1. Examen de matrices y determinantes

Ejercicio 1. *Halla todas las matrices X no nulas de la forma*

$$X = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

tales que $X^2 = X$.

Solución:

Puesto que:

$$X^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$X^2 = X \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

y de aquí:

$$\begin{aligned} a^2 &= a \\ a+b &= 1 \\ b^2 &= b \end{aligned}$$

Las soluciones de este sistema son $a = 0,\ b = 1$ y $a = 1,\ b = 0$.

Ejercicio 2.

a) *Halla todos los valores de a para los que existe la matriz inversa de:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) *Calcula A^{-1} para $a = 0$.*

Solución:

La matriz tiene inversa para todos los valores de a que hagan que el determinante de A sea distinto de cero. Igualando a cero el determinante de A resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = 0$$

Esta ecuación de tercer grado es sencilla de resolver puesto que sus soluciones son enteras. No obstante, aplicando las propiedades de los determinantes es fácil factorizar el polinomio. Sumando a la primera columna las otra dos resulta:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \\ a+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{(sacando factor común } a+2\text{)} \\
&= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{(restando la tercera fila a las otras dos)} \\
&= (a+2)\begin{vmatrix} 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{(y desarrollando por la primera columna)} \\
&= (a+2)(a-1)^2
\end{aligned}$$

Igualando a cero el determinante resulta $a = -2$ y $a = 1$. Por consiguiente, existe la matriz inversa para todos los valores de a salvo para estos dos.

Calculemos ahora la matriz inversa para $a = 0$. En este caso $|A| = 2$. Calculamos la matriz adjunta y su traspuesta:

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{Adj } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa se obtiene dividiendo esta matriz por el determinante de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.

a) Averigua cuál es el rango de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

b) ¿Cuál es el número de columnas linealmente independientes de la matriz A?

Solución:

El rango debe ser menor o igual que 3 puesto que la matriz tiene 3 filas. Claramente se ve que pueden formarse con las filas y columnas de la matriz determinantes de orden dos distintos de cero de modo que el rango será 2 ó 3. Sumando a la primera fila la tercera multiplicada por -2 resulta:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

y el rango es igual a 3 puesto que el determinante formado por las tres últimas columnas es claramente distinto de cero.

El número de columnas linealmente independientes es el rango de la matriz y es, por tanto, igual a 3.

Ejercicio 4. *Halla el valor del siguiente determinante*

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Antes de desarrollar por los elementos de una línea sumamos a la tercera fila la primera y a la cuarta la primera multiplicada por 2. Así se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} && \text{(desarrollando por la segunda columna)} \\ &= -(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} && \text{(calculando el determinante de orden 3)} \\ &= 18 + 4 - 24 + 8 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Ejercicio 5. *Halla en función de a el valor de este determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$$

Solución:

En la segunda columna puede sacarse factor común a^2-1:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2(a^2-1) & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} && \text{(sacando factor común)} \\
&= (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} && \text{(calculando el determinante)} \\
&= (a^2-1)(2a^2+2a-1-2a-a^2) \\
&= (a^2-1)(a^2-1) \\
&= (a^2-1)^2
\end{aligned}$$

Ejercicio 6. *Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:*

a)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & y \\ a & p & q \end{vmatrix} = \frac{a}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ b & x & p \\ c & y & q \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

La primera igualdad es cierta puesto que, sacando factor común a de la primera columna se tiene:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & y \\ a & p & q \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & y \\ 1 & p & q \end{vmatrix} && \text{(trasponiendo la matriz)} \\
&= a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & x & p \\ c & y & q \end{vmatrix} && \text{(multiplicando y dividiendo por 2)} \\
&= \frac{a}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ b & x & p \\ c & y & q \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

La segunda igualdad también es cierta puesto que en el determinante la tercera fila es igual a 2 veces la primera menos la segunda ($F_3 = 2F_1 - F_2$). Las filas son dependientes y el determinante es cero.

2. Segundo examen de matrices y determinantes

Ejercicio 1.

Halla la matriz X^2+Y^2, donde X e Y son dos matrices cuadradas de orden 2 que verifican:

$$5X+3Y=\begin{bmatrix}2&0\\4&15\end{bmatrix}\qquad 3X+2Y=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&9\end{bmatrix}$$

Solución:

Multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por 3 resulta:

$$10X+6Y=\begin{bmatrix}4&0\\8&30\end{bmatrix}\qquad 9X+6Y=\begin{bmatrix}3&-3\\-6&27\end{bmatrix}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$X=\begin{bmatrix}1&3\\14&3\end{bmatrix}$$

La matriz Y puede obtenerse sustituyendo X en cualquiera de las ecuaciones:

$$2Y=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&9\end{bmatrix}-3X=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&9\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&3\\14&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-10\\-44&0\end{bmatrix}\implies Y=\begin{bmatrix}-1&-5\\-22&0\end{bmatrix}$$

Entonces:

$$X^2+Y^2=\begin{bmatrix}1&3\\14&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\14&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-5\\-22&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-5\\-22&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43&12\\56&51\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}111&5\\22&110\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}154&17\\78&161\end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.

1. *Estudia para qué valores de λ existe la matriz inversa de:*
$$\begin{bmatrix}1&1&1\\\lambda&0&2\\2&-1&\lambda\end{bmatrix}$$
2. *Calcula A^{-1} para $\lambda=0$.*

Solución:

La matriz tiene inversa para todos los valores de λ para los que el determinante es distinto de cero. Calculando el determinante e igualando a cero:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\\lambda&0&2\\2&-1&\lambda\end{vmatrix}=-\lambda+4+2-\lambda^2=-\lambda^2-\lambda+6=0\implies\left\{\begin{array}{l}\lambda=-3\\\lambda=2\end{array}\right.$$

El determinante es distinto de cero y por consiguiente la matriz tiene inversa para todos los valores de λ distintos de -3 y 2.

Calculemos ahora la inversa de $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&2\\2&-1&0\end{bmatrix}$:

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}2&4&0\\-1&-2&3\\2&-2&0\end{bmatrix},\qquad \operatorname{adj}A^t=\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&-2\\0&3&0\end{bmatrix}$$

y dividiendo por $|A|=6$ resulta:

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&-2\\0&3&0\end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.

1. *Calcula el rango de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. *En la matriz anterior ¿se puede expresar la tercera fila como combinación lineal de las otras dos? ¿por qué?*

Solución:

Sumando a la tercera fila la primera:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

porque el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ es claramente distinto de cero.

La tercera fila no puede ser combinación lineal de las otras dos porque, puesto que el rango de la matriz es 3, las tres filas son independientes.

Ejercicio 4.

Halla el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

Sumando a la segunda fila la primera multiplicada por 2 y restando a la tercera fila la primera resulta:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} && \text{(desarrollando por la primera columna)} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} && \text{(calculando el determinante de orden 3)} \\
&= (-1)(30 - 28 + 2 - 21 + 10 - 8) \\
&= 15
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.

Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Solución:

Restando la primera fila a las otras tres:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)^3 \end{aligned}$$

ya que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal.

