}\,dx = e^{x-4} + C$

9. $\displaystyle\int (3^x - x^3)\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{x^4}{4} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{4x^2+1} = 5\int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{5}{2}\operatorname{artg} 2x + C$

11. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+4}{x+1}\,dx = \int \left(x+1+\frac{3}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x+1| + C$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \operatorname{arsen}\frac{x}{2} + C$

13. $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,dx$

    Haciendo el cambio $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$, $dx = \frac{dt}{2x}$, resulta:

    $$\int 2xe^{x^2}\,dx = \int 2xe^t\frac{dt}{2x} = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{x^2} + C$$

14. $\displaystyle\int x^4e^{x^5}\,dx$

    Haciendo $t = x^5$, $dt = 5x^4\,dx$, $dx = \frac{dt}{5x^4}$, se obtiene:

    $$\int x^4e^{x^5}\,dx = \int x^4e^t\,\frac{dt}{5x^4} = \frac{1}{5}\int e^t\,dt = \frac{1}{5}\,e^t + C = \frac{1}{5}\,e^{x^5} + C$$

15. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$

    Con el cambio $t = x^2+5$, $dt = 2x\,dx$, $dx = \frac{dt}{2x}$, se obtiene:

    $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}} = \int \frac{x}{\sqrt{t}}\,\frac{dt}{2x} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

16. $\displaystyle\int \sqrt{(x+3)^5}\, dx = \int (x+3)^{\frac{5}{2}}\, dx = \frac{(x+3)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2\sqrt{(x+3)^7}}{7} + C$

17. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx$

Haciendo el cambio $t = \operatorname{tg} x$, $dt = \sec^2 x\, dx$, $dx = \frac{dt}{\sec^2 x}$:

$$\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx = \int t \sec^2 x \frac{dt}{\sec^2 x} = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$$

18. $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\, dx$

Por partes

$$\begin{cases} u = x^2 & du = 2x\, dx \\ dv = e^{3x} & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases} \implies \int x^2 e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x} dx$$

Integrando de nuevo por partes

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^{3x} & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x}\, dx &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}x e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C \end{aligned}$$

19. $\displaystyle\int x \cos x\, dx$

Por partes:

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = \cos x\, dx & v = \operatorname{sen} x \end{cases} \implies \int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

20. $\displaystyle\int \operatorname{arcos} x\, dx$

Integrando por partes

$$\begin{cases} u = \operatorname{arcos} x & du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx & v = x \end{cases}$$

se obtiene:

$$\int \operatorname{arcos} x\, dx = x \operatorname{arcos} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

La última integral se resuelve mediante es cambio $t = 1 - x^2$, $dt = -2x\, dx$, $dx = \frac{-dt}{2x}$:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arcos} x\, dx &= x \operatorname{arcos} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= x \operatorname{arcos} x + \int \frac{x}{\sqrt{t}} \frac{-dt}{2x} \\ &= x \operatorname{arcos} x - \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt \\ &= x \operatorname{arcos} x - \sqrt{t} + C \\ &= x \operatorname{arcos} x - \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

6. Segundo examen de integrales

Ejercicio 1. *Calcular la integral*

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx$$

Solución:

Dividimos los polinomios

$$\begin{array}{rrrr|l} & x^2 & & +\ 1 & x^2-x \\ \cline{5-5} - & x^2 & +\ x & & 1 \\ \cline{1-4} & & x & +\ 1 & \end{array}$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx = \int \left(1+\frac{x+1}{x^2-x}\right)\,dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$

De aquí que:

$$A(x-1)+Bx = x+1 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=1 & B=2 \\ x=0 & A=-1 \end{cases}$$

Entonces:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx = \int \left(1+\frac{x+1}{x^2-x}\right)\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)\,dx = x - \ln x + 2\ln(x-1) + C$$

Ejercicio 2. *Calcular la siguiente integral definida:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}dx$$

Solución:

Se trata de una integral del tipo $\int \frac{u'}{u}dx$. Por consiguiente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}dx = \Big[\ln(2-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(2-\cos\frac{\pi}{3}) - \ln(2-\cos 0) = \ln\frac{3}{2}$$

Ejercicio 3. *Calcular el área comprendida por la curva $y = xe^{2x}$, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$.*

Solución:

La curva corta al eje de abscisas en el punto 0 que está dentro del intervalo $[-1,1]$. Por eso tendremos que integrar por separado entre -1 y 0, y entre 0 y 1.

