REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

a. Dominio de definición: D = Dom f(x) = {x $\in$R **|** existe f(x)}

b. Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje OX (abscisas): f(x) = 0 : (x,0). Ninguno, uno o más puntos.
- Con el eje OY (ordenadas): f(0) = y , (0,y). Ninguno o un punto.

c. Asíntotas

- Asíntotas verticales: La recta **x = a** es asíntota vertical si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, o algún limite lateral lo es.
- Asíntotas horizontales: La recta **y = b** es asíntota horizontal si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in R$ o bien $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \in R$.
- Asíntotas oblicuas: La recta **y = mx + n** es una asíntota oblicua, cuando:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in R \ y \ n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx\right) \in R$$

d. Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos

- Si para todo x$\in$ I $\subseteq$ D **f´(x) > 0** $\Rightarrow$ f es **creciente** en I.
- Si para todo x$\in$ I $\subseteq$ D **f´(x) < 0** $\Rightarrow$ f es **decreciente** en I.
- Si f´(x_0) = 0, o bien f no es derivable en $x_0 \in$ D, y f´(x) cambia de signo a izquierda y derecha de x_0, en x_0 hay un **extremo relativo**.

Representación gráfica de funciones

1. $f(x) = x^2 - x^4$

a) **Dominio**: R, es continua y derivable en R

b) **Puntos de corte con los ejes**

i) $x = 0 \Rightarrow y = 0$, (0, 0)

ii) $y = 0 \Rightarrow x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0, 0) \\ x = \pm 1 & (1,0), (-1, 0) \end{cases}$

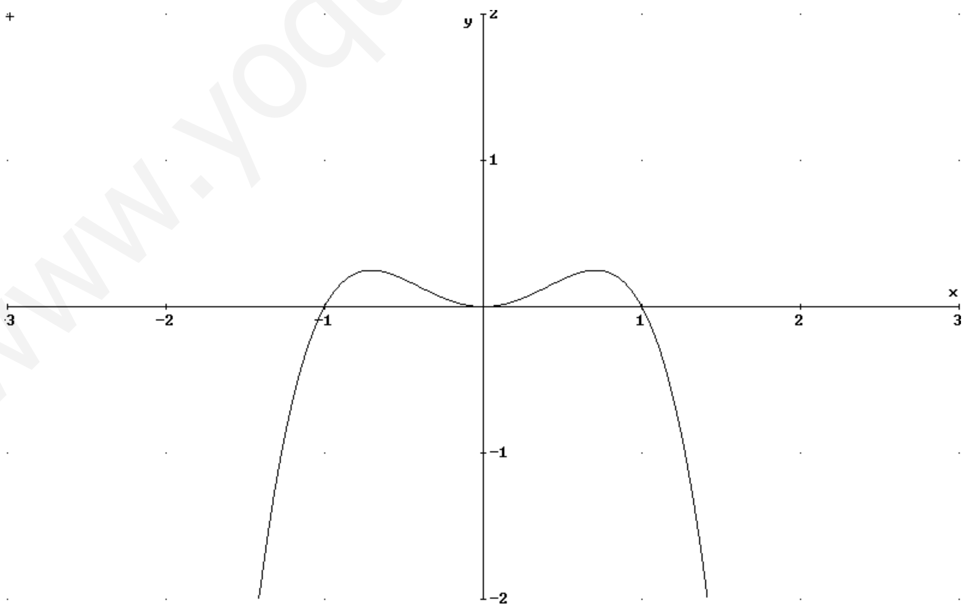
c) **Asíntotas:** No tiene por ser una función polinómica.

d) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**:

$y' = 2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{1/2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}/2 \end{cases}$

Signo f´	+		–		+		–
f es:	Creciente	$-\sqrt{2}/2$	Decreciente	0	Creciente	$\sqrt{2}/2$	Decreciente
		Máx.		Mín.		Máx.	

Mínimo relativo en el punto (0,0), y máximos relativos en los puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$



2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

a) **Dominio: R, es continua y derivable en R**

b) **Puntos de corte con los ejes**

i) $x = 0 \Rightarrow y = 0$, (0,0)

ii) $y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 6x + 9\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0,0) \\ x = 3 & (3,0) \end{cases}$

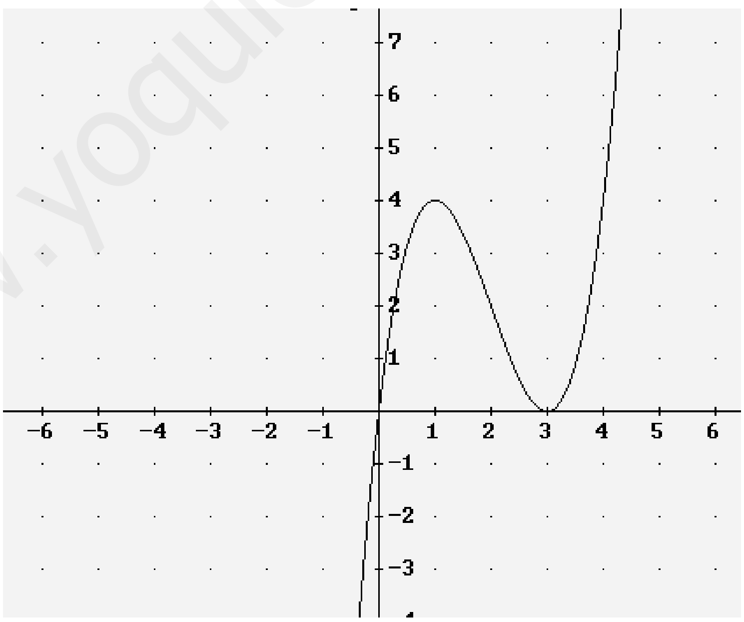
c) **Asíntotas**: No tiene por ser una función polinómica.

d) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**:

$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^3 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Signo f´	+		–		+
f es:	Creciente	1	Decreciente	3	Creciente
		Máx.		Mín.	