Ejercicio 6.

Sabiendo que A y B son dos matrices de orden 2 tales que $|A| = -2$ y $|B| = 4$, calcula $|AB^t|$, $|A^t|$, $|B^{-1}|$, $|A^{-1}B|$ y $|3A|$.

Solución:

Basta aplicar que el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes y, por consiguiente, el determinante de la inversa de una matriz es el inverso del determinante de esa matriz:

- $|AB^t| = |A||B^t| = |A||B| = -8$
- $|A^t| = |A| = -2$
- $B^{-1} = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4}$
- $|A^{-1}B| = |A^{-1}||B| = \frac{|B|}{|A|} = \frac{4}{-2} = -2$
- $|3A| = 9|A| = -18$

3. Examen de sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1.

Halla una matriz X, tal que $AX + B = 0$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.

Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & -4 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 3.

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & t & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & - & t & = & 1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 4.

Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & 4y & = & -6 \\ 2x & - & 3y & = & 7 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 6 \end{array} \right.$$

Ejercicio 5. *Estudia, y resuelve si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & 4y & - & z & = & -3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & + & 3z & = & 6 \\ -x & - & y & + & 2z & = & -1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 6.

Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & \lambda y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & \lambda y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

4. Segundo examen de sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1.

a) *Encuentra los valores de a para los que la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

no es inversible.

b) *Calcula A^{-1} para $a = 2$.*

Solución:

La matriz no tiene inversa cuando su determinante sea cero. Igualando a cero el determinante resulta:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2 - a - a + 2 + a(a+2) - 2 - 2a = 3a^2 - 5a + 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación, resulta que la matriz no tiene inversa para $a = 1$ y $a = \frac{3}{2}$

Calculemos ahora la inversa de la matriz para $a = 2$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{\text{t}} = \frac{1}{|\text{A}|}\text{Adj}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|\text{A}|}\text{Adj}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

y puesto que:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 - 4 - 2 = 4$$

la inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\text{Adj}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.

Expresa y resuelve el siguiente sistema en forma matricial:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ x + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

Solución:

Matricialmente, el sistema se escribe:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Despejando la matriz de incógnitas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.

Estudia la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & 5y & - & 5z & = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 \end{bmatrix} = 3 \text{ puesto que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

La matriz ampliada puede tener rango 3 o 4 dependiendo del valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 30 + 2 + 3 + 10 + 10 = 0$$

Como el determinante es cero, el rango de la matriz ampliada es 3. Ambas ´matrices tienen rango 3 igual al número de incógnitas: el sistema es compatible determinado.

Ejercicio 4.

Aplica la regla de Cramer para resolver estos sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & -5 \\ 5x & + & y & = & 1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ -3x & + & y & + & z & = & -5 \\ x & - & y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right.$

Solución:

Para el primer sistema, el determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

de modo que aplicando la regla de Cramer se obtiene:

$$x = \frac{-1}{7}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad y = \frac{-1}{7}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

De la misma forma, para el segundo sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 22$$

$$x = \frac{1}{22}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad y = \frac{1}{22}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad z = \frac{1}{22}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Ejercicio 5.

Estudia la compatibilidad de este sistema y resuélvelo si es posible:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -5 \\ x + 3y + z = -4 \\ 7x + 5y + 11z = 8 \end{cases}$$

Solución:

El rango de la matriz de coeficientes es:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 11 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 12 & -3 \end{bmatrix} = 2$$

y el rango de la matriz ampliada:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 7 & 5 & 11 & 8 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 12 & -27 \end{bmatrix} = 2$$

Ambas matrices tienen el mismo rango igual a 2. Como el número de incógnitas es 3 se trata de un sistema compatible indeterminado. Las dos primeras ecuaciones son independientes, así que eliminando la tercera ecuación que debe ser combinación lineal de las dos primeras, y pasando el término con z al segundo miembro se obtiene:

$$-x + y = -5 + 2z$$
$$+ + 3y = -4 - z$$

y resolviendo por la regla de Cramer se obtiene:

$$x = \frac{-7z + 11}{4} \qquad y = \frac{z - 9}{4}$$

solución que podemos representar por $(\frac{-7\lambda+11}{4}, \frac{\lambda-9}{4}, \lambda)$.

Ejercicio 6.

Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2 \\ x + my = 1 \\ x + my + mz = 1 \end{cases}$$

Solución:

Para calcular el rango de la matriz de coeficientes calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m^3 + m - m - m = n(m^2 - 1)$$

Este determinante es cero para $m = 0$, $m = -1$ y $m = +1$. Pueden darse los siguientes casos:

- Para todos los valores de m distintos de los anteriores la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen rango 3 igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.
- Para $m = 0$ las matriz

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

  El sistema es compatible indeterminado

◇ Para $m=-1$ la matriz de coeficientes tiene rango 2 y la matriz ampliada:

$$\text{rango}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\text{rango}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\text{rango}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=3$$

y el sistema es incompatible

◇ De la misma forma para $m=1$ el rango de la matiz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\text{rango}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\text{rango}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=3$$

y el sistema es también incompatible

5. Geometría en el espacio

Ejercicio 1.

Dados los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$, $\vec{v}(0,2,-1)$ y $\vec{w}(2,-2,1)$, se pide:

1. *El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.*
2. *Halla, si existe, el número α para que el vector $\vec{a}(\alpha,\alpha,-6)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$*

Solución:

El volumen es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

de forma que el volumen es 4.

Si $\vec{a}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los tres vectores son linealmente dependientes y el siguiente determinante debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = 3\alpha - 12 = 0$$

y α debe valer 4.

Ejercicio 2.

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$; $\vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$, halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ sea perpendicular a $\vec{b}$ y tenga el mismo módulo que $\vec{a}$.

Solución:

Podemos escribir los vectores como $\vec{a}(2,-1,0)$, $\vec{b}(1,2,-1)$ y $\vec{c}(x,y,0)$. Entonces:

$$\vec{c} \perp \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad x + 2y = 0; \qquad |\vec{c}| = |\vec{a}| \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = 5$$

Resolviendo este sistema resulta $x = -2$ e $y = 1$ ó $x = 2$ e $y = -1$.

Ejercicio 3.

Dados los vectores $\vec{u}(1,3,0)$ y $\vec{v}(2,1,1)$, se pide:

1. *Halla un vector $\vec{w}$ de módulo 1 que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.*
2. *¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$?*

Solución:

Un vector perpendicular a otros dos es su producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3,-1,-5)$$

Si además queremos que sea unitario dividimos por su módulo $\sqrt{35}$ de forma que el vector buscado es:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}} \right)$$

El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el módulo de su producto vectorial es decir $\sqrt{35}$.

Ejercicio 4.

Halla las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento de extremos $A(3,-1,2)$ y $B(-2,2,4)$ en tres partes iguales.