Calculemos en primer lugar una primitiva de la función. Por partes, haciendo:

$$\begin{aligned} u &= x & du &= dx \\ dv &= e^{2x}dx & v &= \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Entonces:

$$\int_{-1}^{0} xe^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{4}e^{-2} = \frac{3e^{-2}-1}{4}$$

$$\int_{0}^{1} xe^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{4}e^{2} + \frac{1}{4} = \frac{e^{2}+1}{4}$$

La primera integral es negativa, así que el área es igual a la integral cambiada de signo. El área total es:

$$S = \frac{1-3e^{-2}}{4} + \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2+2-3e^{-2}}{4}$$

Ejercicio 4. *Calcular la integral:*

$$\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$$

Solución:

Calculamos en primer lugar una primitiva. Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= \ln x & du &= \frac{1}{x}dx \\ dv &= x^3dx & v &= \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

resulta:

$$\int x^3\ln x\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

Calculamos ahora la integral definida:

$$\int_1^2 x^3\ln x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4\right]_1^2 = (4\ln 2 - 1) - \left(-\frac{1}{16}\right) = 4\ln 2 - \frac{15}{16}$$

Ejercicio 5. *Utilizar el cambio de variable $x = e^t - e^{-t}$ para calcular:*

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Indicación: Para deshacer el cambio de variable, utilizar:

$$t = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

Solución:

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x = e^t - e^{-t} \quad &\Longrightarrow \quad dx = (e^t+e^{-t})dt \\ 4+x^2 = 4+e^{2t}+e^{-2t}-2e^te^{-t} &= e^{2t}+e^{-2t}+2 = (e^t+e^{-t})^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \int \frac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}}dt = \int dt = t + C = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} + C$$

Ejercicio 6. *Hallar el volumen del sólido formado cuando la región bajo la gráfica de* $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ *en el intervalo* $[0, \pi]$*, gira alrededor del eje de abscisas.*

Solución:

$$V = \pi \int_0^\pi y^2\,dx = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = \Big[-\pi\cos x\Big]_0^\pi = \pi - (-\pi) = 2\pi$$

---

7. Nuevo examen de integrales

Ejercicio 1. *Calcular las siguientes integrales:*

1. $\displaystyle\int x(\ln x)^2\,dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}\,dx$

Solución:

◇ Integramos por partes:

$$u = (\ln x)^2 \qquad du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$
$$dv = xdx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

y resulta:

$$\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{2}\,x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\,2\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2(\ln x)^2 - \int x\ln x\,dx$$

Integrando de nuevo por partes con:

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$dv = xdx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

resulta:

$$\begin{aligned}\int x(\ln x)^2\,dx &= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \left(\frac{1}{2}\,x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\,x^2\ln x + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + C\end{aligned}$$

◇ Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

de donde

$$A(x-2)+B(x-1) = 2x-1$$

Para $x = 1$ resulta $A = -1$ y para $x = 2$ resulta $B = 3$. Por consiguiente:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-2}\right)dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$$

Ejercicio 2. *Calcular las integrales:*

1. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

Solución:

◇ Utilizamos el cambio de variable:

$$x = t^2 \quad \Longrightarrow \quad dx = 2t\, dt$$

y resulta

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1-t}{1+t}\, 2t\, dt = 2\int \frac{-t^2+t}{t+1}\, dt$$

Haciendo la división:

$$= \int \left(-t+2-\frac{2}{t+1}\right)\, dx = -\frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|t+1| + C$$

y deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx = -\frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$$

◇ El denominador no tiene raíces. Escribimos como suma de cuadrados

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\, dx \\ &= \int \frac{1}{(\sqrt{2})^2+(x+1)^2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{artg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C\end{aligned}$$

Ejercicio 3. *Halla el punto en el que la función* $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}\, dt$ *alcanza su valor mínimo.*

Solución:

Por el teorema fundamental del cálculo integral:

$$F'(x) = \frac{x-1}{1+x^2}$$

que se anula en $x = 1$. La derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de este número. En $x = 1$ se encuentra, por consiguiente, el mínimo de la función.

Ejercicio 4. *Halla el área de la región comprendida entre las parábolas* $y = x^2$ *e* $y = -2x^2 + 3$.