La función tiene un mínimo relativo en el punto: (1, 4),
y un máximo relativo en el punto (3, 0)



3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

a) **Dominio**: R – {0}

b) **Puntos de corte con los ejes**: no tiene.

c) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: x = 0

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x} = \pm\infty$. No tiene

iii) Asíntotas oblicuas: y = x

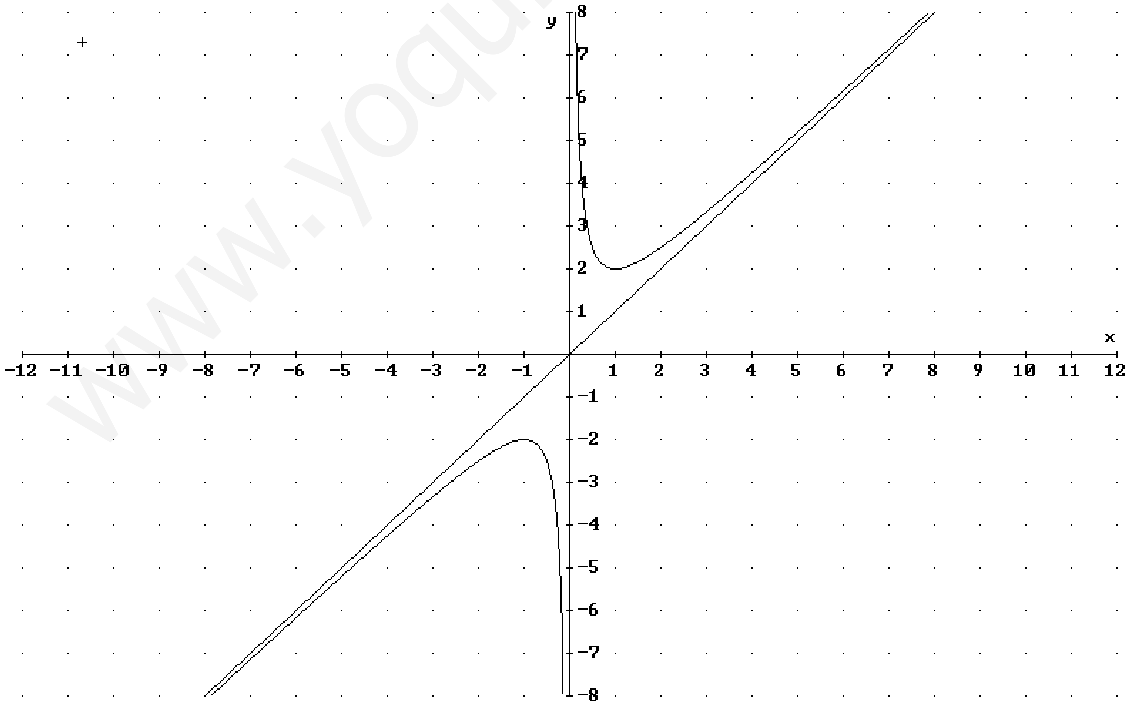
d) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**:

$y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Signo f´	+		–		–		+
f es:	crece	–1	decrece	0	decrece	1	crece
		Máximo				mínimo	

Tiene un máximo en el punto: (–1, 2) y un mínimo en (1, 2)

g) **Gráfica:**



4. $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

a) **Dominio**: R – {–1}

b) **Puntos de corte con los ejes**: (0, 0).

c) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{(1+x)^2} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{(1+x)^2} = -\infty \end{array}\right\} x = -1$

ii) Asíntotas Horizontales: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} = +\infty$. No tiene

iii) Asíntotas oblicuas: m= 1 ¬> y = x – 2

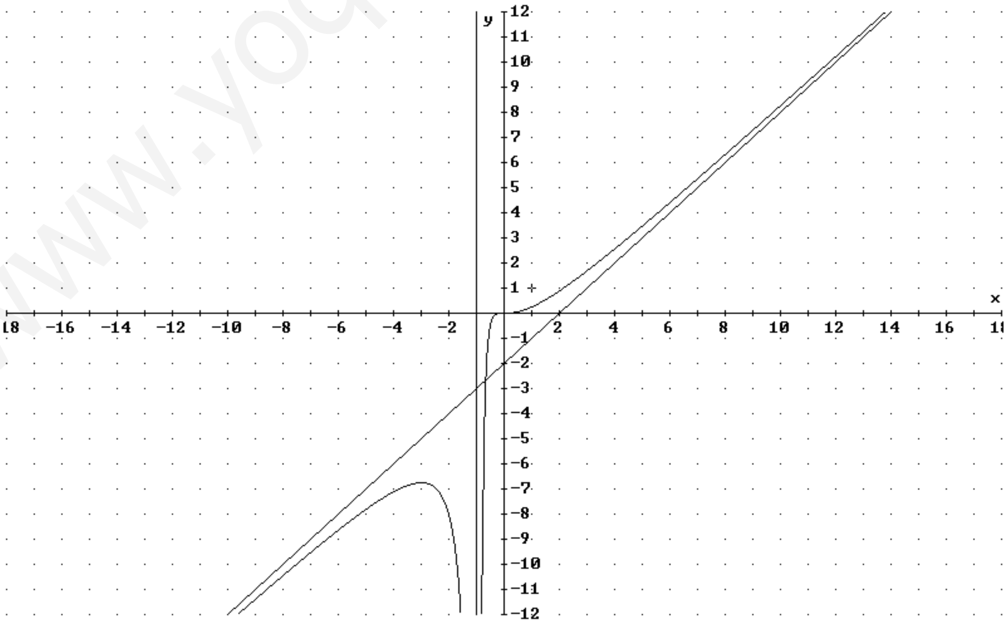
d) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**:

$y' = \dfrac{x^3+3x^2}{(1+x)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$. Dom $f'(x) = R - \{-1\}$

Signo f´	+		–		+		+
f es:	crece	–3	decrece	–1	crece	0	crece
		Máximo		No def.			