Solución:

El vector AB tiene de coordenadas $(-5,3,2)$. Entonces, los puntos P y Q son:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(3,-1,2)+\frac{1}{3}(-5,3,2)=\left(\frac{4}{3},0,\frac{8}{3}\right)$$

y de forma similar:

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(3,-1,2)+\frac{2}{3}(-5,3,2)=\left(-\frac{1}{3},1,\frac{10}{3}\right)$$

Ejercicio 5.

Consideramos las dos rectas:

$$r:\begin{cases} x+y+z+3=0\\ x-y-z-1=0\end{cases} \quad ; \qquad s:\frac{x+1}{2}=y+1=\frac{z+d}{-2}$$

Halla el valor de d para que las rectas se corten.

Solución:

Si se cortan, el sistema formado por las cuatro ecuaciones de las rectas debe ser compatible determinado. El rango de la matriz ampliada debe ser 3 y por consiguiente el determinate de esa matriz cuatro por cuatro debe ser cero.

Quitando denominadores en las ecuaciones de la segunda recta, el sistema es:

$$\begin{cases} x+y+z+3=0\\ x-y-z-1=0\\ x-2y=1\\ -2y-z=2+d\end{cases}$$

Para que sea compatible:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 2+d\end{vmatrix}=-4d+4=0 \quad\Longrightarrow\quad d=1$$

Ejercicio 6.

Determina en función de a la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} (a-2)x+y-z=-1\\ -ax+(2a-1)y+(-a+2)z=a\\ -x+ay+z=a\end{cases}$$

Solución:

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1\\ -a & 2a-1 & -a+2\\ -1 & a & 1\end{vmatrix}=a^3-a^2-a+1$$

Las raíces de este polinomio son $a=-1$ y $a=1$. Pueden darse los siguientes casos:

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Los tres planos tienen un único punto en común.

- Si $a = -1$ la matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  Esta matriz tiene rango 2 al igual que la matriz de coeficientes. El sistema es compatible indeterminado uniparamétrico. No hay planos paralelos y los tres planos se cortan en una recta.

- Para $a = 1$ la matriz del sistema es:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  Tanto la matriz de coeficientes como la matriz ampliada tienen rango 2, así pues, el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico y el conjunto de puntos comunes forman una recta. Hay dos planos coincidentes y un tercero que los corta.

Ejercicio 7.

Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s siendo:

$$r : \begin{cases} y = 2z - 4 \\ x = 3z - 8 \end{cases} \qquad s : \frac{x-10}{1} = \frac{y-20}{-1} = \frac{z}{1}$$

Solución:

Tomando z como parámetro, la ecuación de la primera recta puede escribirse:

$$\begin{aligned} x &= -8 + 3t \\ y &= -4 + 2t \\ z &= t \end{aligned}$$

Cualquier punto de esta recta es un punto del plano π. Como vectores directores pueden tomarse los vectores directores de ambas rectas. Así la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+8 & y+4 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6. Segundo examen de geometría

Ejercicio 1.

Calcula la distancia de $P(1,0,-1)$ *a la recta* $r:(2\lambda, 1-\lambda, -\lambda)$.

Solución:

Un punto de la recta es $Q(0,1,0)$ y el vector director es $\vec{v}(2,-1,-1)$. Entonces:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{PQ} = (-1,1,1)\\&\overrightarrow{PQ}\times\vec{v} = (0,1,-1)\end{aligned}$$

de modo que:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ejercicio 2.

Calcula la distancia entre las rectas

$$r:\begin{cases} x = 2+\lambda\\ y = -2\lambda\\ z = 5\end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 4-\mu\\ y = 2+\mu\\ z = \mu\end{cases}$$

Solución:

Obtenemos en primer lugar un punto y un vector director de cada recta:

$$\begin{array}{lll} r: & P(2,0,5) & \vec{u}(1,-2,0)\\ s: & Q(4,2,0) & \vec{v}(-1,1,1)\end{array}$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{PQ} = (2,2,-5)\\&\vec{u}\times\vec{v} = (-2,-1,-1)\end{aligned}$$

Finalmente:

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ejercicio 3.

Halla el punto simétrico de $P(2,1,0)$ *respecto del plano* $\pi: 2x-y+z=2$.

Solución:

Se calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por P:

$$r:\begin{cases} x = 2+2\lambda\\ y = 1-\lambda\\ z = \lambda\end{cases}$$

Ahora se obtiene el pie de la perpendicular , es decir, el punto de intersección de r y π. Este punto tiene por coordenadas la solución del sistema:

$$\begin{cases} x = 2+2\lambda\\ y = 1-\lambda\\ z = \lambda\\ 2x-y+z = 2\end{cases}$$

La solución es el punto $Q\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right)$. Este es el punto medio entre P y su simétrico P' de modo que:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{3} &= \frac{2+x'}{2} &\implies& \quad x' = \frac{4}{3}\\
\frac{7}{6} &= \frac{1+y'}{2} &\implies& \quad y' = \frac{4}{3}\\
-\frac{1}{6} &= \frac{0+z'}{2} &\implies& \quad z' = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.

Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2,0,1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$$

Solución:

Calculamos el plano que pasa por P y corta perpendicularmente a r:

$$2(x-2) - 1y + 2(z-1) = 0; \qquad \text{o bien} \qquad 2x - y + 2z - 6 = 0$$

La intersección de este plano con la recta es el punto Q de coordenadas:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \implies \quad Q\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ es:

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

de forma que la recta buscada es (tomando como vector director $3\overrightarrow{PQ}$):

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Ejercicio 5.

Calcula el valor de m para que las siguientes rectas sean coplanarias:

$$r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = m + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \qquad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

Solución:

Calculamos un punto y un vector director de cada recta:

$$\begin{array}{lll} r: & P(3,m,2) & \vec{u}(-1,1,2) \\ s: & Q(1,0,-2) & \vec{v}(1,-1,3) \end{array}$$

Calculamos $\overrightarrow{PQ} = (-2, -m, -4)$ y aplicamos la condición $[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$:

$$\begin{vmatrix} -2 & -m & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5m - 10 = 0 \quad \implies \quad m = -2$$

Ejercicio 6.

Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

y el punto $P(1, 0, -5)$*, calcula el ángulo que forma la recta* r *con el plano* π*, perpendicular a* s *que pasa por* P*.*

Solución:

El plano π es perpendicular a la recta s. Su vector normal es el vector director de la recta s, es decir, $\vec{n} = (-2, 1, 2)$. El vector director de la recta r es:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = (8, 7, 5)$$

El ángulo que forman el plano y la recta es complementario del que forman sus vectores normal y director, es decir:

$$\operatorname{sen}\alpha = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|} \right| = \frac{8 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 2}{\sqrt{138}\sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{138}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \simeq 1{,}63^{\text{o}}$$

7. Examen de recuperación de geometría

1. Consideramos las dos rectas:

$$r : \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1}\frac{z+d}{-2}$$

   Halla el valor de d para que las rectas se corten.

2. Dados los planos:

$$\pi : 4x + my + mz = 6 \qquad \text{y} \qquad \sigma : mx + y + z + 3 = 0$$

   estudia su posición relativa según los valores de m.

