UNIDAD 2: DERIVADAS Y APLICACIONES

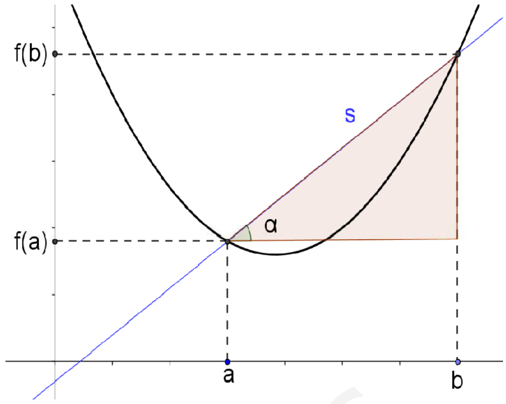
ÍNDICE DE LA UNIDAD

1.- INTRODUCCIÓN.

El concepto de derivada, íntimamente asociado al de límite, que ya estudiamos en la unidad anterior, constituyen, junto al de integral, los dos pilares fundamentales del ***Cálculo Infinitesimal****, parte de las Matemáticas de suma importancia en nuestro mundo actual. Fue* ***Fermat*** *(1602-1665), adelantándose a* ***Newton y Leibnitz,*** *el primer matemático que formuló la idea de derivada en sus estudios de máximos y mínimos. Años después, Newton también llegó a la idea de derivada en sus investigaciones sobre velocidad. Por otra parte, Leibnitz también progresó en la definición de derivada y fue quien designó la derivada en la forma: dx/dt, refiriéndose a cantidades infinitesimalmente pequeñas.*

Ya en el siglo XIX, los matemáticos de la época dieron rigor y precisión al concepto de derivada, conservándose prácticamente hasta nuestros días y siendo, junto con las integrales una de las herramientas más eficaces para múltiples campos de la ciencia como la Física, la Química o toda la Ingeniería.

2.- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.



Definición 1: Sea f una función definida en un intervalo $[a,b] \subseteq Dom(f)$. Se llama **tasa de variación media** de f en dicho intervalo al cociente: $TVM_{[a,b]}(f) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Nota 1: Obsérvese que la tasa de variación media de una función en un intervalo coincide con la pendiente (recordemos que la pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo que forma con el eje de abscisas) de la recta secante a la gráfica en los puntos correspondientes, es decir: $m = tg\alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = TVM_{[a,b]}(f)$

Definición 2: Sea f una función definida en un entorno de un punto $x=a$ de su dominio. Decimos que f es **derivable** en dicho punto si existe y es finito: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. En tal caso, a este límite se le llama tasa de variación media o **derivada** de la función en el punto. Se escribe: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Al cociente $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se le llama **cociente incremental.**

Nota 2: Sin más que hacer el cambio de variable $h = x-a$, podemos obtener una definición equivalente y que fue la primera que apareció históricamente: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ambas definiciones son válidas y dependerá del caso la idoneidad de emplear una u otra.

Definición 3: Sea f una función definida en un entorno por la izquierda de un punto $x=a$ de su dominio. Decimos que f es **derivable por la izquierda** en dicho punto si existe y es finito: $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. En tal caso, a este límite se le llama **derivada por la izquierda** de la función en el punto. Se escribe: $f'_-(a) = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Definición 4: Sea f una función definida en un entorno por la derecha de un punto $x=a$ de su dominio. Decimos que f es **derivable por la derecha** en dicho punto si existe y es finito: $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. En tal caso, a este límite se le llama **derivada por la derecha** de la función en el punto. Se escribe: $f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Nota 3: Es evidente que una función es derivable en un punto cuando existen sus derivadas laterales y coinciden.

Definición 5: Se dice que una función es derivable en un intervalo cuando lo es en todos sus puntos, entendiendo derivadas laterales en los extremos cerrados del intervalo si es que el intervalo es cerrado.

Ejemplo 1: Sea $f(x)=x^2-3x+1$. Veamos si es derivable en algunos puntos:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}=-1\Rightarrow f'(1)=-1$

b) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-3h+1-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h-3)}{h}=-3\Rightarrow f'(0)=-3$

Ejemplo 2: Sea $g(x)=|3x-6|$. Veamos si es derivable en algunos puntos:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|3x-6|-|-3|}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-3x+6-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-3(x-1)}{x-1}=-3\Rightarrow g'(1)=-3$

b) $\displaystyle g'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|3x-6|-|0|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-3x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-3(x-2)}{x-2}=-3$

$\displaystyle g'_+(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|3x-6|-|0|}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)}{x-2}=3$

Así pues f no es derivable en $x=2$

Ejemplo 3: Sea: $h(x)=\begin{cases}-2x-1 & si \quad x\le -1\\ -x^2+2 & si \quad x>-1\end{cases}$. Veamos si es derivable en $x=-1$

$\displaystyle h'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-2x-1-1}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-2(x+1)}{x+1}=-2$

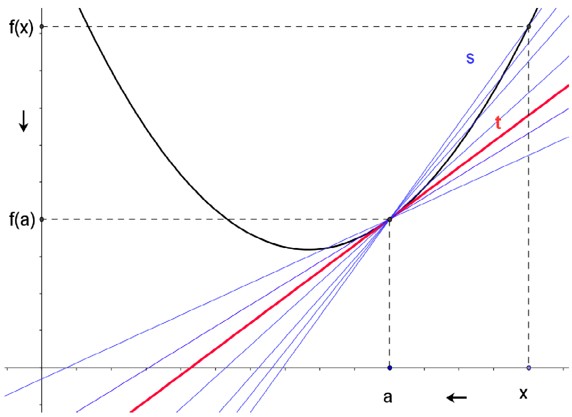
$\displaystyle h'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-x^2+2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-(x+1)(x-1)}{x+1}=2$

Así pues f no es derivable en $x=-1$

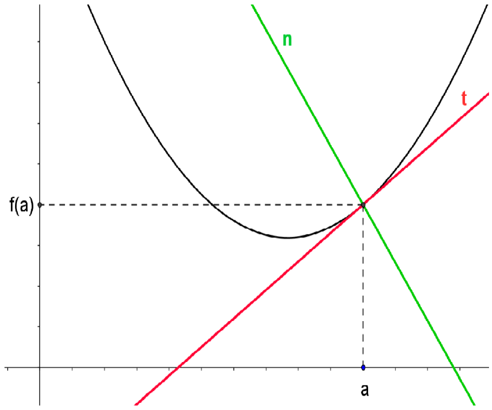
3.- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.

Analicemos desde un punto de vista gráfico la definición de derivada de una función en un punto:

Parece claro que, a medida que x se acerca al punto a, las rectas secantes se acercan a la recta tangente en el punto a. Es además evidente, que las distintas tasas de variación media, correspondientes a los sucesivos cocientes incrementales, tienden, en caso de existir a la derivada. Podemos establecer, por tanto la siguiente interpretación geométrica de la derivada:



<u>Nota 4:</u> (Interpretación geométrica de la derivada). Si una función f es derivable en un punto $x = a$, entonces, **la derivada de f en** $x = a$ **coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva** $y = f(x)$ **en el punto** $(a, f(a))$. Así pues, las rectas tangente y normal tienen por ecuaciones:



$t:\ y - f(a) = f'(a)(x-a)$	Recta tangente
$n:\ y - f(a) = \dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$	Recta normal

Esta nota es una de las propiedades más importantes para entender bien todas las aplicaciones de las derivadas, por lo que debemos tomarnos su comprensión e interpretación en distintos contextos como uno de los objetivos esenciales de la unidad.

<u>4.- CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD.</u>

<u>Proposición 1:</u> Si f es derivable en el punto $x = a$, entonces es continua en $x = a$.

<u>Nota 5:</u> Como consecuencia de la proposición anterior, si una función no es continua en un punto, entonces, no puede ser derivable en dicho punto.

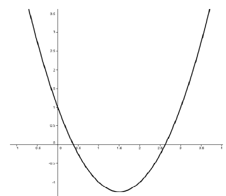
<u>Nota 6:</u> El recíproco de la proposición 1 no es cierto, es decir, una función continua en un punto no tiene porqué ser derivable.

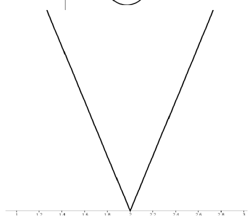
<u>Definición 6:</u> Se dice que una función f tiene un **punto anguloso** en $x = a$ si f es continua en $x = a$ y no derivable, siendo derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto, es decir, si es continua y existen las derivadas laterales pero no coinciden.

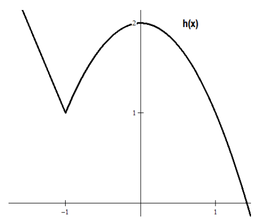
Gráficamente, un punto anguloso es aquel en el que las tangentes "saltan" de la izquierda a la derecha del punto. Por el contrario, las funciones derivables son "redondeadas" y sus tangentes no dan "saltos".

<u>Ejemplo 4:</u> Si recordamos los ejemplos 1, 2 y 3, cuyas expresiones eran:

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \ ,\ g(x) = |3x - 6| \ \text{ y } \ h(x) = \begin{cases} -2x - 1 & si \quad x \le -1 \\ -x^2 + 2 & si \quad x > -1 \end{cases}$$







Es evidente que mientras la primera es "redondeada" y no tiene "picos", la segunda y tercera presentan "picos" (puntos angulosos) en los puntos en los que no eran derivables. Este hecho, como tendremos oportunidad de ver durante la unidad, es bastante frecuente en funciones con valores absolutos y en funcione definidas a trozos.

Además de esto, con estos ejemplos podemos comprobar que la continuidad no implica la derivabilidad ya que se trata de tres funciones continuas en todo su dominio.

5.- FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS

Definición 7: Sea $f:D\to\mathbb{R}$ una función derivable en un dominio $D'\subseteq D$. Se llama **función derivada** primera de f a la función $\begin{array}{c} f':D'\to\mathbb{R} \\ x\to f'(x)\end{array}$. De manera análoga se define la función **derivada segunda** de f en un dominio $D''\subseteq D'$, como la derivada de la derivada, es decir $f''(x)=(f')'(x)$, la derivada tercera como la derivada de la derivada segunda, ect.

Nota 7: Es importante observar que, mientras que la derivada de una función en un punto es un número, la función derivada, como su propio nombre indica, es una función, precisamente la que a cada punto asocia la derivada puntual.

Ejemplo 5: Hallemos la función derivada de la función $f(x)=x^2$. Sea $a\in\mathbb{R}$ cualquiera. $f'(a)=\underset{x\to a}{Lím}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\underset{x\to a}{Lím}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\underset{x\to a}{Lím}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=2a$. Así pues, podemos concluir que la función es derivable en todo su dominio, siendo $f'(x)=2x$

6.- ÁLGEBRA DE DERIVADAS. REGLA DE LA CADENA

Veamos en este punto de la unidad, el resultado de las derivadas que resultan de las operaciones elementales:

Proposición 2: (Álgebra de derivadas). Sean f y g dos funciones derivables en $x=a$, entonces:

a) $f\pm g$ es derivable en $x=a$ y se cumple: $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

b) $k\cdot f$ es derivable en $x=a$ y se cumple: $(k\cdot f)'(a)=k\cdot f'(a)\ \forall k\in\mathbb{R}$

c) $f\cdot g$ es derivable en $x=a$ y se cumple: $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$

d) Si $g(a)\neq 0$, $\frac{f}{g}$ es derivable en $x=a$ y se cumple: $(f/g)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2}$

Proposición 3: (Regla de la cadena). Sea g una función derivable en $x=a$ y f una función derivable en $x=g(a)$, entonces $f\circ g$ es derivable en $x=a$ y se cumple que: $(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a)$

7.- DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES.