Solución:

Los puntos de corte de las dos curvas están en $x = -1$ y $x = 1$. Integramos entre estos dos puntos la diferencia de las dos funciones y obtenemos:

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + 2x^2 - 3)\, dx = \int_{-1}^{1} (3x^2 - 3)\, dx = \left[\frac{3x^3}{3} - 3x\right]_{-1}^{1} = -4$$

Por tanto, el área es igual a 4.

Ejercicio 5.

◇ Halla la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$.

◇ Calcula el área del recinto limitado por dicha recta tangente y la curva dada.

Solución:

◇ Para $x = -1$ la ordenada vale $y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$.
La derivada es $y' = 3x^2 - 3$. Por tanto la pendiente de la tangente es:

$$m = y'(-1) = 0$$

La ecuación de la recta tangente es $y = 2$.

◇ Tenemos que calcular el área entre $y = 2$ e $y = x^3 - 3x$. Calculamos en primer lugar los puntos de corte entre ambas gráficas:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x^3 - 3x - 2 = 0$$

Sabemos que una solución es $x = -1$. Esto quiere decir que el polinomio se puede factorizar por $x + 1$. Dividiendo por $x + 1$ resulta:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

La ecuación factorizada es $(x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$ que tiene dos soluciones $x = -1$ y $x = 2$. Estos son los límites de la integral.

Integramos entre estos dos números la diferencia de las dos funciones:

$$\int_{-1}^{2} (x^3 - 3x - 2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} = \Big(4 - 6 - 4\Big) - \Big(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\Big) = -\frac{27}{4}$$

El área es entonces igual a $\frac{27}{4}$.

---

8. Matrices y sistemas

Ejercicio 1. *Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

◇ *Calcular los valores del parámetro m para los que la matriz A no tiene inversa.*

◇ *Para $m = 0$ calcular A^3 y A^{25}.*

◇ *Para $m = 0$, calcula la matriz X que verifica $XA = B$ siendo $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.*

Solución:

◇ Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

El determinante se anula para $m = -1$ y $m = 1$. Para estos valores de m, no existe la matriz inversa.

◇ Calculamos las potencias:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A^3 = -I \implies A^6 = I \implies A^{24} = (A^6)^4 = I \implies A^{25} = A^{24}A = A$$

◇ Despejando X obtenemos $X = BA^{-1}$. Debemos calcular A^{-1}. En realidad ya la hemos calculado puesto queda

$$A^3 = -I \implies A \cdot A^2 = -I \implies A \cdot (-A^2) = I$$

Por consiguiente:

$$A^{-1} = -A^2 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y entonces:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. *Resuelve la ecuación matricial $AX + B^t = C^t$ donde:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución:

Despejando la incógnita tenemos que:

$$X = A^{-1}(C^t - B^t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de A y obtenemos

$$-\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices resulta:

$$X = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 9 & 45 \\ -12 & -24 \\ 6 & -54 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. *Se considera la función:*

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Sabiendo que $f(0) = -3$ y $f(1) = f(-1)$, determinar a y b.

Solución:

Calculamos:

$$f(0) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3b$$

Puesto que $f(0) = -3$ resulta que $b = -1$.

Entonces:

$$f(1) = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a-3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a-3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2a - 3 + a - 1 = -a - 4$$

Calculamos ahora $f(-1)$:

$$f(-1) = \begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -2a+1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -2a+1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & -2a+4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a - 4$$

Igualando:

$$f(1) = f(-1) \quad \Longrightarrow \quad -a - 4 = a - 4 \quad \Longrightarrow \quad a = 0$$

Ejercicio 4. *Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema según los valores del parámetro k:*

$$\begin{aligned} kx + ky - z &= 2 \\ 3x - ky \phantom{{}+2z} &= 0 \\ 5x + ky \phantom{{}+2z} &= 0 \\ x \phantom{{}+ky} + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} k & -1 & 2 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -40k$$

El determinante es cero para $k = 0$. Por consiguiente:

- $\diamond$ Si $k \neq 0$ el rango de la matriz ampliada es 4 y el rango de la matriz de coeficientes es 3. El sistema es incompatible.
- $\diamond$ Si $k = 0$:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rango}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rango}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

El rango de la matriz ampliada es 3 y el de la matriz de coeficientes es 2 (puesto que tiene una columna de ceros). El sistema también es incompatible para $k = 0$.