Tiene un máximo en el punto: (–3, –27/4)

h) **Gráfica:**



5. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

a) **Dominio**: R – {±2}

b) **Puntos de corte con los ejes**: (0, 0).

c) **Simetrías**: $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x}{x^2 - 4} = -f(x) \Rightarrow$ impar, simétrica respecto del origen

d) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -2$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x^2-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow y = 0$

iii) Asíntotas oblicuas: No tiene

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**:

$y' = \dfrac{-x^2-4}{\left(x^2-4\right)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \notin R$. No tiene

Signo f´	–		–		–
f es:	Decrece	–2	Decrece	2	Decrece

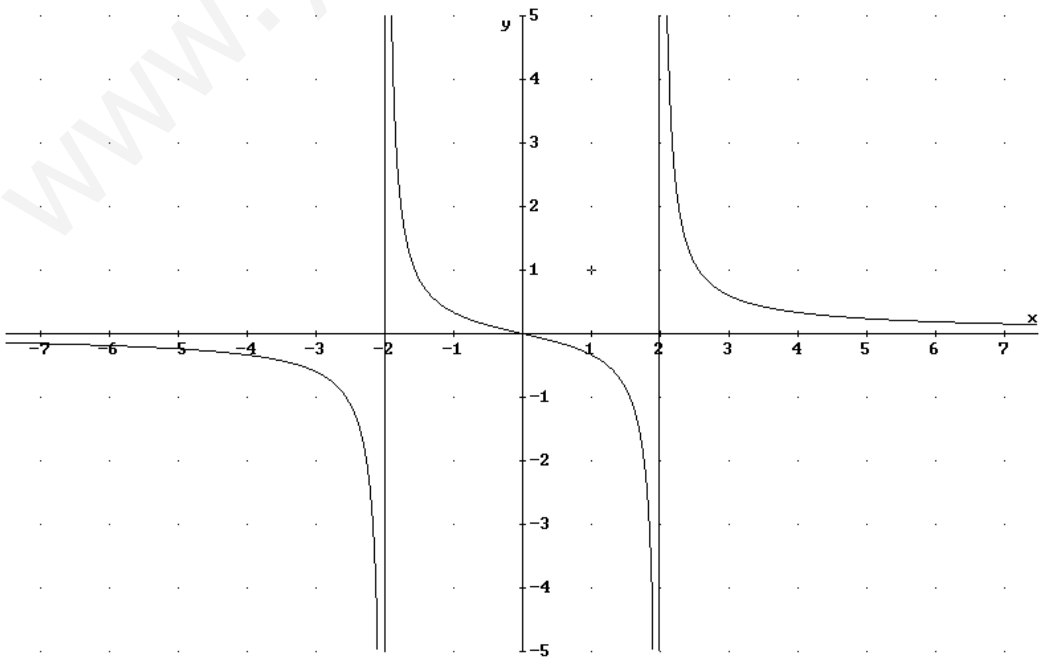
f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**:

$y'' = \dfrac{2x^3 + 24x}{\left(x^2-4\right)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2+12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-12} \notin R \end{cases}$

Signo f´´	–		+		–		+
f es:	Convexa	–2	Cóncava	0	Convexa	2	Cóncava
				Punto de inflexión			

Tiene un punto de inflexión en el punto (0, 0)

i) **Gráfica:**



6. $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}$

a) **Dominio**: $R-\{0\}$

b) **Puntos de corte con los ejes**:

i) $x=0$ no definida ($0\notin$ Dom f)

ii) $y=0\Rightarrow \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}\Rightarrow x^3-3x^2+4=0\Rightarrow x=-1\ (-1,0),\ x=2\ (2,0)$

c) **Simetrías**: $f(-x)=\dfrac{(-x)^3-3(-x)^2+4}{(-x)^2}\neq \pm f(x)\Rightarrow$ f no tiene.

d) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=0$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}=\pm\infty\ \Rightarrow$ no tiene

iii) Asíntotas oblicuas: $y=x-3$

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**:

$y'=\dfrac{x^3-8}{x^3}=0\Rightarrow x^3-8=0\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$.