Es evidente que el cálculo de derivadas mediante la definición (procediendo de forma similar a lo hecho en el ejemplo 5) resulta largo y a menudo dificultoso. Para evitar estos cálculos, lo más sensato es obtener una vez la "fórmula" de cada derivada elemental, y usarla cuando sea necesario. En las dos siguientes tablas se resumen las expresiones de las derivadas de funciones elementales y las operaciones vistas en el punto 6. Además, *exceptuando el valor absoluto, las funciones elementales, son derivables en sus dominios respectivos y carecen de puntos angulosos.*

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES			
Simple		**Compuesta**	
Función	**Derivada**	**Función**	**Derivada**
$y=k$	$y'=0$		
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$y=f(x)^n$	$y'=nf(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=\frac{-1}{x^2}$	$y=\frac{1}{f(x)}$	$y'=\frac{-f'(x)}{f(x)^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\frac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$	$y=a^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$	$y=\ln f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$
$y=senx$	$y'=\cos x$	$y=sen(f(x))$	$y'=f'(x)\cdot\cos(f(x))$
$y=\cos x$	$y'=-senx$	$y=\cos(f(x))$	$y'=-f'(x)\cdot sen(f(x))$
$y=tg\,x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x=\sec^2 x$	$y=tg(f(x))$	$y'=\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}=f'(x)\cdot(1+tg^2(f(x)))=f'(x)\sec^2(f(x))$
$y=cotg\,x$	$y'=\frac{-1}{sen^2x}=-(1+cotg^2x)=-co\sec^2 x$	$y=cotg(f(x))$	$y'=\frac{-f'(x)}{sen^2(f(x))}=-f'(x)\cdot(1+cotg^2(f(x)))=-f'(x)cosec^2(f(x))$
$y=\sec x$	$y'=\frac{senx}{\cos^2 x}$	$y=\sec(f(x))$	$y'=\frac{sen(f(x))}{\cos^2(f(x))}f'(x)$
$y=co\sec x$	$y'=\frac{-\cos x}{sen^2x}$	$y=co\sec(f(x))$	$y'=\frac{-\cos(f(x))}{sen^2(f(x))}f'(x)$
$y=arcsen\,x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=arcsen(f(x))$	$y'=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=\arccos x$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arccos(f(x))$	$y'=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=arctg\,x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	$y=arctg(f(x))$	$y'=\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

OPERACIONES CON DERIVADAS	
Suma/Resta	$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
Producto por escalar	$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$
Producto	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Cociente	$(f / g)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Composición (Regla de la cadena)	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Nota 8: Además de las derivadas de funciones elementales y de las reglas de derivación, es bastante importante que tengamos en cuenta algunas de las propiedades de los logaritmos que pasamos a recordar a continuación, ya que, al transformar productos y divisiones en sumas y restas, además de potencias en productos, facilitan bastante el cálculo de derivadas logarítmicas aplicando las propiedades antes de derivar. Pasamos a recordarlas:

a) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$

Vamos a dedicar en este punto un tiempo a resolver algunas situaciones que requerían el cálculo de derivada y que hemos pospuesto hasta disponer de la tabla de derivadas.

Nota 9: **(Estudio de la derivabilidad)** Lo primero que podemos observar, a la vista de la tabla, es que la mayoría de las funciones elementales no son sólo continuas y derivables, sino que sus derivadas son también continuas (y en la mayoría de los casos nuevamente derivables). Esto nos permite estudiar la derivabilidad derivando las funciones y tomando límites y hallar derivadas puntuales derivando y sustituyendo. Esto simplifica bastante el estudio de la derivación. Veamos un ejemplo ya hecho utilizando este método:

Ejemplo 6: Si tomamos la misma función del ejemplo 3:

$$h(x) = \begin{cases} -2x - 1 & si \quad x \le -1 \\ -x^2 + 2 & si \quad x > -1 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} -2 & si \quad x < -1 \\ 2x & si \quad x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f'_-(-1) = -2 \\ f'_+(-1) = 2 \end{matrix}$$

Así pues, se concluye que no es derivable en $x = -1$, ya que tiene un punto anguloso. Obsérvese también que al derivar una función a trozos, las desigualdades pasan a ser estrictas momentáneamente hasta que no tengamos seguridad de la derivabilidad de la misma en el punto en cuestión.

Proponemos **las actividades 1, 2 y 3**

Ejemplo 7: Hallemos las recta tangente y normal a la curva $y = x^2 - 5x + 11$ en $x = 1$.

Lo primero que hacemos es llamarla $f(x)=x^2-5x+11$ para sustituir en valores numéricos con rigor. Recordemos que las fórmulas de la tangente y la normal, para este caso serían: $\begin{cases} t:\ y-f(1)=f'(1)(x-1) & \text{Recta tangente} \\ n:\ y-f(1)=\dfrac{-1}{f'(1)}(x-1) & \text{Recta normal} \end{cases}$

Así pues, necesitamos hallar $f(1)$ y $f'(1)$, para lo cual, derivamos la función: $f'(x)=2x-5$. Así pues: $\left.\begin{matrix} f(1)=7 \\ f'(1)=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} t: y-7=-3(x-1) \\ n: y-7=\dfrac{1}{3}(x-1) \end{cases}$ *simplificando* $\begin{cases} t: y=-3x+10 \\ n: y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{20}{3} \end{cases}$

Proponemos la **actividad 3**.

Ejemplo 8: Vamos a mostrar ahora varios ejemplos de cómo se usa la tabla de derivadas y las reglas de derivación:

a) $y=x^2-x+6 \Rightarrow y'=2x-1$

b) $y=\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+3x \Rightarrow y'=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+3$

c) $y=x^3\ln x \Rightarrow y'=3x^2\ln x+x^3\cdot\dfrac{1}{x}=3x^2\ln x+x^2=x^2(3\ln x+1)$

d) $y=x^2\sqrt{x}=x^{5/2} \Rightarrow y'=\dfrac{5}{2}x^{3/2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{x^3}$

e) $y=\dfrac{3x-4x^2}{6} \Rightarrow y'=\dfrac{3-8x}{6}$

f) $y=\ln\left(x^2 senx\right)=2\ln x+\ln senx \rightarrow y'=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\cos x}{senx}=\dfrac{2}{x}+\cot gx$

g) $y=\dfrac{e^x}{x^2} \Rightarrow y'=\dfrac{e^x x^2-2xe^x}{x^4}=\dfrac{xe^x(x-2)}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$

h) $y=2^x\cos x \Rightarrow y'=2^x\cdot\ln 2\cdot\cos x-2^x senx=2^x(\ln 2\cdot\cos x-senx)$

i) $y=4^{3/x} \Rightarrow y'=\dfrac{-3}{x^2}\cdot\ln 4\cdot 4^{3/x}$

j) $y=\ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$

k) $y=sen3x \Rightarrow y'=3\cos 3x$

l) $y=arctg\sqrt{x} \Rightarrow y'=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

m) $y=\arccos x^2 \Rightarrow y'=\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Se proponen las **actividades 4 y 5**.

8.- DERIVACIÓN LOGARÍTMICA.

A menudo, existen funciones que no se ajustan a ninguna de las derivadas de funciones elementales y deben ser llevadas a cabo con otros métodos no elementales. Este es el caso de funciones como $f(x)=x^x$, a la que no se le puede aplicar la fórmula de la potencia (el exponente no es constante) ni la de la exponencial (la base no es constante). Para derivar este tipo de funciones y otras en las que se pueda aplicar, vamos a ver un procedimiento llamado **derivación logarítmica:**

Nota 10: **(derivación logarítmica)**

1. Consideremos una función del tipo $y=f(x)^{g(x)}$.
2. Si tomamos logaritmo neperiano en ambos miembros nos quedará la igualdad: $\ln y=\ln f(x)^{g(x)}$
3. Aplicando ahora las propiedades de los logaritmos, se transforma en: $\ln y=g(x)\ln f(x)$.
4. Si ahora derivamos ambos miembros queda: $\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$
5. Con lo que, basta despejar: $y'=f(x)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$

Como es lógico, no tiene ningún sentido memorizar esta última fórmula y, en los ejemplos concretos podemos proceder como en el caso general que acabamos de ver. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 9: Sea $y=x^x \Rightarrow \ln y=\ln x^x=x\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y}=\ln x+x\frac{1}{x} \Rightarrow y'=x^x(1+\ln x)$

Se propone la **actividad 6**.

9.- APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

9.1.- Cálculo de límites: Reglas de L'Hôpital.

Proposición 4: **(Regla de L'Hôpital):** Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en un entorno reducido de $x=a$ tales que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$ *o bien* $\frac{\infty}{\infty}$.
Si existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y coincide con el anterior. El resultado también es válido para límites en el infinito.

En la práctica, esto supone que en la mayoría de las situaciones en las que se nos presenten indeterminaciones de tipo cociente, podemos derivar numerador y denominador y ver si el límite resultante existe, ya que, en tal caso, coincidirá con el anterior.

Ejemplo 10: Resolvamos los siguientes límites:

a) $\underset{x \to 0}{Lím} \dfrac{senx}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \underset{x \to 0}{Lím} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

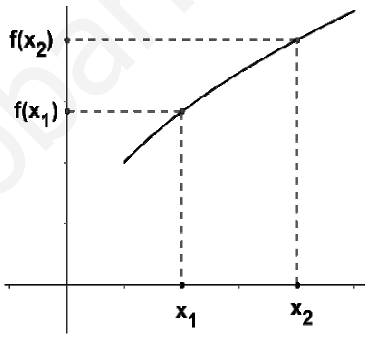
b) $\underset{x \to +\infty}{Lím} \dfrac{\ln x}{x^2+2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \overset{L'H}{=} \underset{x \to +\infty}{Lím} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \underset{x \to +\infty}{Lím} \dfrac{1}{2x^2} = \left[\dfrac{1}{+\infty}\right] = 0$

c) $\underset{x \to 0^+}{Lím} (x \ln x) = [0 \cdot \infty] = \underset{x \to 0^+}{Lím} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \underset{x \to 0^+}{Lím} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \underset{x \to 0^+}{Lím} (-x) = 0$

Se propone la **actividad 7**

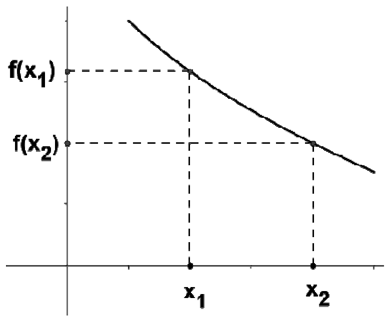
9.2.- Monotonía y extremos relativos. Optimización.

Definición 8: Sea f una función definida en un intervalo (a,b). Se dice que f es **creciente en el intervalo** (a,b) si $\forall x_1, x_2 \in (a,b) / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$



Definición 9: Se dice que una función f es **creciente en un punto** $x = a$ si existe un entorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ de dicho punto en el que f es creciente.

Definición 10: Sea f una función definida en un intervalo (a,b). Se dice que f es **decreciente en el intervalo** (a,b) si $\forall x_1, x_2 \in (a,b) / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$



Definición 11: Se dice que una función f es **decreciente en un punto** $x = a$ si existe un entorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ de dicho punto en el que f es decreciente.

Definición 12: Cuando las desigualdades de las definiciones anteriores son estrictas, hablamos de función **estrictamente creciente o decreciente**.