3. Halla la ecuación del plano π que contienen a la recta r y es paralelo a la recta s siendo:

$$r : \begin{cases} x = 3z - 8 \\ y = 2z - 4 \end{cases} \qquad s : \frac{x-10}{1} = \frac{y-20}{-1} = \frac{z}{1}$$

4. Halla la distancia de $P(5, 3, -4)$ al plano $\pi : x + 3y - z + 5 = 0$.

5. Calcula la distancia del punto $P(1, 0, 2)$ a la recta $r : (2\lambda, -\lambda, 1 + \lambda)$.

6. Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2 \end{cases} \qquad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$$

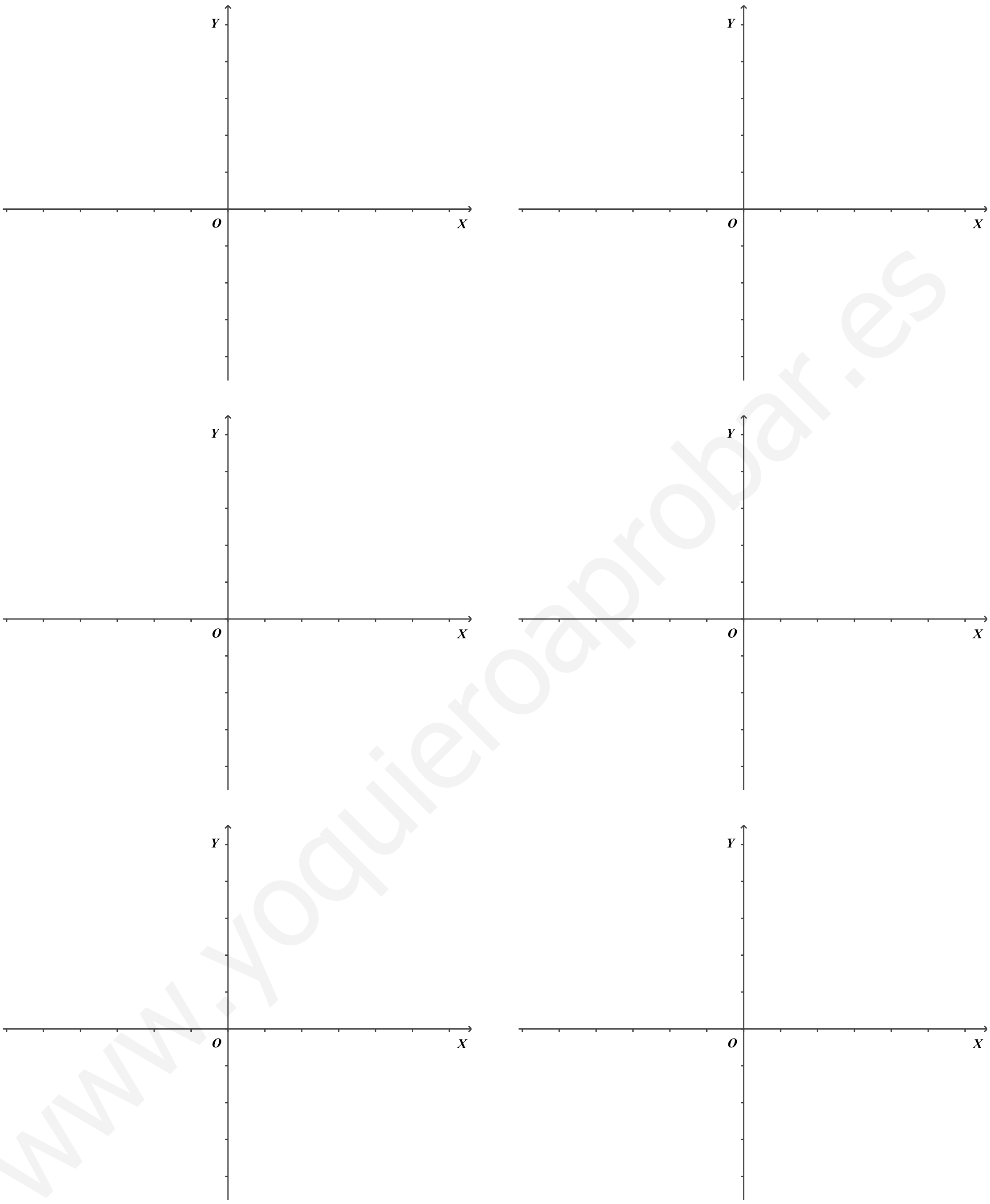
   calcula:

   a) La distancia entre las rectas.

   b) La ecuación de la perpendicular común.

8. Funciones

1. Dibuja la gráfica de las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{tg} x$:



2. Da dos definiciones de función continua.
3. Define los distintos tipos de discontinuidad que puede presentar una función.
4. Define asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
5. Haz una lista con los infinitésimos equivalentes que conozcas.
6. Enuncia los teoremas de Bolzano y Darboux.

9. Límites y continuidad (1)

Ejercicio 1.

Define asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Solución:

1. Asíntotas verticales:

$$x = x_0 \text{ asíntota vertical de } y = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

2. Asíntotas horizontales:

$$y = y_0 \text{ asíntota horizontal de } y = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$$

3. Asíntotas oblicuas:

$$y = mx + b \text{ asíntota oblicua de } y = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx - b) = 0$$

Ejercicio 2.

Obtén el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2}{\ln x}; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{2^x}$$

Solución:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2}{\ln x} = \infty$$

porque el infinito potencial es mayor que el infinito logarítmico.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{2^x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

Se ha tenido en cuenta que la función exponencial tiende a cero cuando la variable tiende a $-\infty$.

Ejercicio 3.

Halla los siguientes límites:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{3x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x^2+1} \right]; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}}$$

Solución:

El primer límite es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Hacemos la resta y nos quedamos con los términos de mayor grado:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{3x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x^2+1} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2(x^2+1) - x^3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4}{x^3} = \infty$$

El segundo límite es una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Teniendo en cuenta los términos de mayor grado y que el numerador tiene a $-\infty$ y el denominador a $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{3x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{3}\sqrt{x^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\frac{x}{\sqrt{x^2}}$ tiende a -1 cuando x tiende a $-\infty$.

Ejercicio 4.

Calcula:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{2x-3}; \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2}{2+3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{2x-3}=2^{-\infty}=0$$

El segundo límite es una indeterminación del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2}{2+3x^2}-1\right)\frac{x+1}{2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2-3x^2}{2+3x^2}\,\frac{x+1}{2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2(x+1)}{2(2+3x^2)}=0$$

Entonces, el límite es igual a $e^0=1$.

Ejercicio 5.

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}$$

Solución:

Multiplicando y dividiendo por las expresiones conjugadas:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1} &= \lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{2x+4}-2)(\sqrt{2x+4}+2)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{2x+4}+2)(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{(2x+4-4)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{2x+4}+2)(x+1-1)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+4}+2)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{2(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{2x+4}+2)}\\
&= \frac{4}{4}=1
\end{aligned}$$

Ejercicio 6.