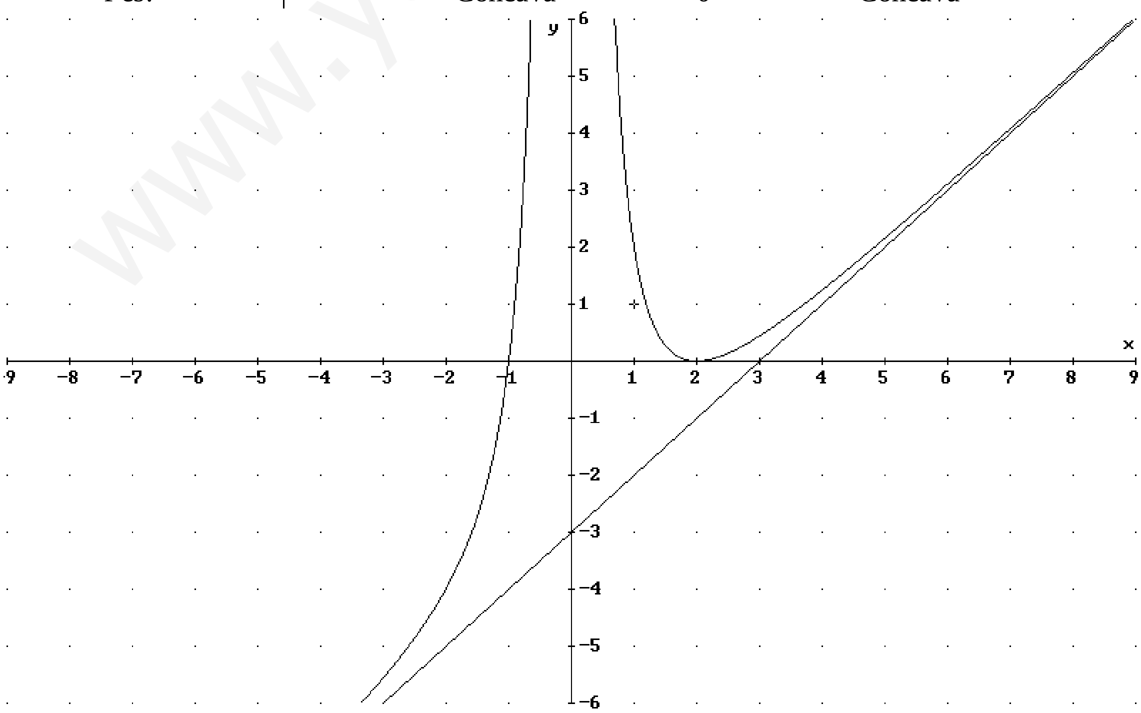
Signo f´	+		–		+
f es:	Crece	0 No definida	Decrece	2 Mínimo	Crece

Tiene un mínimo en el punto: (2, 0)

f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**:

$y''=\dfrac{24}{x^4}\neq 0$, no tiene puntos de inflexión.

Signo f´´	+		+
f es:	Cóncava	0	Cóncava



7. $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$

a) **Dominio**: R – {0}

b) **Puntos de corte con los ejes**:

i) x = 0 no definida ($0 \notin$ Dom f)

ii) $y = 0 \Rightarrow x^2 + \dfrac{2}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3+2}{x} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2},\ \left(\sqrt[3]{-2},\, 0\right)$

c) **Simetrías**: $f(-x) \neq \pm f(x) \Rightarrow$ f no tiene.

d) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3+2}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3+2}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+2}{x} = +\infty \Rightarrow$ no tiene

iii) Asíntotas oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+2}{x^2} = \pm\infty \Rightarrow$ no tiene

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**:

$y' = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3-2}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$.

Signo f´	–		–		+
f es:	Decrece	0 No definida	Decrece	1 Mínimo	Crece

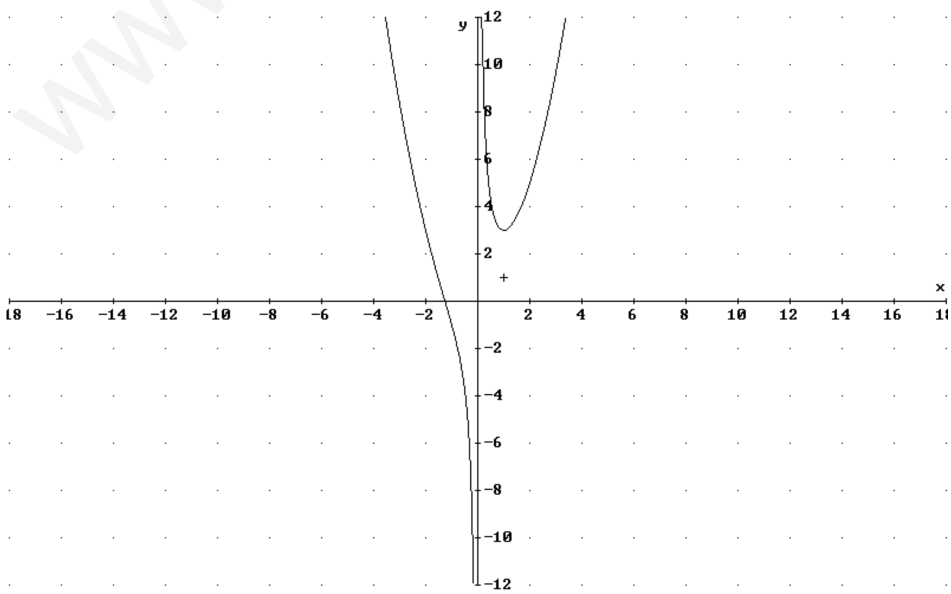
Tiene un mínimo en el punto: (1, 3)

f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**:

$y'' = 2 + \dfrac{4}{x^3} = \dfrac{2x^3+4}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2}$

Signo f´´	+		–		+
f es:	Cóncava	$\sqrt[3]{-2}$ Pto. Inflexión	Convexa	0 No definida	Cóncava

Punto de inflexión en ($\sqrt[3]{-2}$, 0)



8. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

a) **Dominio**: $R-\{\pm 1\}$

b) **Puntos de corte con los ejes**: (0,0)

c) **Simetrías**: $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}=-f(x)\Rightarrow$ f es impar y por lo tanto es simétrica respecto al origen de coordenadas.

d) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales: x = 1 y x = –1
ii) Asíntotas Horizontales: No tiene
iii) Asíntotas oblicuas: y = x

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**:

$$y'=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0\Rightarrow x^2\left(x^2-3\right)=0\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

Signo f´	+		–		–		–		–		+
f es:	Crece	$-\sqrt{3}$	decrece	-1	decrece	0	decrece	1	decrece	$\sqrt{3}$	crece
		Máximo		no def.				No def.		mínimo	

Tiene un máximo en el punto: $\left(-\sqrt{3},\dfrac{-3\sqrt{3}}{3}\right)$ y un mínimo en $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{3}\right)$