Proposición 5: (Monotonía): Sea f una función derivable en un punto $x = a$. Entonces:

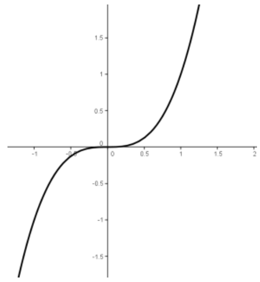
a) Si $f'(a) > 0 \Rightarrow$ f es creciente en $x = a$

b) Si $f'(a) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente en $x = a$

Nota 11: En general, el recíproco de la proposición anterior, no es cierto, es decir, no todas las funciones derivables en un punto y crecientes (o decrecientes) en el punto tienen porqué tener derivada positiva (o negativa). Lo único que podemos asegurar es que si una función es derivable y creciente (decreciente), entonces $f'(a) \ge 0$ $(f'(a) \le 0)$

Veamos un contraejemplo:

<u>Ejemplo 11:</u> Consideremos la función $f(x)=x^3$. Como podemos ver en su gráfica, se trata de una función creciente en todo su dominio y, en particular en $x=0$. Sin embargo, es evidente que su derivada no es positiva ya que $f'(0)=0$



<u>Nota 12:</u> Análogamente se obtiene un resultado para intervalos:

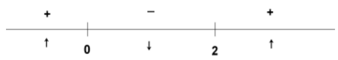
a) Si $f'(x)>0\ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow$ f es creciente en el intervalo (a,b)

b) Si $f'(x)<0\ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow$ f es decreciente en el intervalo (a,b)

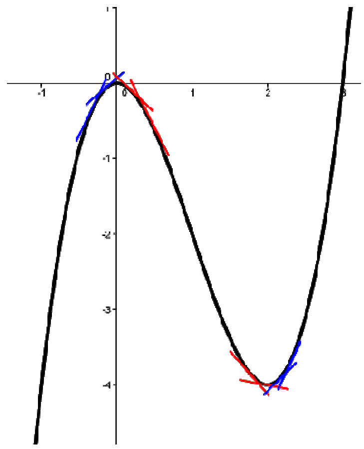
A partir de esta proposición, el estudio de la monotonía de una función derivable en un dominio se puede realizar estudiando el signo de su función derivada en dicho dominio. Este método, que durante el curso pasado no lo podíamos llevar a cabo, será una potente herramienta a la hora de conocer las características gráficas de una función dada algebraicamente. Veamos un ejemplo:

<u>Ejemplo 12:</u> Estudiemos la monotonía de la función $f(x)=x^3-3x^2$ definida en $\mathbb{R}$:

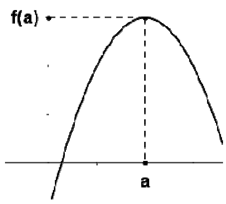
- $f'(x)=3x^2-6x\ \Rightarrow\ f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\overset{fácil}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x_1=0\\x_2=2\end{cases}$
- Estudiando el signo de la derivada con las raíces calculadas:



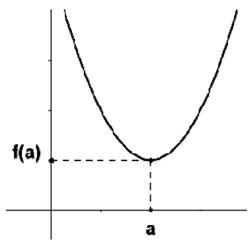
- Así pues, podemos concluir que: f es creciente en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$; f es decreciente en $(0,4)$
- Observemos lo visto desde un punto de vista gráfico:



Es evidente que la monotonía en la gráfica se corresponde con los visto estudiando el signo de la derivada. Una interpretación de esto bastante interesante para la comprensión de este apartado es observar lo que ocurre con las pendientes de las tangentes a la gráfica en los distintos intervalos. Se puede observar que en los intervalos en los que la función es creciente, las rectas tangentes también lo son y en los que la función es decreciente, las rectas tangentes son decrecientes también. Esto era de esperar, ya que, según vimos en la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente en un punto coincidía con la derivada en dicho punto.



<u>Definición 13:</u> Se dice que una función f alcanza un **máximo relativo** en un punto $(a,f(a))$ si existe un entorno $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ del punto $x=a$ tal que $f(x)<f(a)\ \forall x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)-\{a\}$



<u>Definición 14:</u> Se dice que una función f alcanza un **mínimo relativo** en un punto $(a,f(a))$ si existe un entorno $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ del punto $x=a$ tal que $f(x)>f(a)\ \forall x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)-\{a\}$.

Proposición 6: **(Condición necesaria de extremo relativo):** Sea f una función derivable en un punto $x = a$. Si f tiene en dicho punto un extremo relativo, entonces $f'(a) = 0$.

Nota 13: La condición anterior no es suficiente, es decir, puede darse que una función con derivada nula en un punto no tenga extremo relativo en dicho punto. Como contraejemplo nos sirve el ejemplo 11.

Proposición 7: **(Criterio de la derivada segunda):** Sea f una función dos veces derivable en $x = a$, siendo $f'(a) = 0 \;\; y \;\; f''(a) \neq 0$. Entonces:

a) Si $f''(a) > 0 \Rightarrow$ f presenta en $(a, f(a))$ un mínimo relativo.

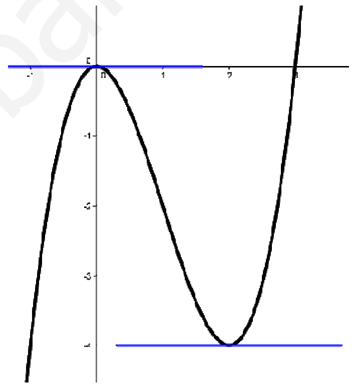
b) Si $f''(a) < 0 \Rightarrow$ f presenta en $(a, f(a))$ un máximo relativo.

Nota 14: En la situación de la proposición anterior, si $f'(a) = 0 \;\; y \;\; f''(a) = 0$ pero la primera derivada no nula en $x = a$ es de orden par, el criterio sigue siendo válido con el signo de dicha derivada.

Ejemplo 13: Con la función del ejemplo 12, es evidente que los candidatos a extremos relativos se obtienen en la forma:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \overset{fácil}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -6 < 0 & \Rightarrow \text{Máximo relativo en } (0,0) \\ f''(2) = 6 > 0 & \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } (2,-4) \end{cases}$$



Otra forma de establecer si un extremo es máximo o mínimo relativo es estudiar su monotonía a la izquierda y derecha del punto en cuestión.

Nota 15: Al igual que la monotonía, se puede observar la estrecha relación entre el estudio analítico y el gráfico ya que, como se puede observar, las rectas tangentes en puntos en los que la función es derivable son horizontales, es decir, de pendiente nula, cosa que no es de extrañar puesto que la pendiente es la derivada, como ya hemos visto en numerosas ocasiones.

Nota 16: Hay que tener en cuenta que hay puntos en los que una función no es derivable. Así que si queremos ver si un punto "singular" es o no un extremo, hemos de actuar de forma distinta (sin usar la derivada). Lo más habitual es evaluar la función en puntos genéricos de la forma $a - \varepsilon \;\; y \;\; a + \varepsilon$ y ver lo que ocurre con sus imágenes.

Se proponen las **actividades 8, 9 y 10**

Definición 15: Sea f una función definida en un dominio D. Decimos que f tiene en el punto $(a, f(a))$ un **máximo absoluto** si $f(x) < f(a) \; \forall x \in D$.

Definición 16: Sea f una función definida en un dominio D. Decimos que f tiene en el punto $(a, f(a))$ un **mínimo absoluto** si $f(x) > f(a) \; \forall x \in D$.

Nótese que los conceptos de extremos relativos y absolutos son similares pero distintos. Mientras que el extremo relativo se centra en lo que ocurre "alrededor" del punto en un entorno cerca de él, los extremos absolutos abarcan un dominio mayor. En resumen, los extremos relativos son los mayores (menores) de los valores que toma la función cerca de ellos mientras que los absolutos son los mayores (o menores) de todo el dominio estudiado.

*En numerosas situaciones físicas, geométricas, económicas,…se plantean problemas que consisten en "**optimizar funciones**", es decir, en hallar sus máximos y/o mínimos absolutos en determinados dominios de definición de las mismas. A menudo, la dificultad de ello no radica en optimizar en sí las funciones, sino en encontrar su expresión algebraica.*

Nota 17: **(Optimización de funciones)** Optimizar una función consiste en determinar sus máximos y/o mínimos absolutos de dicha función en un dominio concreto. Para ello los pasos recomendados son los siguientes:

1º) Comprender bien el enunciado del problema y extraer la información necesaria para escribir la **expresión algebraica** de la función a optimizar y su **dominio**. Es bastante frecuente que la función de una variable pueda expresarse a partir de una función de dos variables y de unas restricciones, también llamadas ligaduras.

2º) Determinar los **extremos relativos** a los que se refiera el problema (máximos y/o mínimos) aplicando lo visto en la proposición 7.

3º) Determinar los **"puntos singulares"**, es decir, aquellos puntos que pudieran ser, en principio, extremos absolutos, pero que no sean extremos relativos. Estos serán los puntos aislados, puntos de discontinuidad, puntos angulosos y extremos de intervalos cerrados.

4º) **Evaluar todos los candidatos** extraídos del 2º y 3º paso en la función. Además hemos de ver la tendencia de la función en puntos de discontinuidad y en el infinito para ver posibles ausencias de extremos.

Ejemplo 14: Hallemos dos números positivos cuya suma sea 30 y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

1º) Sean x e y los números. El problema de optimización es: $Máx\begin{cases} f(x,y)=x^2\cdot y \\ \text{Ligadura: } x+y=30 \end{cases}$.

Si despejamos y de la ligadura y sustituimos en la función, nos queda la función de una variable: $Máx\begin{cases} f(x)=x^2\cdot(30-x)=-x^3+30x^2 \\ Dom\, f=(0,30) \end{cases}$, ya que se trata de dos números positivos.

2º) Es claro que la función es continua y derivable en todo su dominio, por ser polinómica. Hallamos sus máximos relativos: $f'(x)=-3x^2+60x \Rightarrow -3x^2+60x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0\notin Dom\, f \\ x_2=20 \end{cases}$

$f''(x)=-6x+60 \Rightarrow f''(20)=-60<0$. Así pues, se trata de un máximo relativo.

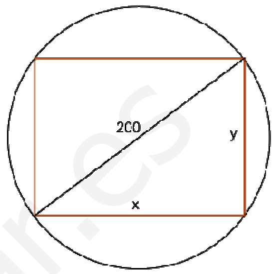
3º) No hay puntos singulares.

4º) Hemos de evaluar en $x = 20$ y ver la tendencia de la función en los extremos abiertos:

$$\left.\begin{array}{l} f(20) = 4000 \Rightarrow \text{Máximo absoluto} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 30^-} f(x) = 0 \end{array}\right\} \text{Así pues, el máximo absoluto se alcanza para } x = 20$$

Por tanto, los números buscados son el 20 y al 10, siendo el producto máximo 4000.

Ejemplo 15: Hallemos las dimensiones del jardín rectangular de mayor área que puede inscribirse en un terreno circular de 100 m de radio.



1º) Sean x e y sus dimensiones. Evidentemente, como el radio es 100 m, la diagonal mide 200 m, así pues, utilizando el Teorema de Pitágoras, el problema es: $Máx\begin{cases} A(x,y) = x \cdot y \\ \text{Ligadura: } x^2 + y^2 = 200^2 \end{cases}$

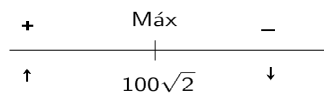
Despejando y de la ligadura y sustituyendo en la función, el problema queda:

$$Máx\begin{cases} A(x) = x \cdot \sqrt{40000 - x^2} \\ Dom\, A = (0, 200) \end{cases}$$

2º) Es claro que la función es continua y derivable en todo su dominio.

$$A'(x) = \frac{40000 - 2x^2}{\sqrt{40000 - x^2}} \Rightarrow \frac{40000 - 2x^2}{\sqrt{40000 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 40000 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -100\sqrt{2} \notin Dom\, A \\ x_2 = 100\sqrt{2} \end{cases}$$

Como la derivada segunda tiene una expresión considerablemente larga, preferimos estudiar la monotonía:



Así pues, se trata de un máximo relativo.

3º) No hay puntos singulares.