Halla el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{3x^2}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{x}{x-2}}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{3x^2}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{x}{x-2}}=\left(\frac{12}{4}\right)^{\infty}=\infty$$

Ejercicio 7.

Estudia la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 4+\ln x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Para $x\neq 0$ y $x\neq 1$ la función es continua porque está definida mediante funciones continuas.

Para $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} e^x=e^0=1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(3x^2+1)=1$$

Ambos límites coinciden además con el valor de la función en $x=0$, y por consiguiente, la función es continua en ese punto.

Para $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(3x^2+1)=4$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(4+\ln x)=4$$

Como en el caso anterior coinciden los límites con el valor de la función y ésta es continua.

Ejercicio 8.

Calcula los valores de a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2x & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 4x^2+ax+b & \text{si} \quad 1\leq x<2 \\ 3x+b & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Solución: Si f es continua deben coincidir los límites laterales en $x=1$ y en $x=2$.

En $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 1}(ax^2+2x)=\lim_{x\to 1}(4x^2+ax+b) \quad\Longrightarrow\quad a+2=4+a+b$$

y $b=-2$

En $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 2}(4x^2+ax+b)=\lim_{x\to 2}(3x+b) \quad\Longrightarrow\quad 16+2a+b=6+b$$

y de esta igualdad se obtiene $a = -5$.

Ejercicio 9.

Demuestra que la ecuación:

$$x^7 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

tiene, al menos, una solución real. Determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

Solución:

Sea la función $F(x) = x^7 + 3x^2 - 2x + 1$ continua para todo x. Esta función cambia de signo en el intervalo $[-2, 0]$:

$$F(-2) = (-2)^7 + 3(-2)^2 - 2(-2) + 1 < 0; \qquad F(0) = 1 > 0$$

De acuerdo con el teorema de Bolzano, existe un número $\xi \in (-2, 0)$ en donde la función F se hace cero. Este número es una solución de la ecuación propuesta.

10. Límites y continuidad (2)

Ejercicio 1.

Halla los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^x - x^2\right); \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^x - x^2\right) = \infty$$

porque el infinito exponencial es mayor que el infinito potencial.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$$

porque el infinito potencial es mayor que el infinito logarítmico.

Ejercicio 2.

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}; \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x^3}{x^2+1}\right]$$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2\sqrt{x^4}}{\sqrt{2x^4}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2}{\sqrt{2}x^2} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x^3}{x^2+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-1)(x^2+1)-(x+2)x^3}{(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{x^3} = -2$$

Ejercicio 3.

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2}; \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} = 0$$

El segundo límite es una indeterminación del tipo 1^∞. Calculamos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2}{3+2x} - 1\right)(x+1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2-3-2x}{3+2x}(x+1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5(x+1)}{3+2x} = -\frac{5}{2}$$

de forma que el límite es igual a $e^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^5}}$.

Ejercicio 4.

Calcula:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}}$$

Solución:

Se trata de un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Descomponemos en factores el numerador y el denominador y simplificamos la fracción:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}}=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(2x+1)}{(x-1)^2(3x-2)}}=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{2x+1}{3x-2}}=\sqrt[3]{\frac{3}{1}}=\sqrt[3]{3}$$

Ejercicio 5.

Calcula el límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+4}{x^2-x+6}\right)^{\dfrac{3x}{x-1}}$$

Solución:

De nuevo es un límite indeterminado del tipo 1^∞. Calculamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+4}{x^2-x+6}-1\right)\frac{3x}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{2x+4-x^2+x-6}{x^2-x+6}\,\frac{3x}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(-x^2+3x-2)3x}{(x^2-x+6)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x-2)3x}{(x^2-x+6)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-2)3x}{(x^2-x+6)}\\ &= \frac{3}{6}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

De forma que el límite es igual a $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

Ejercicio 6.

Dada la función:

$$f(x)=\frac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10}$$

estudia su continuidad e indica el tipo de discontinuidad en los puntos en que no es continua.

Solución:

Puesto que es una función racional (cociente de funciones polinómicas) es continua para todos los valores de la variable salvo para los que anulan el denominador. El denominador se anula para $x=2$ y $x=-5$. estos son los puntos de discontinuidad.

Para $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^3 + 15x^2 + x + 5}{x^2 + 3x - 10} = \frac{81}{0} = \infty$$

existe un punto de discontinuidad de salto infinito.

Para $x = -5$ el límite es indeterminado. Simplificamos la fracción:

$$\lim_{x\to -5} \frac{3x^3 + 15x^2 + x + 5}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x\to -5} \frac{(3x^2 + 1)(x + 5)}{(x - 2)(x + 5)} = \lim_{x\to -5} \frac{3x^2 + 1}{x - 2} = \frac{-76}{7}$$

y, puesto que existe el límite se trata de una discontinuidad evitable.

Ejercicio 7.

Halla los valores de a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x^2 + bx + a & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 3x + 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

Para que f sea continua, los límites laterales en los extremos de los intervalos deben coincidir. Entonces:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 1} 3x - a = \lim_{x\to 1} 2x^2 + bx + a \quad\Longrightarrow\quad 3 - a = 2 + b + a$$

De forma similar en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 2} 2x^2 + bx + a = \lim_{x\to 2} 3x + 1 \quad\Longrightarrow\quad 8 + 2b + a = 7$$

resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones resulta $a = 1$, $b = -1$.

Ejercicio 8.

Demuestra que la ecuación $e^{-3x} + 4x - 2 = 0$ tiene, al menos, una solución real en el intervalo $(0, 1)$.

Solución:

Sea la función $F(x) = e^{-3x} + 4x - 2$, vamos a demostrar que esta función toma el valor cero en el intervalo $(0, 1)$.

Esta función es continua por estar definida mediante funciones continuas. Ademas:

$$F(0) = e^0 + 4 \cdot 0 - 2 < 0; \qquad F(1) = e^{-3} + 4 - 2 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un punto ξ del intervalo $(0, 1)$ en el que la función se hace cero. ξ es una solución de la ecuación.

Ejercicio 9.

Da dos definiciones de función continua en un punto.

Solución:

Una función es continua en un punto cuando el límite de la función en ese punto coincide con el valor de la función.

La función es continua si a incrementos infinitesimales de la variable independiente corresponden incrementos infinitesimales de la variable dependiente.

Ejercicio 10.

Define los distintos tipos de discontinuidad que puede presentar una función. **Solución:**

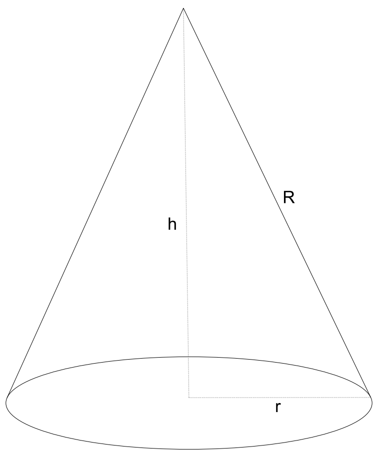
1. Discontinuidad evitable: existe el límite pero no coincide con el valor de la función.
2. Salto finito: existen los límites laterales pero no coinciden.
3. Salto infinito: los límites laterales son infinitos.
4. Discontinuidad esencial: alguno de los límites laterales no existe ni es infinito.