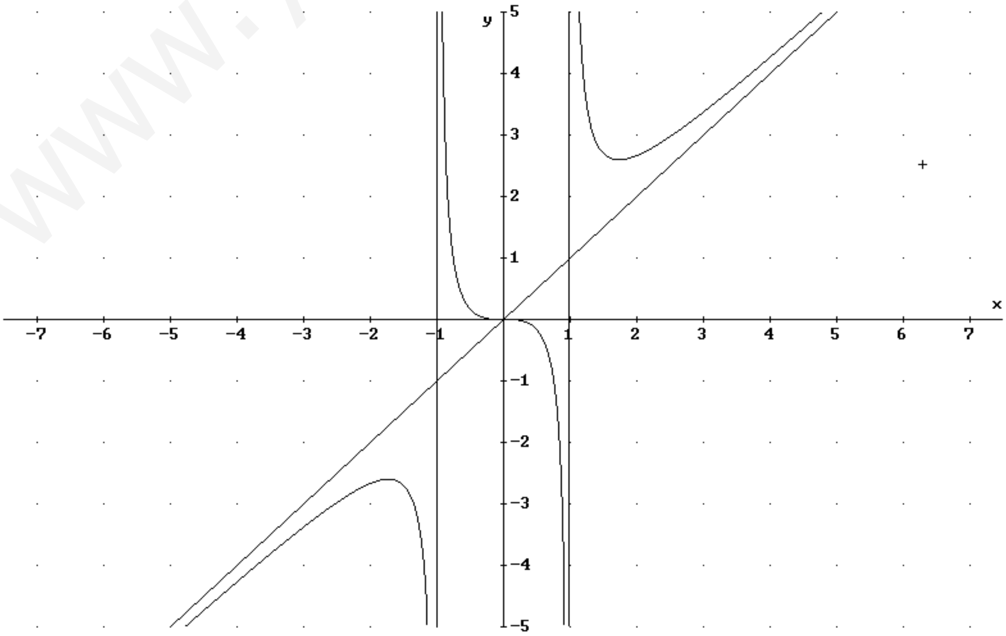
f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**:

$$y''=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=0\Rightarrow x(2x^2+6)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{-3}\notin R\end{cases}$$

Signo f´´	–		+		–		+
f es:	Convexa	–1	Cóncava	0	Convexa	1	Cóncava
				Pto. Inflex.			

Tiene un punto de inflexión en el punto: (0 , 0)

g) Gráfica:



9. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

a) Dominio: $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

b) Puntos de corte con los ejes: $(-1,0),(1,0)$

c) Simetrías: $f(-x)=\sqrt{(-x)^2-1}=\sqrt{x^2-1}=f(x)$, es simétrica respecto del eje OY.

d) Asíntotas

i) Asíntotas verticales: No tiene

ii) Asíntotas horizontales: No tiene

iii) Asíntotas oblicuas: y = mx + n

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1, n=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=0\Rightarrow y=x$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right)=-1, n=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=0\Rightarrow y=-x$$

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0\Rightarrow x=0\notin \text{Dom } f$.

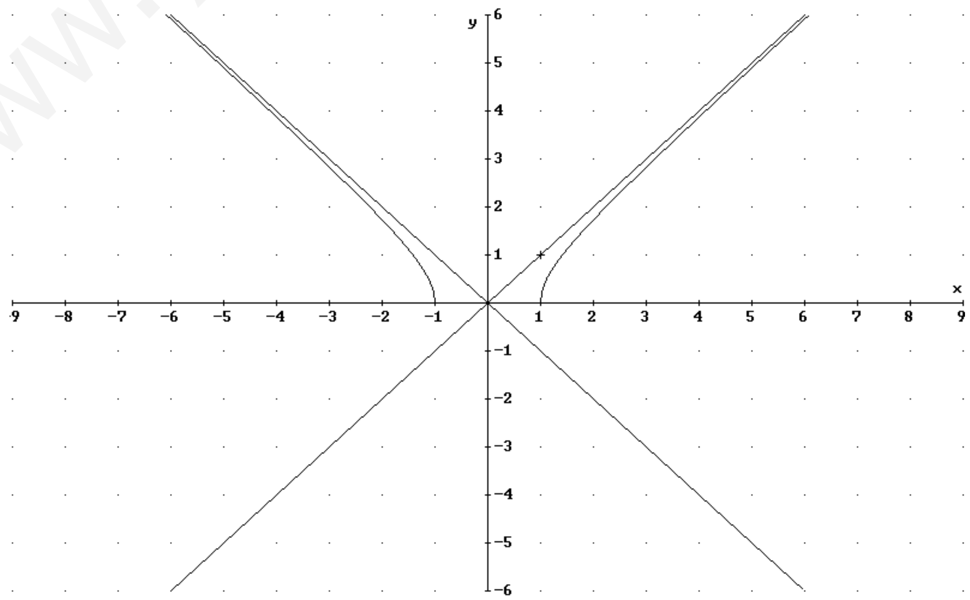
Dom f´= $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

En el intervalo $(-\infty,-1)$ $f'(x)<0\Rightarrow$ f es decreciente

En el intervalo $(1,+\infty)$ $f'(x)>0\Rightarrow$ f es creciente

f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x)=\frac{-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\neq 0$, Dom f´´= $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, la derivada segunda es negativa en todo su dominio $\Rightarrow$ es siempre convexa

g) Gráfica:



10. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

a) Dominio: $[-1,1]$

b) Puntos de corte con los ejes: $(-1,0),(1,0)$

c) Simetrías: $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$, es simétrica respecto del eje OY.

d) Asíntotas

   i) Asíntotas verticales: No tiene

   ii) Asíntotas horizontales: No tiene ya que el dominio de f = $[-1,1]$

   iii) Asíntotas oblicuas: No tiene

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow x=0.$

   Dom f´= (–1, 1)