4º) Hemos de evaluar en $x = 100\sqrt{2}$ y ver la tendencia de la función en los extremos abiertos:

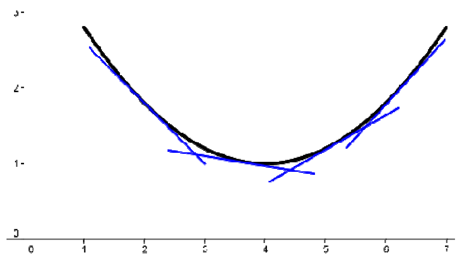
$$\left.\begin{array}{l} A\left(100\sqrt{2}\right) = 20000 \Rightarrow \text{Máx. absoluto} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} A(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 200^-} A(x) = 0 \end{array}\right\} \text{Luego el máximo absoluto se alcanza para } x = 100\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el área máxima se obtiene con un cuadrado de lado $100\sqrt{2}$, ya que

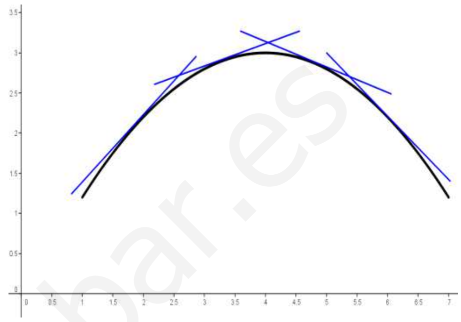
$$y = \sqrt{40000 - \left(100\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{40000 - 20000} = \sqrt{20000} = 100\sqrt{2}$$

Proponemos las **actividades 11 y 12**.

9.3.- Curvatura y puntos de inflexión.



Definición 17: Se dice que una función f es **convexa en un punto** $(a, f(a))$ si existe un entorno del punto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ en el que la recta tangente a la curva está situada por debajo de la gráfica de la función.



Definición 18: Se dice que una función f es **cóncava en un punto** $(a, f(a))$ si existe un entorno del punto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ en el que la recta tangente a la curva está situada por encima de la gráfica de la función.

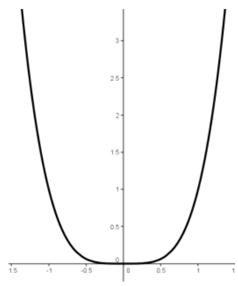
Definición 19: Diremos que una función es **convexa en un intervalo** (a,b) si lo es en todos sus puntos.

Definición 20: Diremos que una función es **cóncava en un intervalo** (a,b) si lo es en todos sus puntos.

Proposición 8: (Curvatura) Sea f una función dos veces derivable en $x=a$. Entonces:

a) Si $f''(a)>0 \Rightarrow$ f es convexa en $x=a$

a) Si $f''(a)<0 \Rightarrow$ f es cóncava en $x=a$



Nota 18: En general, el recíproco de la proposición anterior, no es cierto, es decir, no todas las funciones dos veces derivables en un punto y convexas (o cóncavas) en el punto tienen porqué tener derivada segunda positiva (o negativa). Lo único que podemos asegurar es que si una función es dos veces derivable y convexa (cóncava), entonces $f''(a)\geq 0$ $\left(f''(a)\leq 0\right)$

Veamos un contraejemplo:

Ejemplo 16: Consideremos la función $f(x)=x^4$. Como podemos ver en su gráfica, se trata de una función convexa en todo su dominio y, en particular en $x=0$. Sin embargo, es evidente que su derivada segunda no es positiva ya que $f''(0)=0$

Nota 19: Análogamente se obtiene un resultado para intervalos:

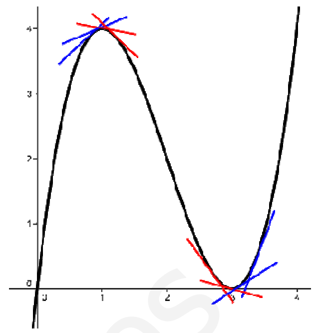
a) Si $f''(x)>0\ \forall x\in(a,b) \Rightarrow$ f es convexa en el intervalo (a,b)

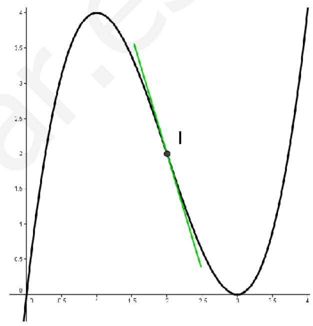
b) Si $f''(x)<0\ \forall x\in(a,b) \Rightarrow$ f es cóncava en el intervalo (a,b)

A partir de esta proposición, el estudio de la curvatura de una función dos veces derivable en un dominio se puede realizar estudiando el signo de su derivada segunda en dicho dominio. Veamos un ejemplo:

<u>Ejemplo 17:</u> Estudiemos la curvatura de la función $f(x)=x^3-6x^2+9x$ definida en $\mathbb{R}$:

- $f'(x)=3x^2-12x+9 \Rightarrow f''(x)=6x-12 \Leftrightarrow 6x-12=0 \overset{fácil}{\Leftrightarrow} x=2$
- Viendo el signo de la derivada 2ª con las raíces calculadas:
- Así pues, podemos concluir que: f es convexa en $(2,+\infty)$ f es cóncava en $(-\infty,2)$
- Si observamos la gráfica, vemos que, efectivamente, los intervalos de convexidad corresponden a intervalos en los que las pendientes de las rectas tangentes van creciendo, con lo que las derivadas son crecientes y, por tanto, las derivadas de las derivadas, que son las derivadas segundas, son positivas. Lo contrario ocurre en los intervalos de concavidad.





<u>Definición 21:</u> Se dice que una función tienen un **punto de inflexión** en $(a,f(a))$ si la función cambia de curvatura en $x=a$, es decir, si pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.

Geométricamente, en un punto de inflexión, la recta tangente pasa de estar por debajo de la gráfica a estar por encima o viceversa.

<u>Proposición 9:</u> (Puntos de inflexión) Sea f una función tres veces derivable en $x=a$.

Si $f''(a)=0$ y $f'''(a)\neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $(a,f(a))$.

<u>Nota 20:</u> En la situación de la proposición anterior, si $f''(a)=0$ y $f'''(a)=0$ pero la primera derivada no nula en $x=a$ es de orden impar, el criterio sigue siendo válido con el signo de dicha derivada.

<u>Ejemplo 18:</u> La función del ejemplo 17 tiene un punto de inflexión en $(2,2)$ ya que $f'''(2)=6\neq 0$.

Se proponen las **actividades 13 y 14**

<u>9.4.- Representación gráfica de funciones.</u>

<u>Nota 21:</u> (Aspectos a tratar para la representación gráfica de funciones)
Aunque para representar gráficamente una función no son imprescindibles todas las características que vamos a ver a continuación, en un plano general, debemos tratar:

1) <u>Dominio</u>: Para ello, recordamos que hay que tener en cuenta que:
- Las funciones racionales no están definidas en las raíces del denominador.
- Las funciones radicales de índice par solo existen cuando el radicando es positivo o nulo.
- El argumento de un logaritmo debe ser estrictamente positivo.
- Exceptuando seno y coseno, las funciones trigonométricas no están definidas en ciertos múltiplos de $\pi/2$.

2) <u>Puntos de corte con los ejes y signo</u>: Los puntos de corte y el estudio del signo suelen ser útiles ya que restringen bastante la zona de trazado de la función. Recordamos que los puntos de corte con los ejes se determinan a partir de los siguientes sistemas:

Eje OX: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$ Eje OY: $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$

3) <u>Continuidad</u>: Estudiando la continuidad de la función podemos observar posibles saltos, discontinuidades evitables y enlazar con el estudio de las asíntotas.

4) <u>Asíntotas</u>: Son quizás el aspecto más determinante a la hora de la representación gráfica. Hemos de estudiar, de la forma que vimos en la unidad anterior, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

5) <u>Simetría</u>: Aunque no es, en absoluto, un aspecto fundamental, puede ayudarnos a entender la gráfica de una forma global y detectar posibles errores. Recordemos que:

- Si $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ f es par
- Si $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ f es impar

6) <u>Periodicidad</u>: Es útil en determinadas funciones, casi en su mayoría, trigonométricas ya que permite restringir el estudio a un intervalo concreto. Recordemos que una función f es periódica de período P cuando $f(x+P) = f(x)\ \forall x \in Dom f$.

7) <u>Monotonía y extremos relativos</u>: Se estudian como hemos visto en el punto 9.2 del tema, mediante el estudio del signo y las raíces de la derivada primera.

8) <u>Curvatura y puntos de inflexión</u>: Se estudian como hemos visto en el punto 9.3 del tema, mediante el estudio del signo y las raíces de la derivada segunda.

<u>Ejemplo 19:</u> Estudiemos y representemos la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

1) <u>Dominio</u>: Es evidente que $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow Dom f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$

2) <u>Puntos de corte con los ejes y signo</u>:

Eje OX: $\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{x^2-1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$. Así pues, el único punto de corte con los ejes es el origen $O(0,0)$. El signo de la función es:

−	-1	+	0	−	1	+

3) <u>Continuidad</u>: Es inmediato ver que f es continua en su dominio con saltos finitos en los puntos de discontinuidad pero eso lo vemos más claramente en las asíntotas.

4) <u>Asíntotas</u>:

- **Verticales**:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Tiene una asíntota vertical en } x = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Tiene una asíntota vertical en } x = 1$$

- **Oblicuas**

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-x^3+x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{\pm\infty}\right] = 0$$

Así pues, tiene una asíntota oblicua en $y = x$

- **Horizontales**

No tiene ya que tiene oblicuas en ambos sentidos.

5) <u>Simetría</u>: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \dfrac{-x^3}{x^2-1} = -f(x) \Rightarrow$ f es impar

6) <u>Periodicidad</u>: Es evidente que no es periódica.

7) <u>Monotonía y extremos relativos</u>:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$$

. Estudiando su signo:

	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
+		−		−		−		−		+

Luego: f es creciente en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$

Es evidente que la función alcanza un máximo relativo en $\left(-\sqrt{3},\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

8) <u>Curvatura y puntos de inflexión</u>:

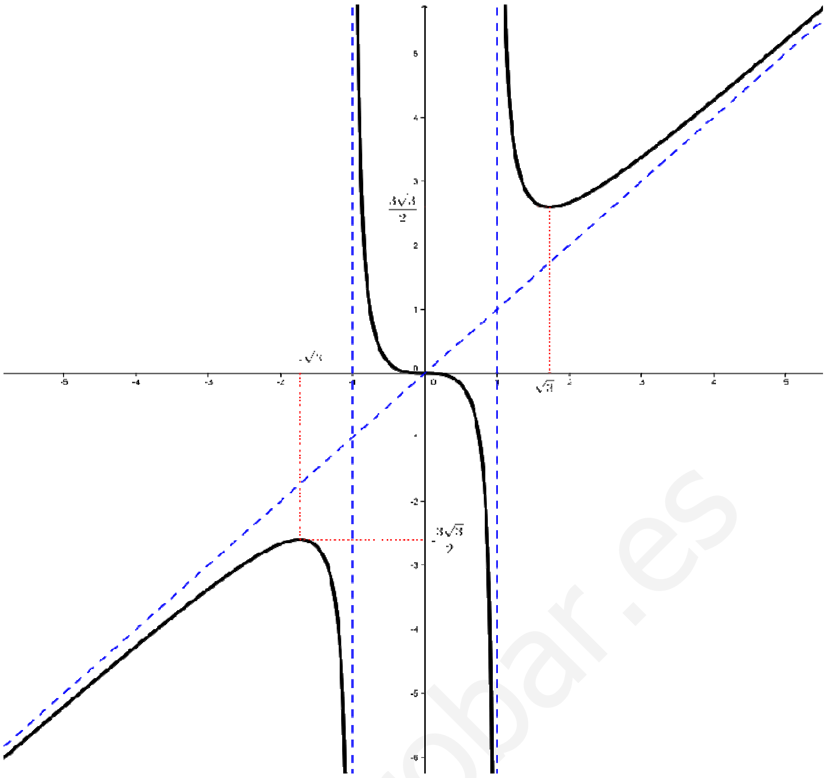
$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - 2\cdot 2x(x^2-1)(x^4-3x^3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2-1)(6x^3-5x^2+3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Para estudiar la curvatura, vemos el signo:

	-1		0		1	
−		+		−		+
CVA		CXA		CVA		CXA

Así pues, f es convexa en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ y cóncava en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ con un punto de inflexión en $O(0,0)$.

La gráfica queda como sigue:



Se propone la **actividad 15**.