11. Derivadas

1. Define derivada, diferencial e interpreta geométricamente estos conceptos.
2. Enuncia los teoremas que relacionan las derivadas con el crecimiento y decrecimiento de una función.
3. Escribe las reglas de derivación de $\operatorname{sen} u$, $\cos u$, $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{arsen} u$, $\operatorname{arcos} u$ y $\operatorname{artg} u$.
4. Demuestra alguna regla de derivación.
5. Enuncia el teorema de Rolle.

12. Problema de optimización

1. De todos los conos de generatriz R calcula el radio de la base y la altura para que el volumen sea máximo.



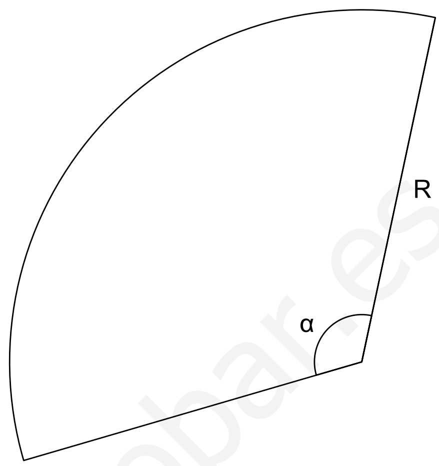


Figura 1: El cono y su desarrollo plano

2. El desarrollo plano del cono es un sector circular de radio R y ángulo α. Con el resultado obtenido en el apartado anterior calcular α para que el volumen sea máximo.

13. Derivadas

Ejercicio 1.

Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$y = \frac{4x-2}{x(x^2+1)}$$

en $x_0 = 1$

Solución:

Calculamos la ordenada del punto:

$$y_0 = \frac{4-2}{1\cdot 2} = 1$$

La derivada de la función es:

$$y' = \frac{4x(x^2+1) - (3x^2+1)(4x-2)}{x^2(x^2+1)^2}$$

La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en $x = 1$:

$$m = \frac{4\cdot 2 - 4\cdot 2}{4} = 0$$

La recta que pasa por $(1, 1)$ y tiene pendiente cero es $y = 1$.

Ejercicio 2.

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x}; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

Solución:

Aplicando la regla de L´Hopital puesto que se trata de un límite indeterminado del tipo $0/0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + \cos x}{2x - \cos x} = \frac{1}{-1} = -1$$

El segundo límite es cero puesto que el infinito potencial del denominador es mayor que el infinito logarítmico del numerador. No obstante es una indeterminación ∞/∞ y se puede resolver mediante la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0$$

Ejercicio 3.

Hallar a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} -ax & si \quad x < -1 \\ ax - b & si \quad -1 \le x < 1 \\ 2x & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad.

Solución:

La función f es continua para todo x distinto de 1 y -1. Para estos valores deben coincidir los límites por la derecha y por la izquierda de modo que:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} -ax = a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} ax - b = -a - b\end{array}\right\} \implies a = -a - b \implies b = -2a$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} ax - b = a - b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} 2x = 2\end{array}\right\} \implies a - b = 2$$

Resolviendo el sistema $b = -2a; a - b = 2$ resulta $a = \frac{2}{3}, b = \frac{-4}{3}$

La función es continua para estos valores de a y b. Veamos si es derivable. La derivada para x distinto de 1 y -1 es:

$$f'(x) = \begin{cases} -a & \text{si} \quad x < -1 \\ a & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

En $x = -1$:

$$y'(x = -1^-) = -a; \qquad y'(x = -1^+) = a$$

de forma que las derivadas por la derecha y por la izquierda no coinciden para $a = \frac{2}{3}$ y la función no es derivable. Lo mismo ocurre en $x = 1$:

$$y'(x = 1^-) = a; \qquad y'(x = 1^+) = 2$$

Ejercicio 4.

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$y = 4arcos\sqrt{x}; \qquad y = \ln\sqrt{x^2 - 4}; \qquad x^2 - 3xy - 2y^2 = 4$$

Solución:

- $y' = 4\dfrac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- Primero escribimos la función como:

  $$y = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4)$$

  Ahora derivamos:

  $$y' = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 - 4}$$

- Derivamos la ecuación implícita:

  $$2x - (3y + 3xy') - 2 \cdot 2yy' = 0$$

  Despejamos y':

  $$-3xy' - 4yy' = -2x + 3y \implies y'(-3x - 4y) = -2x + 3y \implies y' = \frac{2x - 3y}{3x + 4y}$$

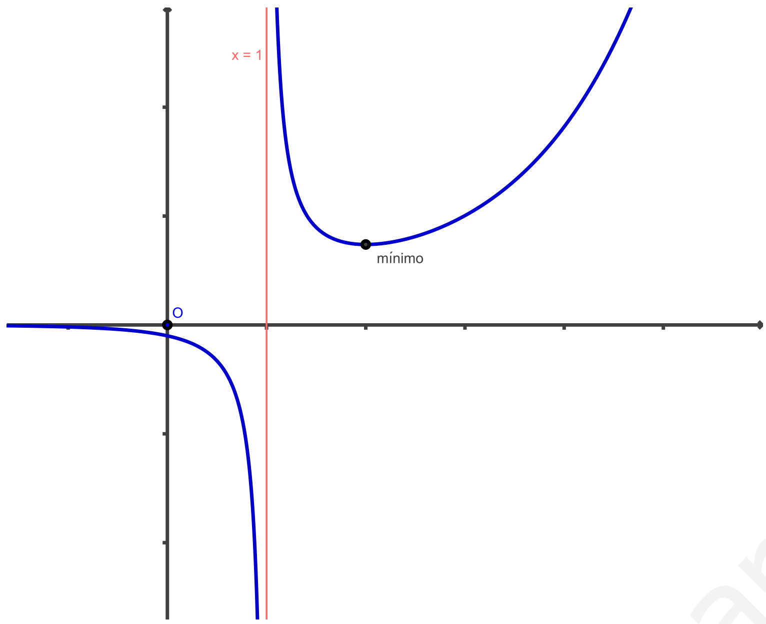


Figura 2: Representación gráfica de la función

Ejercicio 5.

Representa la función:

$$y = \frac{e^x}{x-1}$$

Solución:

1. La función existe para todo x distinto de 1. No es simétrica y corta a los ejes en:

$$\begin{array}{l} y = \frac{e^x}{x-1} \\ x = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{e^0}{0-1} = -1; \quad A(0,-1)$$

$$\begin{array}{l} y = \frac{e^x}{x-1} \\ y = 0 \end{array}$$

Este último sistema no tienen solución puesto que e^x es un número positivo.

2. Estudiemos las asíntotas:

$$\begin{array}{lll} \text{lím}\, x \to 1 \frac{e^x}{x-1} = \infty & \Longrightarrow & x = 1 \text{ es asíntota vertical} \\ \text{lím}\, x \to +\infty \frac{e^x}{x-1} = \infty & \Longrightarrow & \text{no hay asíntota horizontal en } +\infty \\ \text{lím}\, x \to -\infty \frac{e^x}{x-1} = 0 & \Longrightarrow & y = 0 \text{ es asíntota horizontal en } -\infty \end{array}$$

3. Estudiemos la derivada

$$y' = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

El numerador se anula en $x = 2$ y el denominador en $x = 1$. El signo de la derivada se resume en el siguiente esquema:

$x \in (-\infty, 1)$	$y' > 0$	Creciente
$x = 1$		No existe la función. Asíntota
$x \in (1, 2)$	$y' < 0$	Decreciente
$x = 2$	$y' = 0$	Mínimo
$x \in (2, \infty)$	$y' > 0$	Creciente

El mínimo está en el punto $B(2, e^2)$. La representación gráfica puede verse en la figura 2.

Ejercicio 6.

Enuncia y demuestra el teorema de Rolle.

14. Segundo ejercicio de derivadas

Ejercicio 1.

(1 punto) Calcula la ecuación de las tangentes a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ paralelas a la recta $x + y - 1 = 0$.

Solución:

La recta $x + y - 1 = 0$ tiene pendiente -1. Se trata de calcular la tangente a la curva que tenga pendiente -1. Derivamos e igualamos a -1:

$$y' = 2x - 5 = -1 \quad \Longrightarrow \quad 2x = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Ya tenemos la abscisa del punto de tangencia. La ordenada se obtiene sustituyendo $x = 2$ en la ecuación de la curva:

$$y = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

Escribimos la ecuación de la tangente en el punto $(2, 0)$ que tiene pendiente -1:

$$y = (-1)(x - 2) \qquad \text{o bien} \qquad y = -x + 2$$

Ejercicio 2.

(1 punto) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < 0 \\ x - 2 & si \quad 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

estudiar la continuidad y derivabilidad.

Solución:

Para $x \neq 0$ y $x \neq 2$ la función es continua.

Para $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 2 = 2$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x - 2 = -2$$

por consiguiente la función no es continua en $x = 0$.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} x - 2 = 0$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 - 4 = 0$$

y la función es continua en $x = 2$.

Vamos a estudiar ahora la derivabilidad. Para $x \neq 0$ y $x \neq 2$ la función es derivable y su derivada vale:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

En $x = 0$ la función no es continua y por tanto no es derivable. En $x = 2$ la derivada por la izquierda es 1 y la derivada por la derecha es 4, por consiguiente, la función tampoco es derivable en $x = 2$.

Ejercicio 3.

(1 punto) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$y = \ln \frac{4-5x}{2x+3} \qquad y = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x^2}$$

Solución:

$$y = \ln \frac{4-5x}{2x+3} = \ln(4-5x) - \ln(2x+3) \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{-5}{4-5x} - \frac{2}{2x+3}$$
$$y = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{\cos 3x \cdot 3 \cdot x^2 - 2x \operatorname{sen} 3x}{x^4}$$

Ejercicio 4.

(1 punto) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la curva

$$y = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x$$

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$y' = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24$$
$$y'' = 36x^2 + 48x - 12$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada. Las raíces del polinomio son:

$$36x^2 + 48x - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 + 4x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{3}$$

De forma que:

$$\begin{aligned}
x \in \left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{12}}{3}\right) \qquad & y'' > 0 : \ f \text{ convexa} \\
x = \frac{-2-\sqrt{12}}{3} \qquad & y'' = 0 : \ \text{punto de inflexión} \\
x \in \left(\frac{-2-\sqrt{12}}{3}, \frac{-2+\sqrt{12}}{3}\right) \qquad & y'' < 0 : \ f \text{ cóncava} \\
x = \frac{-2+\sqrt{12}}{3} \qquad & y'' = 0 : \ \text{punto de inflexión} \\
x \in \left(\frac{-2+\sqrt{12}}{3}, \infty\right) \qquad & y'' > 0 : \ f \text{ convexa}
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.

(3 puntos) Estudia y representa la función:

$$y = \frac{x^2+1}{4-x^2}$$

Solución:

- Dominio: todos los números reales salvo -2 y 2 que anulan el denominador.

- Simetría: la función tiene simetría par.
- Intersecciones con los ejes: $(0, \frac{1}{4})$.
- Asíntotas:
  - Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$.
  - Asíntota horizontal: $y = -1$.
- Monotonía:

$$y' = \frac{2x(4-x^2) - (-2x)(x^2+1)}{(4-x^2)^2} = \frac{10x}{(4-x^2)^2}$$

El numerador se anula en $x = 0$ y el denominador en $x = -2$ y $x = 2$. Analizando el signo de y' se tiene que:

$x \in (-\infty, -2)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = -2$		Asíntota
$x \in (-2, 0)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = 0$	$y' = 0$	mínimo en $(0, \frac{1}{4})$
$x \in (0, 2)$	$y' > 0$	función creciente
$x = 2$		Asíntota
$x \in (2, \infty)$	$y' > 0$	función creciente

Con estos datos puede representarse la función:

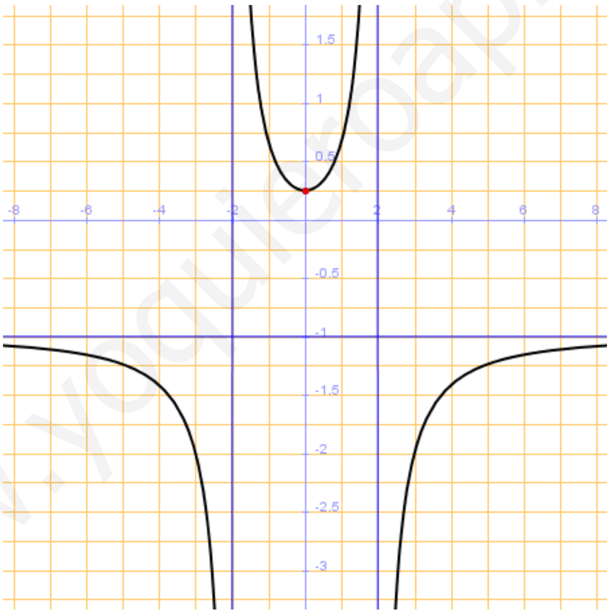


Figura 3:

Ejercicio 6.

(1 punto) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}; \qquad \lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

Solución:

Para calcular el primer límite puesto que es una indeterminación del tipo ∞/∞ y las funciones son derivables, aplicamos la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cos x-x\operatorname{sen}x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen}x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

En el último paso hemos aplicado la equivalencia $\operatorname{sen}x\sim x$ aunque podíamos haber vuelto a aplicar la regla de l'Hopital.

El segundo límite es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicando la regla para este tipo de indeterminaciones se obtiene:

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}e^{(x-1)\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{x-1}{1-x}}=e^{-1}$$

Ejercicio 7.