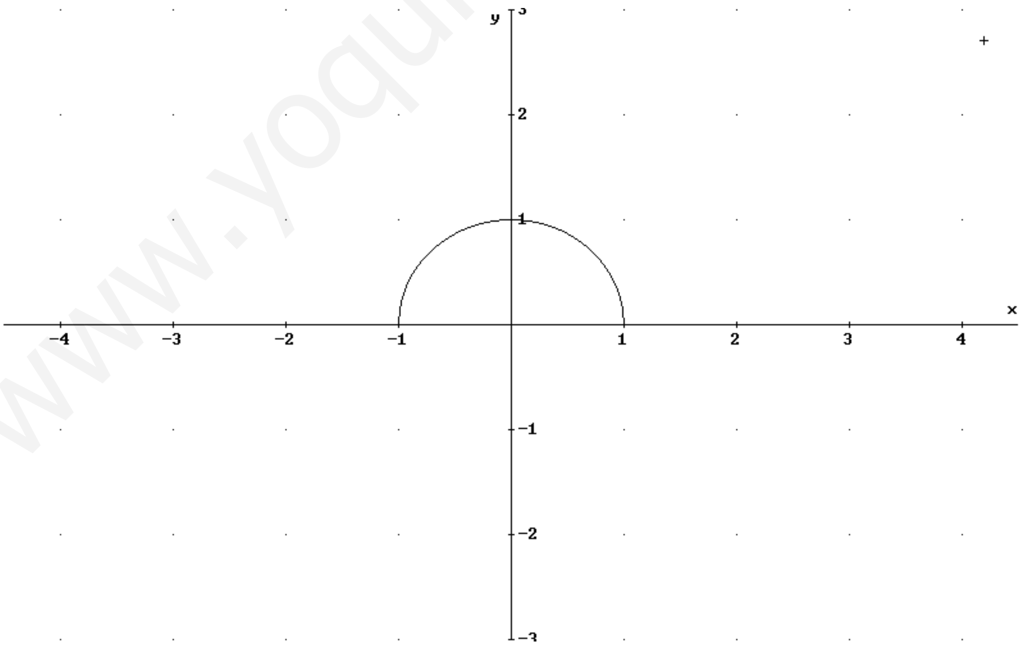
   En el intervalo $(-1,0)$ $f'(x)>0 \Rightarrow$ f es creciente

   En el intervalo $(0,1)$ $f'(x)<0 \Rightarrow$ f es decreciente

   Tiene un máximo en el punto: (0, 1)

f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\neq 0$, Dom f´´=(–1, 1), la derivada segunda es negativa en todo su dominio $\Rightarrow$ es siempre convexa.

g) Gráfica:



11. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

a) **Dominio**: R – {0}

b) **Puntos de corte con los ejes**:

i) x = 0 no definida ($0 \notin$ Dom f), no corta al eje de ordenadas (Y).

ii) $y = e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow$ no corta al eje de abscisas (X).

c) **Simetrías**: $f(-x) = e^{1/-x} = e^{-1/x} = \dfrac{1}{e^{1/x}} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ f no tiene.

d) **Asíntotas**

i) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow$ no tiene

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \boxed{x = 0}$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

e) **Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**: $y' = \dfrac{-e^{1/x}}{x^2} \neq 0$. No tiene máximos ni mínimos.

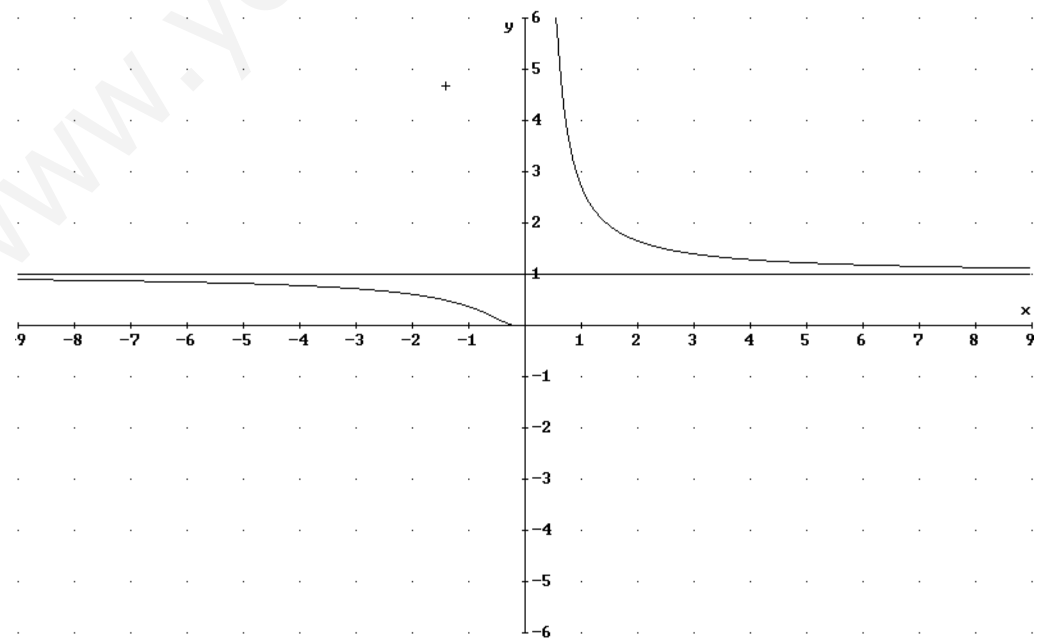
Signo f´	–		–
f es:	decrece	0 No definida	decrece

f) **Concavidad, convexidad, puntos de inflexión**: $y'' = \dfrac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4} = 0$, x = –1/2

Signo f´´	–		+		+
f es:	Convexa	–1/2 Pto. Inflexión	cóncava	0 No definida	Cóncava