10.- ACTIVIDADES

ACTIVIDADES INTERCALADAS EN LA TEORÍA

Actividad 1: Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad x<2 \\ 2x-4 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$ b) $g(x)=\left|x^2-1\right|$

Actividad 2: Determina los valores de los parámetros a y b para que sea derivable en todo su dominio la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+x & si \quad x\leq 0 \\ -x^2+ax+b & si \quad x>0 \end{cases}$

Actividad 3: Dada la función: $f(x)=\begin{cases} 2-3x & si \quad x\leq 2 \\ x^2-3 & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de f.
b) Determina las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa 3.

Actividad 4: Deriva las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ b) $y=\left(x^2+x\right)^4$ c) $y=\dfrac{3}{\sqrt{4x^2+5}}$

d) $y=\left(e^{2x}+1\right)^3$ e) $y=e^{2x^2}-e^x$ f) $y=\ln\left(x^2+7\right)$

g) $y=\ln^2(x-2)$ h) $y=\log_2(x^2+1)$ i) $y=\frac{1-3x^2}{\ln x}$

j) $y=\arccos x^2$ k) $y=\frac{1}{sen\, x}$ l) $y=\cos^2 x^2$

m) $y=\ln\left(e^{2x}+1\right)^3$ n) $y=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ñ) $y=\ln\left(x\sqrt{4-x^2}\right)$

o) $y=sen\, x\cdot\cos^2 x$ p) $y=\ln\left(tg^2 x\right)$ q) $y=arcsen\sqrt{x-1}$

r) $y=tg\left(x+\frac{1}{x}\right)$ s) $y=arctg\,(senx)$ t) $y=sen\sqrt{\ln(1-3x)}$

u) $y=\ln(x-2)^2$ v) $y=\ln\frac{e^x}{e^x-1}$ w) $y=sen^3x\cdot\cos x$

x) $y=arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ y) $y=\cos\left(\ln\frac{x^2}{2}\right)$ z) $y=\ln(tgx)$

aa) $y=\sqrt{\ln(sen2x)}$ ab) $y=\sqrt{x\sqrt{x+1}}$ ac) $y=2\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}+1}$

ad) $y=\left(x^2-2x-2\right)senx+\left(x^2+2x-2\right)\cos x$

Actividad 5: Halla la derivada novena en cada caso:

a) $f(x)=e^{2x}$ b) $g(x)=\frac{3}{x-1}$ c) $h(x)=\ln x$

Actividad 6: Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=(senx)^x$ b) $y=x^{\cos x}$ c) $y=\sqrt[x]{x}$

Actividad 7: Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}$

Actividad 8: Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x)=4x-x^2$ b) $g(x)=x^3-3x^2+5$ c) $h(x)=\frac{x-3}{x+3}$

Actividad 9: Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x)=-x^2+6x-5$ b) $g(x)=x^3-3x^2+5$ c) $h(x)=\frac{x^2+1}{x+3}$

Actividad 10: Halla a, b y c para que la curva $y=x^3+bx+c$ tenga un máximo relativo en el punto $(0,4)$.

Actividad 11: Teniendo terreno suficiente, se desea vallar una parcela rectangular que limita con un río que pasa por uno de los lados del terreno. La valla del lado opuesto al río cuesta 2 € el metro y la de los otros dos lados a 1 € el metro. ¿Cuál es la superficie máxima que podemos vallar si disponemos de 400 €?

Actividad 12: Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón rectangular de 80x50 cm cuatro cuadrados y doblando convenientemente, se construye una caja. Calcula la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja obtenida sea máximo.

Actividad 13: Estudia la curvatura y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$ b) $g(x) = x^4 - 12x^2 + 8$ c) $h(x) = x \cdot e^{-2x}$

Actividad 14: Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 12x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

Actividad 15: Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = e^{\frac{1}{x}}$ b) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ c) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 16: Calcula la derivada de las siguientes funciones, estudiando previamente el dominio de derivabilidad:

a) $f(x) = e^x tgx$ b) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{1+e^{\frac{1}{x-2}}} & si\ x \neq 2 \\ 0 & si\ x = 2 \end{cases}$

Actividad 17: Calcula y simplifica las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+sen\,x}{1-sen\,x}}$ b) $g(x) = tg\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

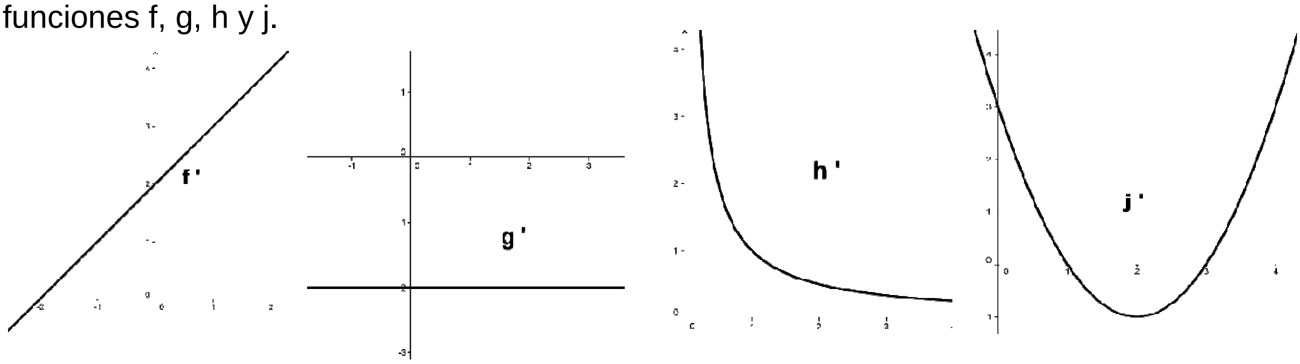
c) $h(x) = \cos\left(\ln\dfrac{x^2}{2}\right)$ d) $j(x) = \ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} + arctg\,x$

Actividad 18: Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^{x^2}$ b) $g(x) = (2-x)^x$

Actividad 19: Estudia la derivabilidad de $f(x) = e^{\frac{|x|}{|x-1|}}$.

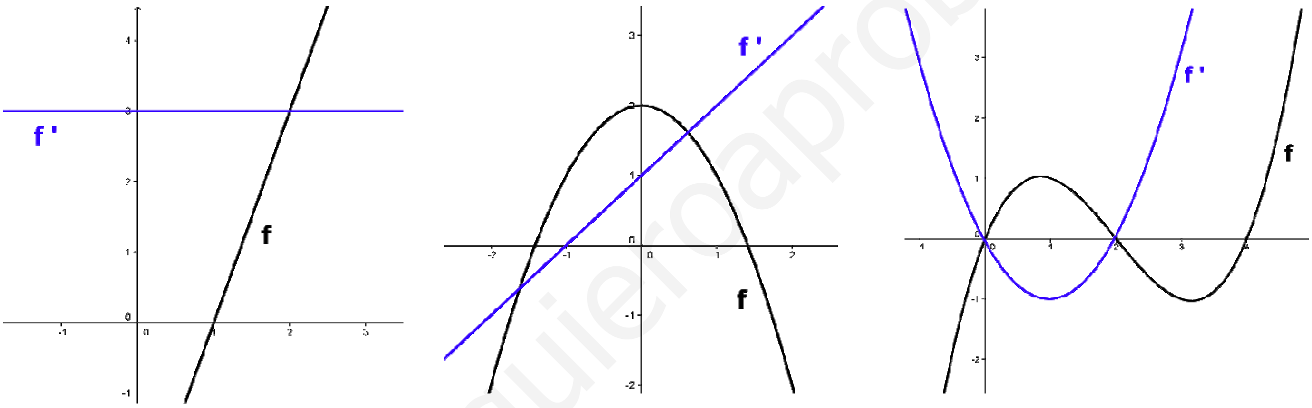
Actividad 20: Las siguientes gráficas corresponden a las funciones derivadas de las funciones f, g, h y j.



a) ¿Cuál de las siguientes funciones tiene puntos de tangente horizontal?
b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una polinómica de primer grado?
c) ¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función derivada de una polinómica de segundo grado?

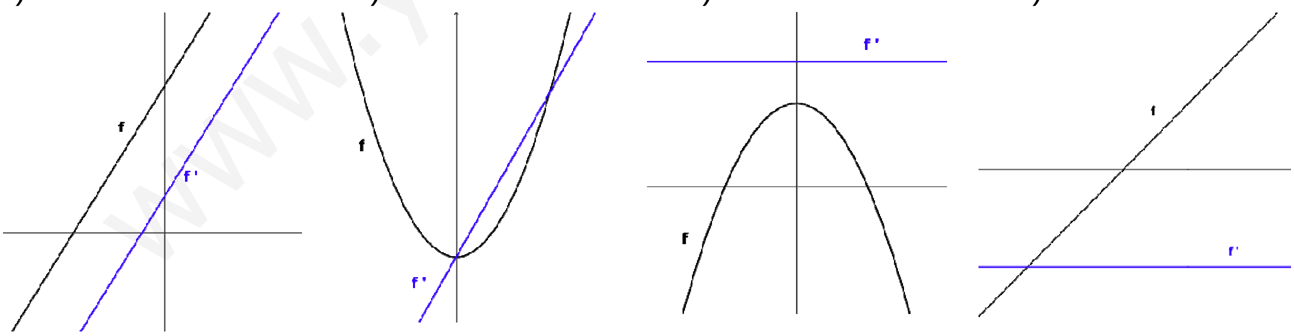
Actividad 21: ¿Cuál de los siguientes apartados representa la gráfica de una función f y la de su derivada f'? Justifica tu respuesta

a) b) c)



Actividad 22: ¿Cuál de las siguientes gráficas pueden ser posibles? Justifica la respuesta.

a) b) c) d)



Actividad 23: Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las gráficas de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^2 + 6 \quad en \ \ x = 2$ b) $g(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 \ \ en \ \ x = 1$

Actividad 24: Halla un punto de la curva $y = x^2 - 7x + 2$ en el que la tangente sea perpendicular a la recta $x + 5y = 1$.

Actividad 25: Halla los puntos de la curva $y = x^2 - x$ tales que las tangentes en ellos pasen por $P(0,-4)$. Determina también las ecuaciones de dichas tangentes.

Actividad 26: Determina el valor que debe tomar a para que la curva $y = e^{ax}$ sea tangente a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Actividad 27: Halla los valores de a, b y c para que las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 + c$ pasen por el punto $(1,2)$ y, en dicho punto, tengan la misma tangente.

Actividad 28: Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & si \;\; x \le 0 \\ sen(ax) & si \;\; 0 < x < \pi \\ (x-\pi)^2 + 1 & si \;\; x \ge \pi \end{cases}$.

a) Determina el valor de a para que sea continua.
b) Estudia la derivabilidad para dicho valor.

Actividad 29: Halla el valor que deben tomar a y b para que la función:

$f(x) = \begin{cases} a + x + \ln(x+1) & si \;\; x \ge 0 \\ x^2 + be^{-x} & si \;\; x < 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x = 0$

Actividad 30: Determina el valor de a para que la función: $f(x) = \begin{cases} x + a|senx| & si \;\; x \ge 0 \\ |x| + senx & si \;\; x < 0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$. Para ese valor de a, determina el valor de $f'(0)$.

Actividad 31: Se sabe que la función $f:[0,5] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & si \;\; 0 \le x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & si \;\; 2 \le x \le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica que $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c?

Actividad 32: Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$, para $x > 1$. En el punto $P(2,-4/3)$ la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.
a) Halla la ecuación de la mencionada recta tangente.
b) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula encuentra al eje OX
c) Si el desplazamiento es de derecha a izquierda, encuentra el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

Actividad 33: Sea $f(x)$ una función que es continua y derivable en el punto $x=0$. Sea $F(x)=|x|\cdot\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)$ definida para cualquier $x=0$ y $F(0)=a$.

a) ¿Cuánto debe valer $f(0)$ y a para que F sea continua en $x=0$?

b) Para dichos valores de de $f(0)$ y a, ¿cuánto debe valer $f'(0)$ para que F sea derivable en $x=0$? Halla, en este caso, $F'(0)$.