Ejercicio 5. *Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales y resolverlo en el caso en que sea compatible indeterminado:*

$$\begin{aligned} ax - y - 4z &= 1 \\ x + ay - 2z &= -1 \\ y + z &= -a \end{aligned}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & -4 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 4 + 2a + 1 = a^2 + 2a - 3$$

El determinante se anula para $a = -3$ y $a = 1$. Pueden presentarse los siguientes casos:

- $\diamond$ Para $a \neq -3$ y $a \neq 1$ el rango de las matrices de coeficientes y ampliada es 3. El sistema es conpatible determinado.
- $\diamond$ Para $a = -3$ tenemos:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \operatorname{rango}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Puede verse que el determinante de esta matriz es distinto de cero. Por consiguiente, el rando de la matriz ampliada es 3 y el de la matriz de coeficientes es 2. El sistema es incompatible.

- $\diamond$ Para $a = 1$

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

puesto que la última columna es igual a la segunda por -1 y las tres primeras sabemos que son dependientes. El rango de ambas matrices es 2 y el sistema es compatible determinado.

Resolvamos el sistema para $a = 1$:

$$\begin{aligned} x - y - 4z &= 1 \\ x + y - 2z &= -1 \\ y + z &= -1 \end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones son independientes. Tomando $z = t$ como parámetro resulta:

$$x = 3t,\ y = -1 - t,\ z = t$$

---

9. Segundo examen de álgebra

Ejercicio 1. *Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

se pide:

- ◇ *Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.*
- ◇ *Resolverlo para el caso $k = 3$.*

Solución:

- ◇ Para que el sistema tenga soluciones distinta de la trivial, el rango de la matriz de coeficientes debe ser menor que 3. Por consiguiente debe ser cero el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} = -k + 2k + 8 - 1 + 8 - 2k^2 = -2k^2 + k + 15 = 0$$

ecuación que tiene como soluciones $k = 3$ y $k = -\frac{5}{2}$.

- ◇ Para $k = 3$ el rango de la matriz es 2. Como las dos primeras ecuaciones son independientes, el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Tomamos $z = t$ como parámetro y resulta:

$$\begin{cases} x + 3y = t \\ 2x - y = -2t \end{cases}$$

y resolviendo este sistema calculamos la solución $\left(-\frac{5t}{7}, \frac{4t}{7}, t\right)$.

Ejercicio 2. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- ◇ *Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.*
- ◇ *Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.*

Solución:

- ◇ Calculamos A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Entonces, $A^2 = aA + bI$ quiere decir que:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & -2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

ecuación matricial equivalente al sistema:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a=-1 \\ a=-1 \\ -2a+b=5 \end{cases}$$

que tiene como solución $a=-1$ y $b=3$.

- Tenemos la igualdad $A^2=-A+3I$. Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que las matrices A e I conmutan:

$$\begin{aligned} A^4 &= (-A+3I)^2 \\ &= A^2-6A+9I \\ &= -A+3I-6A+9I \\ &= -7A+12I \end{aligned}$$

Multiplicando por A:

$$\begin{aligned} A^5 &= -7A^2+12A \\ &= -7(-A+3I)+12A \\ &= 19A-21I \end{aligned}$$

Y sustituyendo A e I resulta:

$$A^5=\begin{bmatrix} -2 & 19 \\ 19 & 17 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. *Dada la matriz:*

$$A=\begin{bmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- *Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m.*
- *En el caso $m=0$, resolver el sistema.*

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

- Calculamos el determinante formado por las tres primeras columnas:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 2(m-1)^2+m+m-m(m-1)-m(m-1)-2 \\ &= 2m^2-4m+2+2m-2m^2+2m-2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que las 3 primeras columnas son dependientes sea cual sea el valor de m. Efectivamente podemos ver que la tercera es la suma de las dos primeras. Podemos suprimirla para calcular el rango y calcular el determinante formado por las dos primeras y la cuarta columnas:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} &= (m-1)^3 + 1 + 1 - (m-1) - (m-1) - (m-1) \\ &= m^3 - 3m^2 + 3m - 1 + 2 - 3m + 3 \\ &= m^3 - 3m^2 + 4\end{aligned}$$

que se anula para $m = -1$ y $m = 2$.

Para $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el rango de la matriz es 3.