Punto de inflexión en (–1/2, e^{-2}), $e^{-2} \cong 0.135335$

g) **Gráfica:**



12. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

a) Dominio: $(0,+\infty) = R^+$. Continua en su dominio

b) Puntos de corte con los ejes:

$0 \notin$ Dom f, luego no corta al eje OY

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$, (1, 0) corte con el eje OX.

c) Simetrías: No hay (Si $x \in$ Dom f , $-x \notin$ Dom f)

d) Asíntotas

i) Asíntotas verticales: $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, $\boxed{x = 0}$

ii) Asíntotas horizontales: $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\boxed{y = 0}$

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

$f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow 1 = \ln x \Rightarrow x = e$

En el intervalo $(0, e)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente

En el intervalo $(e, +\infty)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente

Para x = e tiene un máximo relativo: $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

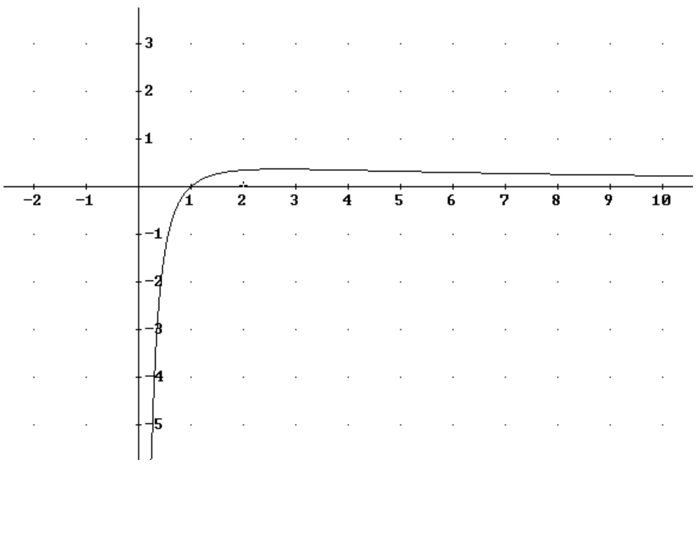
f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \dfrac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow \ln x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$

En el intervalo $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es convexa.

En el intervalo $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f es cóncava.

Para $x = e^{\frac{3}{2}}$ tiene un punto de inflexión: $\left(e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

Gráfica:



13. $y = \ln(x^2 - 1)$

a) Dominio: $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

b) Puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \notin \text{Dom } f \Rightarrow$ no corta al eje de ordenadas.

$y = 0 \Rightarrow \ln(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = e^0 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \begin{cases} (\sqrt{2}, 0) \\ (-\sqrt{2}, 0) \end{cases}$

c) Simetrías: $\begin{cases} f(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = \ln(x^2 - 1) \\ f(x) = \ln(x^2 - 1) \end{cases} \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ f es par y por lo tanto la gráfica es simétrica respecto del eje Y.

d) Asíntotas

i) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to -1^-} \ln(x^2 - 1) = \ln 0 = -\infty$. Asíntota $x = -1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x^2 - 1) = \ln 0 = -\infty$. Asíntota $x = 1$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty \Rightarrow$ No tiene.

iii) Asíntotas oblicuas: $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{x} = 0 \Rightarrow$ No tiene

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

$y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \text{Dom } f$

Signo f´	–				+
f es:	decrece	–1	No definida	1	crece

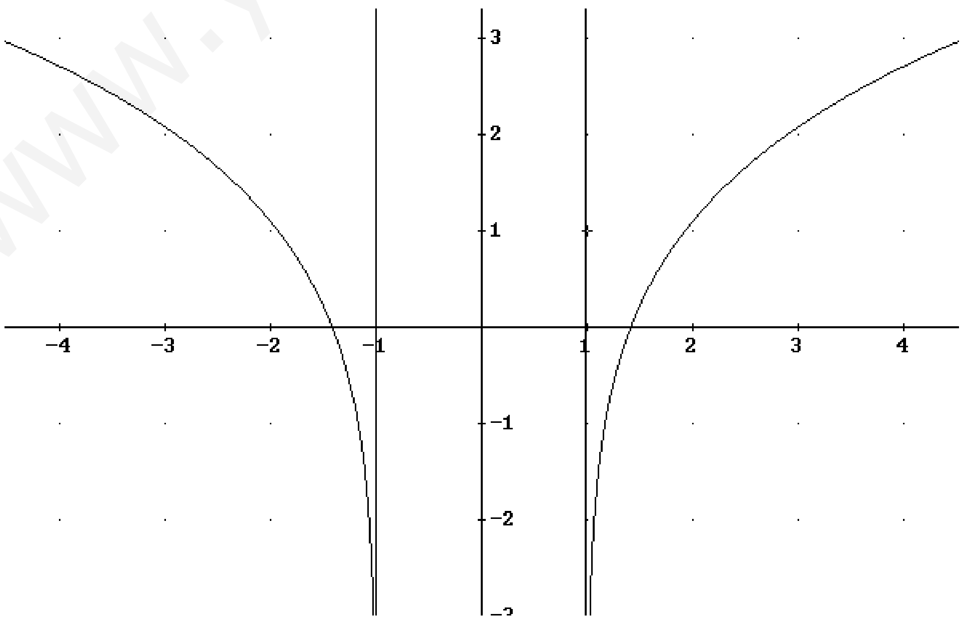
no tiene máximo ni mínimo.

f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión:

$y'' = \dfrac{2 \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} \neq 0 \Rightarrow$ no tiene puntos de inflexión.