(1 punto) Descomponer el número 36 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máxima.

Solución:

Sean los números x y $36-x$. la función que debe ser máxima es:

$$y=x^2(36-x)=36x^2-x^3$$

derivando e igualando a cero:

$$y'=72x-3x^2=0\quad\Longrightarrow\quad x=24$$

así pues, los números son 24 y 12.

Ejercicio 8.

(1 punto) Calcula a, b y c para que la función:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-ax & si \quad x<2\\ bx+c & si \quad x\geq 2\end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,4]$. ¿Qué asegura el teorema en este caso?

Solución:

La función ha de ser continua en $[0,4]$. Para que sea continua en $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)\quad\Longrightarrow\quad\lim_{x\to 2}2x^2-ax)=\lim_{x\to 2}bx+c\quad\Longrightarrow\quad 8-2a=2b+c$$

Además, la función debe ser derivable en ese mismo punto. Puesto que

$$f'(x)=\begin{cases}4x-a & \text{si} \quad x<2\\ b & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

Para que coincidan las derivadas por la izquierda y por la derecha en $x=2$ debe ocurrir que

$$f'(2^-)=f'(2^+)\quad\Longrightarrow\quad 8-a=b$$

Finalmente, debe ocurrir que $f(0)=f(4)$ por lo que $0=4b+c$.

Resolviendo el sistema para a, b y c se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}8-2a&=2b+c\\ 8-a&=b\\ 0&=4b+c\end{aligned}\right\}\quad\Longrightarrow\quad a=6,\ b=2,\ c=-8$$

Puesto que se cumplen las tres hipótesis del teorema de Rolle en $[0,4]$ debe haber un punto $\xi\in(0,4)$ tal que $f'(\xi)=0$.

15. Tercer ejercicio de derivadas

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función f:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+8 & x \leq -2 \\ 4-x^2 & -2 < x < 2 \\ 4x-8 & x \geq 2 \end{cases}$$

2. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

$$y = e^{3x}\cos x; \qquad y = \frac{x^2}{\ln x}; \qquad y = \operatorname{artg}\frac{1}{x}$$

3. Halla las tangentes a la curva

$$y = \frac{2x}{x-1}$$

paralelas a la recta $2x + y = 0$

4. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

5. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{artg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(2x)}{3x^2}$$

6. Enuncia el teorema de Rolle. ¿Es posible asegurar, utilizando dicho teorema que la función

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2) + x^2$$

es tal que su derivada se anula en algún punto del intervalo $(-1, 1)$?

7. Representa gráficamente la siguiente función estudiando el dominio, intersecciones con los ejes, asíntotas y monotonía:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

16. Primer examen de integrales

Ejercicio 1.

Calcula esta integral:

$$\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2}\,dx$$

Solución:

$$\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = 2\ln|x| - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$$

Ejercicio 2.

Calcula

$$\int \frac{x+\ln x}{x}\,dx$$

Solución:

$$\int \frac{x+\ln x}{x}\,dx = \int \,dx + \int \frac{1}{x}\ln x\,dx = x + \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Ejercicio 3.

Calcula:

$$\int (x^2+1)e^x\,dx$$

Solución:

Por partes:

$$\begin{array}{lll} u = x^2+1 & ; & du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx & ; & v = e^x \end{array}$$

$$\int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2+1)e^x - \int e^x\cdot 2x\,dx = (x^2+1)e^x - 2\int xe^x\,dx$$

Integrando de nuevo por partes:

$$\begin{array}{lll} u = x & ; & du = dx \\ dv = e^x\,dx & ; & v = e^x \end{array}$$

$$\int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2+1)e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

que se puede escribir:

$$\int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2-2x+3)e^x + C$$

Ejercicio 4.

Resuelve la siguiente integral con el cambio de variable $\sqrt{e^x+1} = t$*:*

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

El cambio de variable es:

$$\sqrt{e^x+1}=t \quad\Longrightarrow\quad \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\,dx=dt \quad\Longrightarrow\quad dx=\frac{2\sqrt{e^x+1}}{e^x}dt$$

Sustituyendo

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx=\int\frac{e^{2x}}{t}\cdot\frac{2\sqrt{e^x+1}}{e^x}dt=2\int e^x\,dt$$

Escribamos ahora e^x en función de t:

$$e^x+1=t^2 \quad\Longrightarrow\quad e^x=t^2-1$$

de forma que

$$\begin{aligned}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx&=2\int(t^2-1)\,dt\\&=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C\\&=\frac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3}-2\sqrt{e^x+1}+C\end{aligned}$$

Ejercicio 5.

Calcula la siguiente integral:

$$\int(x-1)\cos x\,dx$$

Solución:

Por partes:

$$\begin{array}{lll}u=x-1 & ; & du=dx\\ dv=\cos x\,dx & ; & v=\operatorname{sen}x\end{array}$$

De modo que:

$$\int(x-1)\cos x\,dx=(x-1)\operatorname{sen}x-\int\operatorname{sen}x\,dx=(x-1)\operatorname{sen}x+\cos x+C$$

Ejercicio 6.

Halla la siguiente integral:

$$\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$$

Solución:

Como el grado del numerador es el mismo que el grado del denominador, lo primero es hacer la división:

$$\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx=\int\left(1+\frac{3}{x^2-5x+6}\right)\,dx$$

Descomponemos en fracciones simples. Las raíces del denominador son 2 y 3:

$$\frac{3}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \quad\Longrightarrow\quad A=-3;\ B=3$$

Entonces:

$$\int\frac{3}{x^2-5x+6}\,dx=\int\left(1-\frac{3}{x-2}+\frac{3}{x-3}\right)\,dx=x-3\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$$

Ejercicio 7.

Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$$

Solución:

Puesto que el denominador no tiene raíces:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{artg}\frac{x+1}{2} + C$$

Ejercicio 8.

Halla el área limitada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

Solución:

La curva no corta al eje de abscisas en el intervalo $(2, 6)$. Calculamos la integral.

$$\int_2^6 (x^2 - 7x + 6)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 7\frac{x^2}{2} + 6x\right]_2^6 = -\frac{56}{3}$$

El área buscada es $\frac{56}{3}$

Ejercicio 9.

Calcula el área limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$.

Solución:

Los límites de la integral son las abscisas de los puntos de intersección de las dos curvas:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 - 4x \\ y = 3x - 6 \end{array}\right\} \implies x^2 - 4x = 3x - 6 \implies x_1 = 1;\ \ x_2 = 6$$

Calculamos la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$\int_1^6 (x^2 - 4x - 3x + 6)\,dx = \int_1^6 (x^2 - 7x + 6)\,dx = -\frac{125}{6}$$

y, por consiguiente, el área buscada es $\frac{125}{6}$.

Ejercicio 10.

Dada la función:

$$F(x) = \int_0^x (1 + \cos^2 t)\,dt$$

calcula $F'(x)$.

Solución:

Según el Teorema Fundamental del Cálculo Integral

$$F'(x) = 1 + \cos^2 x$$