Actividad 34: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{sen^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{e^x-e}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\ln x}{x\ln x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\,tg\,\dfrac{\pi x}{2}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot arctg\,\dfrac{2}{x}$

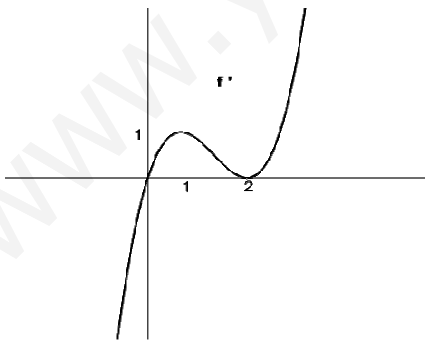
Actividad 35: Sea $f(x)=x^2\cdot e^{\frac{x}{2}}$

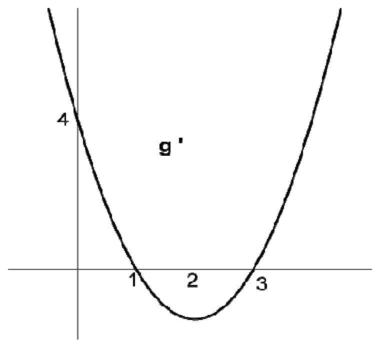
a) Calcula los límites en el infinito.
b) Determina los intervalos de monotonía y los extremos locales de la función.

Actividad 36: Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos segmentos de longitudes x y $100-x$ metros. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero y con el otro se forma un cuadrado. Siendo $f(x)$ la suma de las áreas de las dos figuras:

a) Determina el dominio de $f(x)$.
b) Estudia la monotonía de $f(x)$.
c) Indica para qué valor de x se obtiene que la suma de las áreas de las dos figuras es mínima.

Actividad 37: Las siguientes gráficas corresponden a las derivadas de dos funciones f y g. Deduce los extremos y los puntos de inflexión de dichas funciones.





Actividad 38: Indica cuál es el triángulo de área máxima de entre todos los isósceles de perímetro 30 cm.

Actividad 39: Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Actividad 40: Determina el punto de la parábola $y^2 = 4x$ más cercano al punto $P(4,0)$.

Actividad 41: Se desea construir una lata de conservas de forma cilíndrica de área total 150 cm^2 y volumen máximo. Halla el radio de la base y la altura de la lata.

Actividad 42: Un nadador A se encuentra a 3 km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a un punto B, situado en la misma playa, a 6 km de la caseta. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.

Actividad 43: Halla a y b para que la función $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ tenga extremos en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

Actividad 44: Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$. Halla a y b de manera que la gráfica de la función tenga para $x = 1$ una inflexión cuya recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45º con el eje de abscisas.

Actividad 45: Determina los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = a \cdot e^{2x} + bx^2$ tenga un punto de inflexión para $x = 0$.

Actividad 46: Dos partículas A y B se mueven en el plano OXY. En cada instante de tiempo t, las posiciones de las partículas son: $A\left(\frac{1}{2}(t-1), \frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)\right)$ y $B(2-t, 0)$. Determina el instante t_0 en el que las partículas están más próximas entres sí y a qué distancia se hallan una de la otra en ese instante.

Actividad 47: Estudia y representa las siguientes funciones:

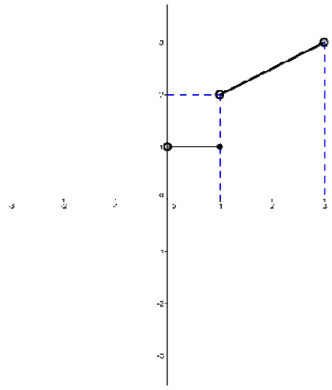
a) $y = \frac{9x-3}{x^2-2x}$ b) $y = \frac{\ln x}{x}$ c) $y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ d) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

e) $y = x + \sqrt{x^2-1}$ f) $y = |sen(2x)|$ g) $y = \frac{x^2+2x}{e^x}$ h) $y = \frac{|x|}{2-x}$

ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

Actividad 48: (2003) Estudia la derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & si \quad x \neq -1 \;\; y \;\; x \neq 1 \\ 0 & si \quad x = -1 \;\; y \;\; x = 1 \end{cases}$$



Actividad 49: (2003) En la figura adjunta puedes ver representada parte de la gráfica de una función f que está definida en el intervalo $(-3,3)$ y que es simétrica respecto al origen de coordenadas.

a) Razona cuál debe ser el valor de $f(0)$.
b) Completa la gráfica de f.
c) Halla $f'(x)$ para los $x \in (-3,3)$ en los que dicha derivada exista.

Actividad 50: (2003) Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ es tal que $f(0)=4$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,2)$. Conociendo además que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es horizontal, calcula a, b, c y d.

Actividad 51: (2003) Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de derivada nula en $x=1$ que no es extremo relativo y que $f(1)=1$. Calcula *a*, *b* y *c*.

Actividad 52: (2003) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función continua definida por

$f(x)=\begin{cases} |2-x| & si\ \ x<a \\ x^2-5x+7 & si\ \ x\geq a \end{cases}$, donde a es un número real.

a) Determina a.
b) Halla la función derivada de f.

Actividad 53: (2003) Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x+3)e^{-x}$.

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica.
c) Esboza la gráfica de f.

Actividad 54: (2003) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si\ \ x\leq 1 \\ 2-x^2 & si\ \ x>1 \end{cases}$

a) Calcula, si es posible, las derivadas laterales de f en $x=1$.
b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.

Actividad 55: (2003) De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de ese vértice en la curva $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ $(x>1)$, uno de sus lados situado sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima.

Actividad 56: (2004) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^{-x^2}$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
c) Esboza la gráfica de f.

Actividad 57: (2004) Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1€/cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

Actividad 58: (2004) De una función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ se sabe que $f(1)=3$ y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo.

a) Halla la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f ¿En qué punto alcanza la función f su máximo absoluto?
c) Estudia la concavidad y convexidad de f.

Actividad 59: (2004)

Se sabe que la función $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} 2x^2-\frac{1}{2}x+c & si\ -1<x<0 \\ \sqrt{1-x} & si\ \ 0\le x<1 \end{cases}$

es derivable en el intervalo $(-1,1)$.

a) Determina el valor de la constante c.
b) Calcula la función derivada f'.
c) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación $y=-x$.

Actividad 60: (2004) Sea la función $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x(\cos x+senx)$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
b) Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de *f*.

Actividad 61: (2004)
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y=x^2$ que es paralela a la recta $-4x+y+3=0$
b) Halla la ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y=x^2$ que pasan por el punto $(2,0)$.

Actividad 62: (2004) Se quiere fabricar una caja abierta de chapa con base cuadrada y con 32 litros de capacidad. Halla las dimensiones de la caja que precisa la menor cantidad de chapa.

Actividad 63: (2004) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2-x|x|$.

a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Estudia la derivabilidad de *f* en $x=0$.
c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.

Actividad 64: (2004) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$.

a) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de *f*. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f?

Actividad 65: (2004) Se sabe que la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & si\ \ -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & si\ \ 0\le x \end{cases}$ es continua en $(-1,+\infty)$

a) Halla el valor de a. ¿Es f derivable en $x=0$?
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Actividad 66: (2005) De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo en $x=-1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x=-2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x = 0. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 9.

Actividad 67: (2005) Sea f la función definida para $x\neq 0$ por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
c) Esboza la gráfica de f.

Actividad 68: (2005) Sea la función f definida para $x\neq 1$ por $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

a) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f.*
c) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de *f.*
d) Esboza la gráfica de *f.*

Actividad 69: (2005) Determina los puntos de la parábola de ecuación $y=5-x^2$ que están más próximos al origen de coordenadas. Calcula la distancia entre los puntos obtenidos y el origen de coordenadas.

Actividad 70: (2005) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{5x+8}{x^2+x+1}$.

a) Calcula los puntos de corte de *f* con los ejes coordenados.
b) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
c) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función)
d) Esboza la gráfica de *f.*

Actividad 71: (2005) De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12800 m^2 dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas), determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.

Actividad 72: (2005) Sea la función f definida para $x \neq 2$ por $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$.

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* .
c) Calcula, si existen, el máximo y el mínimo absoluto de f en el intervalo $[0,2)$ (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Actividad 73: (2005) De la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$ se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ viene dada por $y=-2$.

a) Calcula a y b.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Actividad 74: (2005) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-1)^2 e^{-x}$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
c) Esboza la gráfica de f.

Actividad 75: (2006) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $Ln(x^2+1)$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).
b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa.

Actividad 76: (2005) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2-|x|$.

a) Estudia la derivabilidad de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
c) Calcula los extremos relativos de *f* (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

Actividad 77: (2006) Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.

Actividad 78: (2006) Determina un punto de la curva de ecuación $y = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

Actividad 79: (2006) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}$, para $x \neq 0$.

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*.
c) Esboza la gráfica de *f*.

Actividad 80: (2006) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

a) Estudia si existen y calcula, cuando sea posible, las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los valores que alcanza en ellos la función.
c) Esboza la gráfica de f.

Actividad 81: (2006) Se sabe que la función $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si\ \ 0\le x<2 \\ -4+\sqrt{x-1} & si\ \ 2\le x\le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0, 5).

a) Calcula las constantes a y b.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.

Actividad 82: (2006) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bc+1$.

a) Determina $a,b\in\mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el punto $(2,2)$ y tiene un punto de inflexión de abscisa $x=0$.
b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de *f* en el punto de inflexión.

Actividad 83: (2006) Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm^2. Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo.

Actividad 84: (2007) Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Calcula el punto de inflexión de la gráfica de *f* .

Actividad 85: (2007) Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

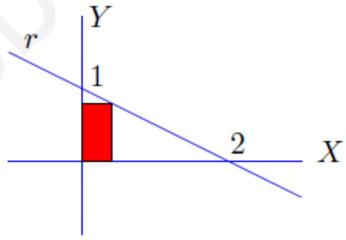
Actividad 86: (2007) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de *f* en su punto de inflexión es la recta $y=2x+3$.

Actividad 87: (2007) Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2Ln(x)$ (Ln denota logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\sqrt{e}$
.

Actividad 88: (2007) Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 metro. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

Actividad 89: (2007) De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2}+y=1$ (ver figura), determina el que tiene mayor área.



Actividad 90: (2007) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^{-x}$.

a) Determina los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

Actividad 91: (2007) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-3)e^x$.

a) Calcula los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan)
b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en su punto de inflexión.

Actividad 92: (2007) Sea f la función definida, para $x\neq 2$ *y* $x\neq -2$, por $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4}$.

a) Determina las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan).
c) Esboza la gráfica de f.

Actividad 93: (2007) Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?

Actividad 94: (2008) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x)=x^2+ax+b$ y $g(x)=ce^{-(x+1)}$. Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1,2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

a) Calcula los valores de a, b y c.
b) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

Actividad 95: (2008) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & si\ \ x\le 2 \\ x^2-bx-4 & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Halla a y b sabiendo que *f* es derivable en $\mathbb{R}$.
b) Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de *f* el punto de abscisa $x=3$

Actividad 96: (2008) De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1,2)$, encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.

Actividad 97: (2008) De entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

Actividad 98: (2008) Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en su punto de inflexión.

Actividad 99: (2008) Sea la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ \ 0\le x<2 \\ cx+1 & si\ \ 2\le x\le 4 \end{cases}.$$

a) Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo $[0,4]$, derivable en el intervalo $(0,4)$ y que $f(0)=f(4)$.
b) ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

Actividad 100: (2008) Sea la función $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x(senx+\cos x)$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
b) Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.

Actividad 101: (2008) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(3x-2x^2)e^x$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
b) Calcula los extremos relativos de *f* (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Actividad 102: (2009) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que *f* verifica:

- El punto (0, 1) es un punto de inflexión de la gráfica de f.
- f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x=1$.
- La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 1.

Actividad 103: (2009) Se divide un segmento de longitud $L=20cm$ en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Actividad 104: (2009) De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

Actividad 105: (2009) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & si\ \ x<0\\ x^2-3x-1 & si\ \ x\geq 0\end{cases}$$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad.
b) Determina sus asíntotas y extremos relativos.
c) Esboza la gráfica de *f.*

Actividad 106: (2009) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\left|x-3\right|$.

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f.
b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f. Calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Actividad 107: (2009) Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como
$f(x)=\begin{cases}-x^2+bx+1 & si\ \ x\leq 1\\ ax^2-5x+2a & si\ \ x>1\end{cases}$ es derivable. Determina los valores de a y b.

Actividad 108: (2009) Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene extremos relativos en $(0,0)\ y\ (2,2)$. Calcula a, b, c y d.

Actividad 109: (2009) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x+e^{-x}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f,* así como los extremos relativos o locales de *f.*
b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de *f.*
c) Determina las asíntotas de la gráfica de *f.*
d) Esboza la gráfica de *f.*

Actividad 110: (2009) De todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm ¿qué base tiene el de área máxima?

Actividad 111: (2010) Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.

Actividad 112: (2010) Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln\left(x^2+3x\right)$ donde ln denota logaritmo neperiano.

a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x-2y+1=0$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

Actividad 113: (2010) Sea f la función definida como $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$ $para\ \ x\neq a$.

a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.
b) Para el caso $a=2$, $b=3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

Actividad 114: (2010) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} e^x\left(x^2+ax\right) & si\ \ x\leq 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & si\ \ x>0 \end{cases}$

Calcula las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$ tiene pendiente 3.

Actividad 115: (2010) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$. Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-5$ y en el punto de abscisa $x=2$.

Actividad 116: (2010) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo? (Recuerda que el volumen del cono es: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$).

Actividad 117: (2010) Sea f la función definida como $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ $para\ \ x\neq\pm 1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
c) Esboza la gráfica de f.

Actividad 118: (2010) Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Actividad 119: (2010) Sea $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ \ 0\le x<2 \\ cx+1 & si\ \ 2\le x\le 4\end{cases}$.

a) Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0)=f(4)$, determina los valores de a, b y c.
b) Para $a=-3$, $b=4$ y $c=1$, halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Actividad 120: (2010) Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=asen(x)+bx^2+cx+d$, determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto $(0,4)$ y que la segunda derivada de f es $f''(x)=3sen(x)-10$.

Actividad 121: (2010) Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

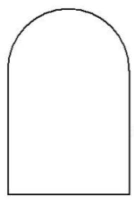
$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si\ \ x\le 0 \\ 1-x^2 & si\ \ 0<x<1 \\ \dfrac{2}{x+1} & si\ \ 1\le x\end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de f.

Actividad 122: (2011) Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

Actividad 123: (2011) Sea $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2,0)$. ¿Cuál es esa distancia?

Actividad 124: (2011) Una ventana *normanda* consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.



De entre todas las ventanas *normandas* de perímetro 10 *m*, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.

Actividad 125: (2011) Sea $f:\left[\frac{1}{e},4\right]\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)+a & si\ \ \frac{1}{e}\le x\le 2 \\ bx+1-\ln(2) & si\ \ 2<x\le 4\end{cases}$$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Calcula los valores de *a* y *b* para que f sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{e},4\right)$.

b) Para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$, halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Actividad 126: (2011) Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

Actividad 127: (2011) Sea f la función definida por $f(x)=\frac{3x^4+1}{x^3}$ *para* $x\neq 0$.

a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.
b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se alcanzan y valores que se alcanzan).

Actividad 128: (2011) Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,0)$, y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y=-3x+3$.

Actividad 129: (2011) En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y=-x^2+3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

Actividad 130: (2011) Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?

Actividad 131: (2011) En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, x, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2+70x$, mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión $\frac{400x}{x-30}$. Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.

Actividad 132: (2011) Un alambre de 100 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

Actividad 133: (2011) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=4-x^2$.

a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.
b) Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x+2y-2=0$.

11.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES

Actividad 1:

a) f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ b) g es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Actividad 2: $a=1 \ y \ b=0$

Actividad 3:

a) f es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$

b) $t: y=6x-12$
$n: y=\frac{-1}{6}x+\frac{13}{6}$

Actividad 4:

a) $y'=\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ b) $y'=4\left(x^2+x\right)^3(2x+1)$ c) $y'=\frac{-12x}{\sqrt{\left(4x^2+5\right)^3}}$ d) $y'=6e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)^2$

e) $y'=4xe^{2x^2}-e^x$ f) $y'=\frac{2x}{x^2+7}$ g) $y'=\frac{2\ln(x-2)}{x-2}$ h) $y'=\frac{2x}{\ln 2\cdot\left(x^2+1\right)}$

i) $y'=\frac{-6x^2\ln x-1+3x^2}{x\ln^2 x}$ j) $y'=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ k) $y'=\frac{-\cos x}{sen^2 x}$ l) $y'=-4x\cdot senx^2\cdot\cos x^2$

m) $y'=\frac{6e^{2x}}{e^{2x}+1}$ n) $y'=\frac{2}{1-x^2}$ ñ) $y'=\frac{2x^2-4}{x\left(x^2-1\right)}$ o) $y'=\cos x\left(\cos^2 x-2sen^2 x\right)$

p) $y'=\frac{2}{senx\cdot\cos x}$ q) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}}$ r) $y'=\frac{x^2-1}{x^2\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}$ s) $y'=\frac{\cos x}{1+sen^2 x}$

t) $y'=\frac{3\cos\left(\sqrt{\ln(1-3x)}\right)}{(6x-2)\sqrt{\ln(1-3x)}}$ u) $y'=\frac{2}{x-2}$ v) $y'=\frac{-1}{e^x-1}$ w) $y'=sen^2x\left(3\cos^2 x-sen^2 x\right)$

x) $y'=\frac{1}{1+x^2}$ y) $y'=\frac{-2sen\left(\ln\frac{x^2}{2}\right)}{x}$ z) $y'=\frac{1}{senx\cdot\cos x}$ aa) $y'=\frac{\cos 2x}{sen2x\sqrt{\ln(sen2x)}}$

ab) $y'=\frac{3x^2+2x}{4\cdot\sqrt[4]{\left(x^3+x^2\right)^3}}$ ac) $y'=\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$ ad) $y'=x^2(\cos x-senx)$

Actividad 5:

a) $f^{9)}(x)=512e^{2x}$ b) $g^{9)}(x)=\frac{3\cdot 9!}{(x-1)^{10}}$ c) $h^{9)}(x)=\frac{8!}{x^9}$

Actividad 6:

a) $y'=(senx)^x(\ln senx+x\cot gx)$ b) $y'=x^{\cos x}\left(-senx\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$ c) $y'=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}$

Actividad 7:

a) $+\infty$ b) 2 c) 1/2 d) 1/2

Actividad 8:
a) f es creciente en $(-\infty,2)$ y decreciente en $(2,+\infty)$
b) g es creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(0,2)$
c) h es creciente en $\mathbb{R}-\{-3\}$

Actividad 9:
a) f tiene un máximo relativo en $A(3,4)$
b) g tiene un máximo relativo en $A(0,5)$ y un mínimo relativo en $B(2,1)$
c) h tiene un máximo relativo en $B\left(-\sqrt{10}-3\ ,-2\sqrt{10}-6\right)$ y un mínimo relativo en $B\left(\sqrt{10}-3\ ,2\sqrt{10}-6\right)$

Actividad 10: $b=0\ \ y\ \ c=4$

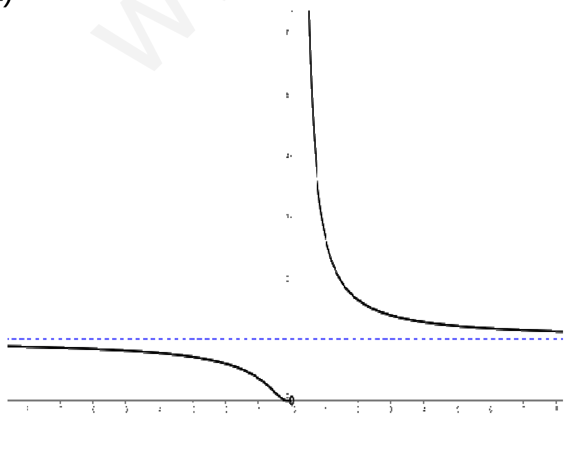
Actividad 11: La superficie máxima es de 10000 m^2, para un cuadrado de lado 100 m.

Actividad 12: 10 cm

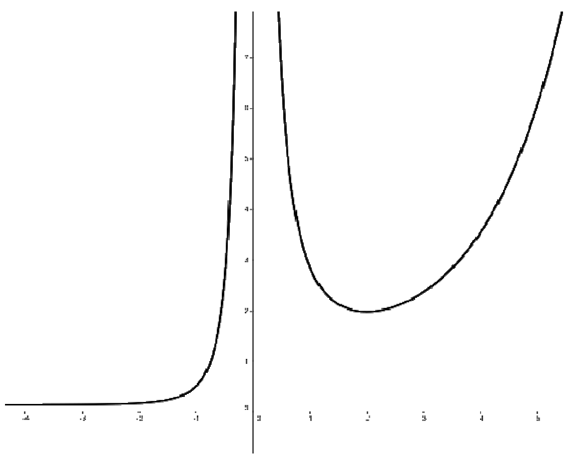
Actividad 13:
a) f es convexa en $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ y cóncava en $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$. Tiene un punto de inflexión en $A\left(\frac{3}{2},-\frac{27}{2}\right)$.
b) g es convexa en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ y cóncava en $\left(-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2}\right)$. Tiene dos puntos de inflexión en $A\left(\sqrt{2},-12\right)\ y\ B\left(\sqrt{2},-12\right)$.

Actividad 14: $y=-12x-6$

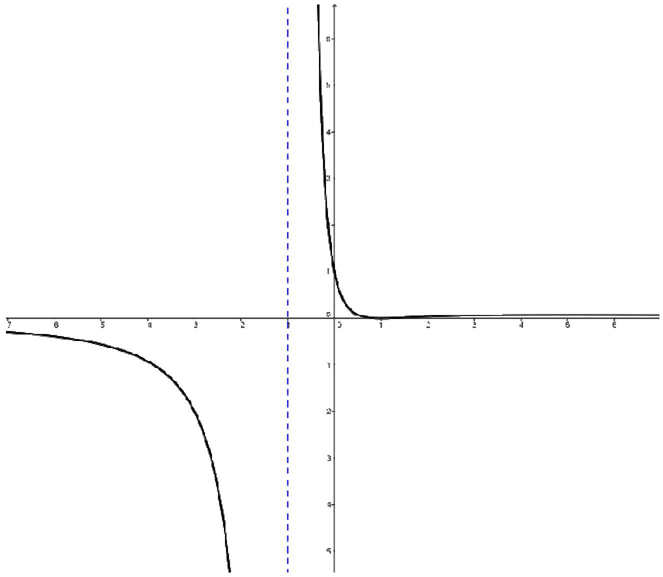
Actividad 15:
a)



b)



c)



Actividad 16:

a) f es derivable en $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, siendo $f'(x)=e^{x}\left(tg^{2}x+tgx+1\right)$.

b) g es derivable en $(-1,1)$, siendo $g'(x)=\frac{1}{x^{2}-1}$.

c) h es derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$, siendo $h'(x)=\frac{x-2+e^{\frac{1}{x-2}}(x-1)}{(x-2)\left(1+e^{\frac{1}{x-2}}\right)^{2}}$

Actividad 17:

a) $f'(x)=\frac{1}{\cos x}$

b) $g'(x)=\frac{x^{2}-1}{x^{2}\cos^{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

c) $h'(x)=\frac{-2sen\left(\ln\frac{x^{2}}{2}\right)}{x}$

d) $j'(x)=\frac{2x}{(x+1)\left(x^{2}+1\right)}$

Actividad 18:

a) $f'(x)=x^{x^{2}}(2x\ln x+x)$

b) $g'(x)=(2-x)^{x}\left[\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}\right]$

Actividad 19: Es derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$, presentando, para $x=0$ y $x=1$, puntos angulosos.

Actividad 20:

a) f y j

b) $g'(x)$

c) $f'(x)$

Actividad 21: La del apartado a)

Actividad 22: La del apartado b)

Actividad 23:

a) $\begin{cases} t: y = 4x + 2 \\ n: y = \dfrac{-1}{4}x + \dfrac{21}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} t: y = -3x + 3 \\ n: y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Actividad 24: El punto es $(6,-4)$

Actividad 25: Los puntos son $A(2,2)\ y\ B(-2,6)$, y sus tangentes respectivas: $t_A: y = 3x - 4 \quad y \quad t_B: y = -5x - 4$.

Actividad 26: $a = 1/e$

Actividad 27: $a = 1$; $b = 0$ y $c = 1$

Actividad 28:

a) $a = 1/2$
b) Es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, presentando, para $x = 0$, un punto anguloso.

Actividad 29: $a = -2$ y $b = -2$

Actividad 30: $a = -1$ y $f'(0) = 0$

Actividad 31: $a = -3/2$, $b = 1/2$ y $c = -2$

Actividad 32:

a) $t: y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9}$ b) $A\left(\dfrac{16}{5}, 0\right)$ c) $C\left(1, \dfrac{-22}{9}\right)$

Actividad 33:

a) $f(0) = 0$ y $a = 0$ b) $f'(0) = -1$ y $F'(0) = 0$

Actividad 34:

a) 2 b) 1/2 c) 0 d) 0 e) $-4/\pi$ f) 2

Actividad 35:

a) El límite en $-\infty$ vale 0 y el límite en $+\infty$ vale $+\infty$.

b) Es estrictamente creciente en $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-4,0)$. Presenta un mínimo relativo en $O(0,0)$ y un máximo relativo en $A\left(-4,16/e^2\right)$

Actividad 36:

a) $Dom(f)=(0,100)$
b) Es estrictamente creciente en $(17.8,100)$ y estrictamente decreciente en $(0,17.8)$
c) Para $x=17.8$

Actividad 37:

a) f tiene un mínimo para $x=0$ y dos puntos de inflexión para $x=1$ y $x=2$.
b) g tiene un máximo para $x=1$, un mínimo para $x=3$ y un punto de inflexión para $x=2$.

Actividad 38: El equilátero de lado 10 cm.

Actividad 39: La base de la hoja 10 cm y la altura 5 cm.

Actividad 40: El punto es $A\left(2,2\sqrt{2}\right)$

Actividad 41: El radio de la base $\frac{5}{\sqrt{\pi}}cm$ y la altura es de $\frac{10}{\sqrt{\pi}}cm$.

Actividad 42: Debe dirigirse a un punto situado a 2,25 Km de la caseta.

Actividad 43: $a=-2/3 \quad y \quad b=-1/6$

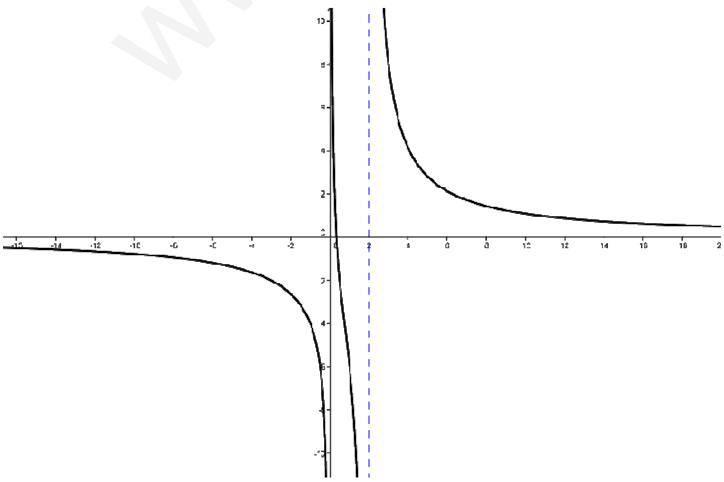
Actividad 44: $a=-3 \quad y \quad b=4$

Actividad 45: Debe cumplirse la relación $b=-2a \quad con\ a\neq 0$

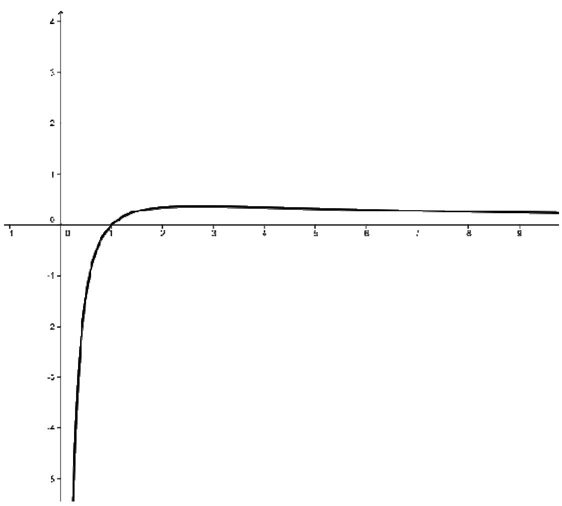
Actividad 46: El instante es tras 1 hora y 45 min, y la distancia es de 3/4.

Actividad 47:

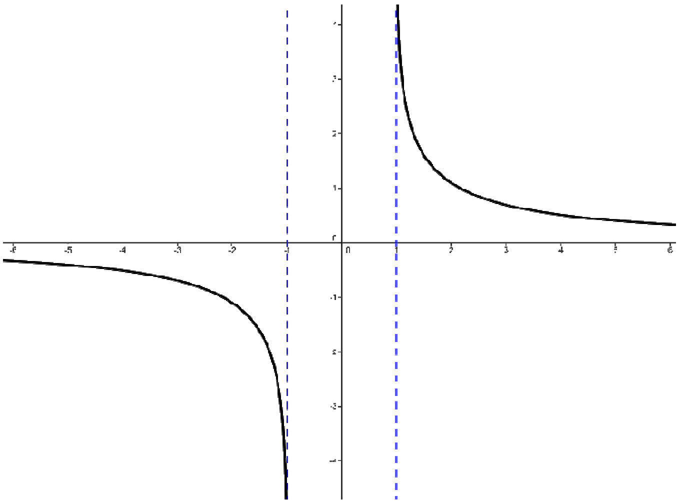
a)



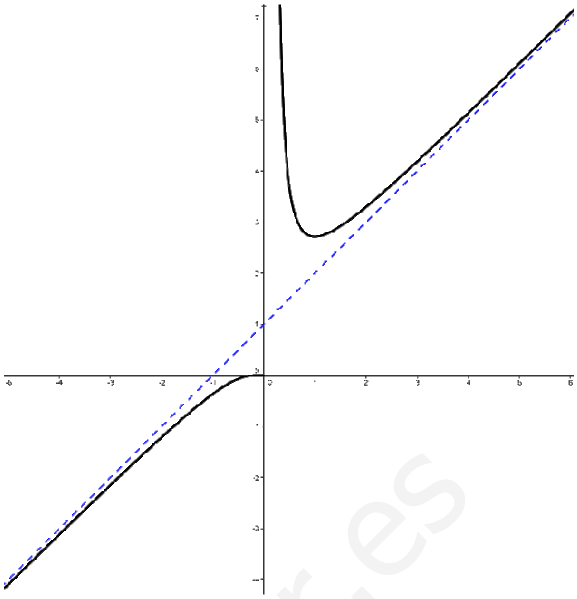
b)



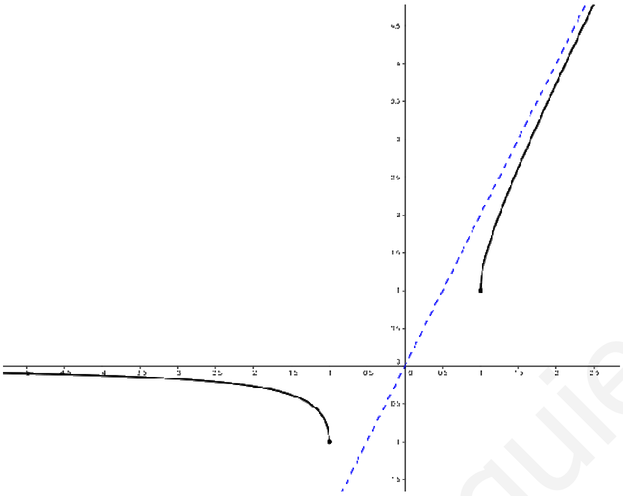
c)



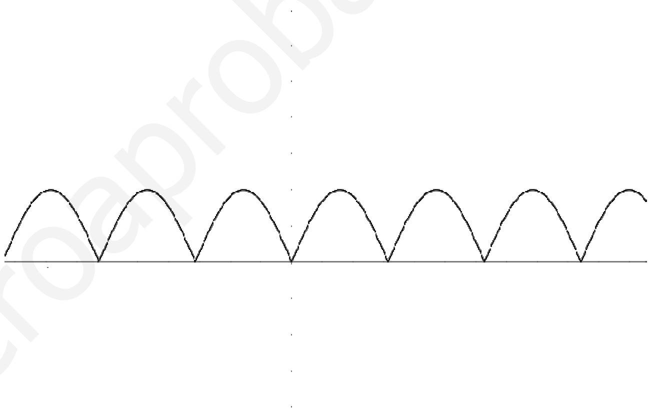
d)



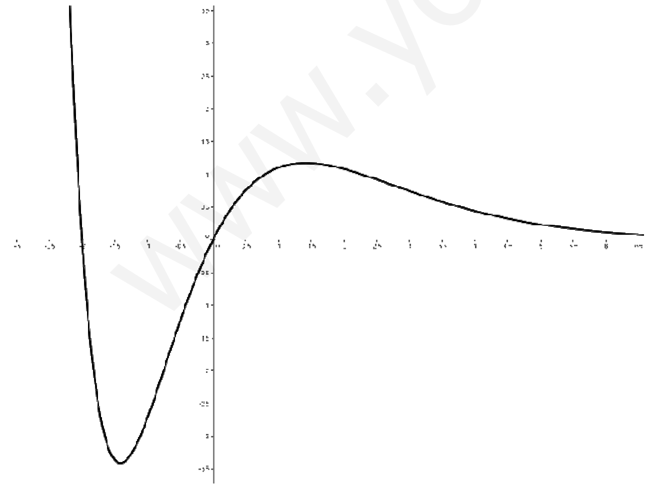
e)



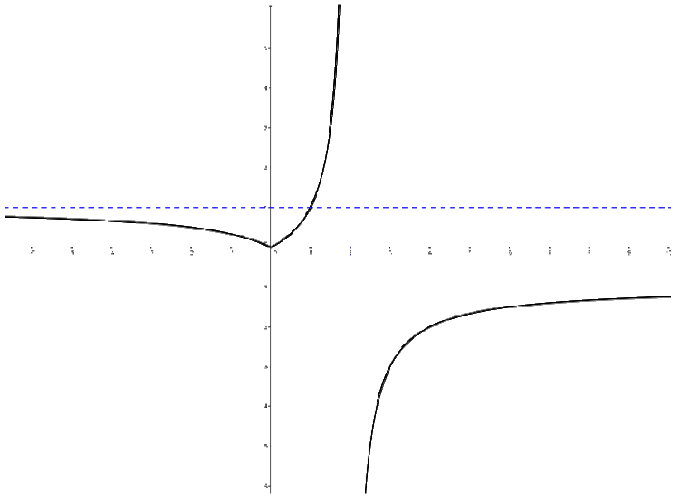
f)



g)



h)



NOTA IMPORTANTE: Las actividades de la 48 a la 133 son de Selectividad. En las dos páginas web siguientes se encuentran las soluciones de todos los exámenes de forma detallada:

- ***http://emestrada.wordpress.com/2010/02/20/matematicas-ii-problemas-selectividad-resueltos/***
- ***http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/***