Para $m = -1$ tenemos:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{rango}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

Para $m = 2$:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

◇ Para $m = 0$ tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + y + t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

No podemos tomar t como parámetro porque la matriz de coeficientes del sistema que resulta tiene determinante igual a cero. Tomemos $z = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} -x + y + t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ x + y - t = -2\lambda \end{cases}$$

Este sistema puede resolverse por la regla de Cramer pero sumando las dos primeras ecuaciones se ve que $t = 0$. Sumando la primera y le tercera se obtiene $y = -\lambda$ y sumando la segunda y la tercera $x = \lambda$. La solución es entonces $(-\lambda, -\lambda, \lambda, 0)$.

Ejercicio 4. *Dado el sistema:*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- ◇ *Estudiar la compatibilidad del sistema.*
- ◇ *Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.*
- ◇ *Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.*

Solución:

◇ Las matrices de coeficientes y ampliada tienen rango 2. Como el sistema tiene 3 incógnitas es compatible indeterminado.

- Debemos añadir una ecuación independiente de las anteriores. Por ejemplo, $x = 0$:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es distinto de cero. El rango es 3 y el sistema es compatible determinado.

- Añadimos una ecuación contradictoria con cualquiera de las otras dos. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

y el sistema es incompatible. Puede comprobarse que el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3.

10. Geometría

Ejercicio 1. *Sean las rectas:*

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

Solución:

Calculamos el vector director de la perpendicular común:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -5, -4)$$

Calculamos ahora el plano que contiene a la recta r y a la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 3 \\ y-2 & 1 & -5 \\ z & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -7x - 5y + z + 3 = 0$$

y el plano que contiene a la recta s y a la perpendicular común:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ y+1 & 1 & -5 \\ z+2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + 15y - 18z - 23 = 0$$

La perpendicular común a las dos rectas es la intersección de los dos planos calculados:

$$\begin{cases} -7x - 5y + z + 3 = 0 \\ x + 15y - 18z - 23 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. *Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\vec{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.*

Solución:

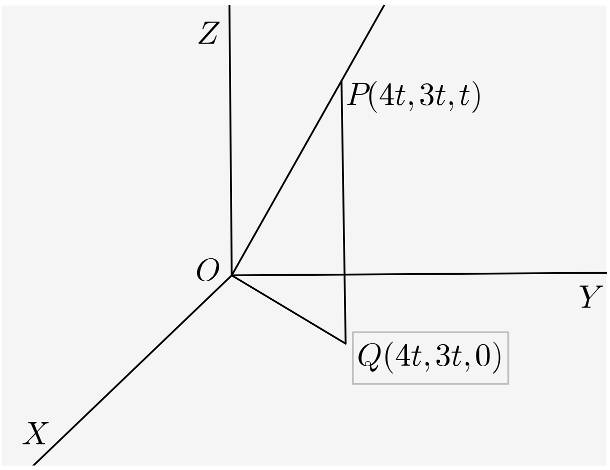


Figura 1: Problema 2

Puesto que la recta pasa por el origen y tiene como vector director $\vec{v} = (4,3,1)$ sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

Podemos escribir el punto P como $P(4t,3t,t)$ para un cierto valor de t. Su proyección sobre el plano $z = 0$ será el punto $Q(4t,3t,0)$ (ver figura 1). El área del triángulo puede calcularse como la mitad del módulo del producto vectorial:

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4t & 3t & t \\ 4t & 3t & 0 \end{vmatrix} = (-3t^2, 4t^2, 0)$$

Entonces puesto que la mitad del módulo debe ser igual 1:

$$\frac{1}{2}|(-3t^2,4t^2,0)| = \sqrt{9t^4+16t^4} = 5t^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad t = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Los puntos son:

$$P_1\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) \quad ; \qquad P_2\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$$

Ejercicio 3. *Dados el punto $A(1,-2,-3)$, la recta*

$$r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

y el plano $\pi:\ x - 2y - 3z + 1 = 0$ se pide:

- *Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.*
- *Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.*

Solución:

- Si el plano es paralelo a r, el vector director de la recta es vector director del plano. Si es perpendicular al plano π, el vector normal a este plano, es vector director del plano que buscamos. Como además este plano debe contener el punto $A(1,-2,-3)$, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+2 & 1 & -2 \\ z+3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x + 3y - z = 0$$

- Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

un punto de esta recta es $P(-1,0,0)$ y un vector director es $\vec{v} = (-1,1,0)$.

Si la recta buscada pasa por A y corta a r debe estar en el plano determinado por A y r. Los vectores directores de este plano son el vector director de la recta $\vec{v} = (-1,1,0)$ y el vector $\overrightarrow{AP} = (-2,2,3)$. La ecuación de este plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & -2 \\ y & 1 & 2 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3(x+1) + 3y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x + 3y + 3 = 0$$

que podemos escribir como $x + y + 1 = 0$.

Si la recta pasa por A y es paralela a π, debe estar contenida en el plano paralelo a π por A:

$$1(x-1) - 2(y+2) - 3(z+3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 2y - 3z - 14 = 0$$

La recta buscada es la intersección de los dos planos:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - 2y - 3z - 14 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. *Dadas las rectas:*

$$r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- ⋄ *Discutir la posición relativa de las dos rectas según los valores del parámetro a.*
- ⋄ *Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las rectas r y s.*

Solución:

- ⋄ En primer lugar escribimos las ecuaciones de las rectas en paramétricas y obtenemos un punto y un vector director de cada una de ellas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + at \\ y = t \\ z = 1 - at \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 3 - s \\ z = s \end{cases}$$

La recta r queda determinada por el punto $P_1(2,0,1)$ y el vector $\vec{u_1} = (a, 1, -a)$. La segunda por el punto $P_2(1,3,0)$ y el vector $\vec{u_2} = (1,-1,1)$. Calculamos $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,-3,1)$. La posición relativa depende del determinante:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ -a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4a$$

Si $a \neq 0$ el determinante es distinto de cero y las rectas se cruzan. Si $a = 0$ las dos rectas son coplanarias. Puesto que no son paralelas, se cortan.

- ⋄ Para $a = 1$, el producto mixto $[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u_1}, \vec{u_2}] = 4$.

Calculamos el producto vectorial de los dos vectores directores:

$$\vec{u_1} \times \vec{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, -2)$$

La distancia entre las rectas es:

$$d = \frac{[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u_1}, \vec{u_2}]}{|\vec{u_1} \times \vec{u_2}|} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

Ejercicio 5. *Dados el plano:*

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

- ◇ *Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.*
- ◇ *Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 y π_2 tenga una longitud de $\sqrt{29}$ unidades.*

Solución:

- ◇ Escribimos la ecuación de la recta en paramétricas y resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4t \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

que tiene como solución el punto $P(3, 2, -4)$.

- ◇ Un plano paralelo al dado tiene por ecuación $x + y + z = D$. Su intersección con la recta es:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4t \\ x + y + z = D \end{cases} \Longrightarrow \quad 1 + 2t - 1 + 3t - 4t = D \quad \Longrightarrow \quad t = D$$

de forma que el punto de intersección es $Q(1 + 2D, -1 + 3D, -4D)$. La distancia PQ es:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(1 + 2D - 3)^2 + (-1 + 3D - 2)^2 + (-4D + 4)^2} \\ &= \sqrt{(2D - 2)^2 + (3D - 3)^2 + (-4D + 4)^2} \\ &= \sqrt{29D^2 - 58D + 29} \end{aligned}$$

Como la distancia debe ser $\sqrt{29}$ se cumple que:

$$29D^2 - 58D + 29 = 29 \quad \Longrightarrow \quad D^2 - 2D = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} D = 0 \\ D = 2 \end{cases}$$

Las soluciones son los planos $x + y + z = 0$ y $x + y + z = 2$.

Ejercicio 6. *Dado el plano $\pi : \ x + 3y + z = 4$, se pide:*

- ◇ *Calcular el punto simétrico P del punto $O(0, 0, 0)$ respecto del plano π.*
- ◇ *Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.*

Solución:

- ◇ La recta perpendicular al plano por el origen es:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

y su intersección con el plano:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = t \\ x + 3y + z = 4 \end{cases} \Longrightarrow \quad t = \frac{4}{11}$$

y el punto de intersección es $Q\left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{4}{11}\right)$.
El punto Q es el punto medio entre el origen y su simétrico O'. De aquí deducimos que $O'\left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$.

◇ Tenemos que calcular el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados. Calculamos los vértices como intersección de los planos y resultan ser:

$$O(0,0,0)\ ; \quad A(4,0,0)\ ; B\left(0,\frac{4}{3},0\right) \ ; \quad C(0,0,4)$$

El volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=\frac{32}{9}$$