Signo f''	–				–
f es:	convexa	–1	No definida	1	convexa

g) Gráfica:



14. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

g) Dominio: R – {0}

h) Puntos de corte con los ejes: no tiene.

i) Simetrías: $f(-x) = -x \cdot e^{1/-x} = -\dfrac{x}{e^{1/x}} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ no tiene

j) Asíntotas

i) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$ no tiene cuando $x \to 0^-$ pues la función tiende a cero

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

ii) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left(\pm\infty \cdot e^0\right) = \pm\infty$. No tiene.

iii) Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$; $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{L'Hop}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\boxed{y = x + 1}$$

k) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

$y' = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 0$, como $e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$

En el intervalo $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente

En el intervalo $(0,1)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente

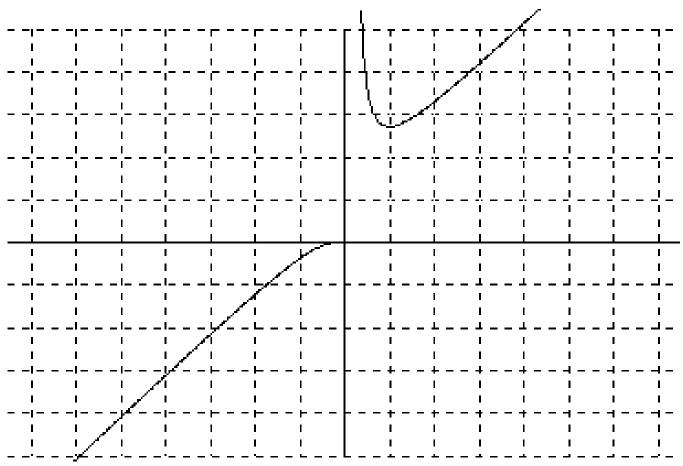
En el intervalo $(1, +\infty)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente

En x = 1 hay un mínimo relativo. Mínimo: (1, e)

l) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \neq 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$ $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es convexa

En el intervalo $(0, +\infty)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f es cóncava



15. $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \dfrac{-(x-2)}{x} & \text{si } x\le 2 \text{ y } x\ne 0 \\ \dfrac{x-2}{x} & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) Dominio: R – { 0 }
b) Puntos de corte con los ejes: (0, 2)
c) Simetrías: no tiene
d) Asíntotas
   i) Asíntotas verticales: x = 0
   ii) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+2}{x}=-1 \Rightarrow x=-1$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x}=1 \Rightarrow x=1$

   iii) Asíntotas oblicuas: no tiene
e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

   $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \dfrac{-(x-2)}{x} & \text{si } x\le 2 \text{ y } x\ne 0 \\ \dfrac{x-2}{x} & \text{si } x>2 \end{cases}$, Dom f = R– {0}, es continua en su dominio, pero **no es derivable** en x = 2 : $\begin{cases} f'(2^-)=-\dfrac{1}{2} \\ f'(2^+)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$. La función derivada de f es:

   $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } x<2,\ x\ne 0 \\ \dfrac{2}{x^2} & \text{si } x>2 \end{cases}$, f´(x) ≠ 0 para todo x ∈ Dominio de f´

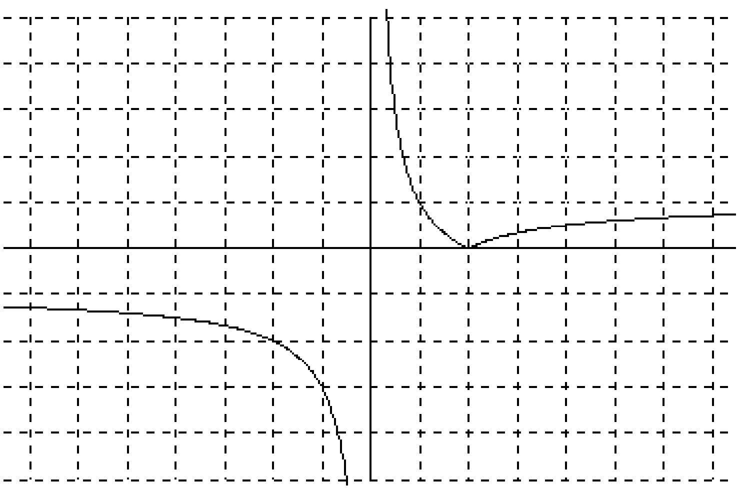
Signo de f´	–	0	–	2	+
f es:	↘		↘	mínimo (2,0)	↗

En los intervalos (–∞,0) y (0,2) la función decrece, pues f´(x) < 0

En x = 2 tiene un mínimo relativo, f(2) = 0. El mínimo está en el punto (2,0)

En el intervalo (2,+ ∞) decrece, pues f´(x) > 0

f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: (se deja como ejercicio)



16. $y = \ln x - x$

a) Dominio: $R^+ = (0,+\infty)$

b) Puntos de corte con los ejes:

No corta al eje de ordenadas pues para x = 0 no está definida $(0 \notin \text{Dom } f)$.

Como $\forall x \in (0,+\infty)$ $\ln x < x \Rightarrow \ln x - x \neq 0$ y por lo tanto no corta al eje de abscisas.

c) Simetrías: no tiene

d) Asíntotas

i) Asíntotas verticales: $\lim_{x\to 0^+} (\ln x - x) = -\infty \Rightarrow \boxed{x = 0}$

ii) Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty \left(\text{ya que } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\right), \text{ no tiene.}$$

iii) Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - x}{x} \overset{L''H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1} = -1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x - x + x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

No tiene asíntota oblicua

e) Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y' = \frac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$.

$y'' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ máximo en $x = 1$, $f(1) = -1 \Rightarrow$ máximo en el punto $(1,-1)$.

En el intervalo (0 , 1) $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente.

En el intervalo $(1,+\infty)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente.

f) Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $y'' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, $f''(x) < 0$ para todo $x \in \text{Dom } f$

$\Rightarrow$ la función es siempre convexa.

g) Gráfica: