DETERMINANTES

<u>Observación</u>: La mayoría de estos ejercicios se han propuesto en las pruebas de Selectividad, en los distintos distritos universitarios españoles.

---

1. Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular el valor de $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = 2(ad-bc).$$

---

2. Si B es una matriz cuadrada de dimensión 3×3 cuyo determinante vale 4, calcula el determinante de $5B$ y el de B^2.

Solución:
Por las propiedades de los determinantes se tiene:

- $|5B| = 5^3|B| \Rightarrow |5B| = 5^3 \cdot 4 = 500$.
- $|B^2| = |B| \cdot |B| = 4 \cdot 4 = 16$.

---

3. Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada A vale -1 y que el determinante de la matriz $2 \cdot A$ vale -16. ¿Cuál es el orden de la matriz A?
Solución:
Se sabe que $|k \cdot A| = k^n|A|$, para A una matriz de orden n.
Por tanto, como:

$$|2 \cdot A| = 2^n|A| = -16 = 2^n \cdot (-1) \Rightarrow n = 4.$$

La matriz será de orden 4.

---

4. Si B es la matriz inversa de A y $\det(A) = 5$, ¿cuánto vale $\det(B)$, el determinante de B?
Solución:
Se sabe que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, para A y B matrices del mismo orden.
Por tanto, como:

$$1 = |I| = |A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 5 \cdot |B| \Rightarrow |B| = \frac{1}{5}.$$

5. Demuestre, sin utilizar la regla de Sarrus y sin desarrollar directamente por una fila y/o columna, que

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

Indique en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

Solución:
Restando la fila 1ª a la segunda y tercera:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{array}\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

= 0, pues la segunda y tercera fila son proporcionales.

---

6. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$, calcule, sin utilizar la regla de Sarrus, el valor del siguiente determinante, indicando en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2}+3a & \frac{y}{2}+3b & \frac{z}{2}+3c \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2}+3a & \frac{y}{2}+3b & \frac{z}{2}+3c \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ F3-3F2 \end{array}\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \end{vmatrix} = 5\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 6 = 15$$

7. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & 8 & 27\end{pmatrix}$.

Sea *B* la matriz que resulta al realizar en *A* las siguientes transformaciones: primero se multiplica *A* por sí misma, después se cambian de lugar la fila segunda y la tercera y finalmente se multiplican todos los elementos de la segunda columna por −2. Calcular el determinante de la matriz *B*, usando para ello las propiedades de los determinantes.

Solución:
Las transformaciones y el resultado de hacer el determinante en cada caso son:

1º. $A \cdot A \Rightarrow |A\cdot A| = |A|^2$

2º. Se cambian dos filas, luego el determinante cambia de signo $\Rightarrow -|A|^2$

3º. Se multiplica una columna por −2, luego el determinante queda multiplicado por $-2 \Rightarrow$ $(-2)\cdot\left(-|A|^2\right) = 2|A|^2$

Como $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & 8 & 27\end{vmatrix} = 1(4\cdot 27-9\cdot 8)-2(27-9)+3(8-4)=12$,

se tendrá que $|B| = 2\cdot 12^2 = 288$

---

8. Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 0 & x & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 0 & 1 & x & x\end{pmatrix}$$

a) Resolver la ecuación det(*A*) = 0.
b) ¿En qué casos admite inversa la matriz *A*?
Solución:

a) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 0 & x & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 0 & 1 & x & x\end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1\\ \\ F4-F1\end{matrix}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ -1 & x & 0 & 0\\ 1 & 0 & x & 0\\ -1 & 1 & x & 0\end{vmatrix} =$

$$= -x\begin{vmatrix}-1 & x & 0\\ 1 & 0 & x\\ -1 & 1 & x\end{vmatrix} = -x(x - x\cdot 2x) = x^2(2x-1)$$

Luego:

$|A| = 0 \Rightarrow x^2(2x-1)=0 \Rightarrow x=0$ ó $x = 1/2$.

b) La matriz *A* admite inversa siempre que $\Rightarrow x \neq 0$ y $x \neq 1/2$.

9. Sea $P(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}$.

Halla dos raíces de este polinomio de grado cuatro.

Solución:
Aplicando transformaciones se tiene:

$$P(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ \\ F4-F3 \end{matrix}\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 3-x & x-3 \end{vmatrix} =$$

(Sumando la primera columna a la segunda; y la cuarta a la tercera)

$$=\begin{vmatrix} x & 1+x & 2 & 1 \\ 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & x+3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} =$$

(Desarrollando por la segunda fila)

$$= -(1-x)\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 1 \\ 6 & x+3 & 3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = -(1-x)(x-3)\left[(1+x)(x+3)-12\right].$$

Como se trata de dar dos raíces, basta con observar que P(x) = 0 cuando $x = 1$ o $x = 3$.

<u>Nota</u>: No es necesario desarrollar el determinante de forma completa, ni tampoco haber hecho las trasformaciones que hemos indicado. Bastaría con observar que si $x = 1$ o $x = 3$ el determinante tendría dos filas iguales y, por tanto, su valor sería 0.

---

10. Obtener, en función de a, b y c, el determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
Restando la primera fila a todas las demás se tiene:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \\ F4-F1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la cuarta columna: $|A| = -a\cdot b\cdot c$

11. Sea A una matriz cuadrada de orden 3.
a) Si sabemos que el determinante de la matriz $2A$ es $|2A| = 8$, ¿cuánto vale el determinante de A? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener este valor.
b) Calcula para qué valores de x se cumple que $|2A| = 8$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
a) Propiedad: Si A es una matriz cuadrada de orden n se cumple que $|kA| = k^n|A|$.
Luego, si A es de orden 3, $|kA| = k^3|A|$. Por tanto, $|2A| = 2^3|A| = 8|A|$; y como $|2A| = 8 \Rightarrow$ $|A| = 1$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$, para que $|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$

$$x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 2.$$

---

12. Supuesto que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Solución:
Utilizando las propiedades de los determinantes se tiene:

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \text{(se extrae el factor 5 de la primera fila)} = 5\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{(se introduce el 5 en la segunda fila)} = \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{(se extrae el factor } -1 \text{ de la segunda columna)} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

13. Considera $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

a) Calcula el valor de $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

b) Calcula en función de a, los determinantes de $2A$ y A^t, siendo A^t la traspuesta de A.

c) ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta.

Solución:

a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A(A-I) = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & -a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4; \quad a = -3 \\ a = 4; \quad a = -5 \end{cases}$$

La única solución común es $a = 4$.

b) $|2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^2 \qquad |A^t| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ -1 & -a \end{vmatrix} = -a^2$

c) Es evidente que no, pues $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ para cualquier valor de a.

14. Dadas las matrices $B(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $C(y)=\begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

a) Calcular el determinante de la matriz $3B(x)$ y obtener el valor de x para el que dicho determinante vale 162. (1,8 puntos).
b) Demostrar que la matriz $C(y)$ no tiene inversa para ningún valor real de y. (1,5 puntos).

Solución:
a) Haciendo transformaciones de Gauss se tiene:

$$|B(x)|=\begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-F2 \end{matrix}\begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ x+1 & -1 & 0 \\ 3x+2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$ = (desarrollando por la tercera columna) = $6[-2(x+1)-(-1)(3x+2)]=6x$.

Como la matriz B es de dimensión 3 $\Rightarrow$ $|3B(x)|=3^3|B(x)|=27\cdot 6x=162x$.

Si se desea que $|3B(x)|=162$, entonces $x=1$.

b) Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale 0. Por tanto, habrá que ver que $|C(y)|=0$.

En efecto, aplicando las propiedades de los determinantes:

$$|C(y)|=\begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} F1-2F3 \\ F2-F3 \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} -3y-3 & 3 & 0 \\ -y-1 & 1 & 0 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$ = (sacando factor común 3 de la primera fila) = $3\cdot\begin{vmatrix} -y-1 & 1 & 0 \\ -y-1 & 1 & 0 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ = 0, pues tiene dos filas iguales.

15. Sean $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \alpha\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & k & t\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Estudiar para qué valores de α y β la matriz *A* tiene inversa.
b) Calcular A^5
c) Hallar la matriz inversa de *B*.

Solución:
a) La matriz *A* no tiene inversa en ningún caso, pues su determinante siempre vale 0.

b) $A^2=\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \alpha\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \alpha\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow A^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \alpha\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^5=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

c) La matriz *B* tiene inversa, pues $|B|=1$. Su inversa es $B^{-1}=\dfrac{(B_{ij})^t}{|B|}$, siendo $\left(B_{ij}\right)$ la matriz de los adjuntos de *B*.

Esta matriz de los adjuntos es: $B_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -k & 1 & 0\\ k^2-t & -k & 1\end{pmatrix}$.

Luego, $B^{-1}=\dfrac{(B_{ij})^t}{|B|}=\begin{pmatrix}1 & -k & k^2-t\\ 0 & 1 & -k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

16. Hallar para qué valores de a es inversible la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 4+3a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ y calcular la inversa para $a=0$.

Solución:
Para que una matriz sea inversible es necesario que su determinante sea distinto de 0. Por tanto, como

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 4+3a \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-3a-4=0 \Rightarrow a=-1 \text{ o } a=4,$$

la matriz A será inversible para todo valor de $a \neq -1$ y 4.

Para a = 0, la matriz queda: $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz de sus adjuntos es: $A_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Luego, su inversa es $A^{-1}=\dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}=\dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$

17. a) Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con det(M) = −2. Calcula el valor del determinante que tiene por filas $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$.

b) Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y que verifiquen:

$$\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases}$$

siendo C^t la matriz traspuesta de C.

Solución:

Utilizando las propiedades de los determinantes se tiene:

$$\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ 2F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} = \text{(a la fila 1 se le resta la fila 2)} = 2\begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{(a la fila 3 se le suma la fila 1)} = 2\begin{vmatrix} -F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \text{(se cambia la fila 2 por la fila 1)} = +2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) = -4$$

b) $\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases} \to \text{(sumando)} \Rightarrow 2X = C + C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases} \to \text{(restando)} \Rightarrow 2Y^{-1} = C - C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo la inversa:

$$Y = \frac{1}{1/4}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(La matriz inversa de A viene dada por $A^{-1} = \frac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.)

18. a) Definición de rango de una matriz.
b) Calcular el rango de A según los valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Estudiar si podemos formar una base de $\mathbf{R}^3$ con las columnas de A según los valores del parámetro k. Indique con qué columnas.

Solución:
a) Rango de una matriz es el número de filas (o de columnas) que esa matriz tiene linealmente independientes. El rango es también el orden del mayor menor no nulo de esa matriz

b) Vamos a calcular el rango por menores; para facilitar el trabajo transformamos la matriz inicial.
A la columna 1ª le restaremos la columna 4ª: C1 − C4
A la columna 2ª: C2 − 3C4
A la columna 3ª: C3 − 3C4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ k+1 & k+3 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Obviamente hay menores de orden 2 que son distintos de cero. Por ejemplo $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$. Luego el rango, es mayor o igual que 2.

Veamos los menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k+1 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3k + 9, \text{ que es nulo si } k = 3;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k+3 & 6 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3k - 9, \text{ que vale 0 si } k = -3$$

Por tanto, el rango de A siempre será 3. (Si $k = 3$, el 2º menor es distinto de cero; si $k = -3$, el primer menor es distinto de cero; si $k \neq \pm 3$, ambos menores son no nulos.)

A partir de la respuesta anterior podemos dar dos soluciones.
1.ª Si $k \neq 3$, las columnas 1ª, 3ª y 4ª forman base de $\mathbf{R}^3$.
2.ª Si $k \neq -3$, las columnas 2ª, 3ª y 4ª forman base de $\mathbf{R}^3$.

Nota. Puede verse que hay otra posibilidad: con las columnas 1ª, 2ª y 4ª si $k \neq -3/2$.
(No es posible formar base con las columnas 1ª, 2ª y 3ª.)

19. Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbf{R}$.

¿Para qué valores del parámetro $\lambda \in \mathbf{R}$ tiene inversa la matriz A? (No se pide hallarla.)

Solución:

Si se suma la fila 2ª a la 3ª,

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 0 & 2\lambda-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo el determinante se tiene: $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 0 & 2\lambda-1 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda(2\lambda-1)$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0$ y 1/2, el rango de A es 3, pues $|A| \neq 0$.
- Si $\lambda = 0$, el rango es A es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.
- Si $\lambda = 1/2$, el rango es A es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

En consecuencia, y como una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de 0, la matriz A tendrá inversa para todo valor de $\lambda \neq 0$ y 1/2.

20. a) Calcula el rango de la matriz *A,* según los valores del parámetro *a*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Escribe las propiedades del rango que hayas usado.

Solución:

a) <u>Definición</u>. Rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo; y es igual al número de filas linealmente independiente de la matriz. También es igual al número de columnas linealmente independientes de dicha matriz.

Como puede observarse la tercera fila de la matriz *A* es proporcional a la segunda: $F3 = \frac{3}{2}F2$; por tanto puede suprimirse para el cálculo del rango.

Esto es, $rango(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Ahora vemos que los menores que se forman con las tres primeras columnas son nulos, pues ambas columnas son proporcionales.

Formamos un menor de orden 2 con la cuarta columna.

Como

$$\begin{vmatrix} 3 & a \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 6a \Rightarrow \text{Valdrá 0 cuando } a = 4\text{; y será distinto de 0 si } a \neq 4.$$

Por tanto:

Si $a \neq 4$ el rango de *A* es 2.
Si $a = 4$ el rango es 1.

b) Se han ido indicando en el apartado a).

21. Discutir, en función del número real *m*, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

Haciendo su determinante se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 6 = -(m-3)(m+2)$$

Por tanto:

Si $m \neq -2$ y 3, como $|A| \neq 0$, el rango de A es 3.

Si $m = -2$, se tiene que $|A| = 0$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ tendrá rango 2. (Puede verse que tiene un menor de orden 2 no nulo.)

Si $m = 3$, $|A| = 0$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2 pues varios menores de orden 2 son distintos de 0.

22. Calcular una matriz cuadrada *X* sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:
Se despeja la matriz *X*:

$$XA^2 + BA = A^2 \Rightarrow XA^2 = A^2 - BA \Rightarrow \left(XA^2\right)A^{-1}\cdot A^{-1} = \left(A^2 - BA\right)A^{-1}\cdot A^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = I - BA^{-1}$$

Calculo de la inversa de *A*: $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$.

Como $|A| = 1$, y la matriz de los adjuntos es $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X = I - BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

23. Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

Solución:

Cálculo del rango por menores.

El rango al menos es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$.

Veamos qué debe pasar para que sea 3. Para ello estudiamos los menores de orden 3.

El menor $A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{vmatrix} = -(a+4)(a-2) = 0$ si $a = -4$ o $a = 2$.

El menor $A_2 = \begin{vmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (a+4)(3a+2) = 0$ si $a = -4$ o $a = -2/3$.

En consecuencia:

- Si $a = -4$ todos los menores de orden 3 son nulos, y el rango de A = 2.
- Si $a \neq -4$ algún menor de orden 3 es distinto de 0 $\Rightarrow$ el rango de A = 3.

---

24. Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que:

$$\det(A) = -7 \text{ y } A\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Sea A la matriz simétrica: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Con esto: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = -7$.

El producto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & 6a-3b \\ 2b-c & 6b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$\begin{cases} 2a - b = -4 \\ 2b - c = 1 \\ ac - b^2 = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2 + b/2 \\ c = 2b - 1 \\ ac - b^2 = -7 \end{cases} \rightarrow (-2 + b/2)(2b-1) - b^2 = -7$$

De donde: $b = 2$; $a = -1$, $c = 3$.

La matriz pedida es: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

25. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.
b) Determina los valores de λ para los que la matriz *B* tiene inversa.
c) Calcula B^{-1} para λ = 1.

Solución:

a) $B = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & -1-2\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

b) Para que la matriz B tenga inversa es necesario y suficiente que su determinante sea distinto de 0.

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & -1-2\lambda+\lambda^2 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda + 3.$$

Como $-\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ si $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$, para los valores de $\lambda \neq -1$ y 3 la matriz *B* tendrá inversa.

Si λ = 1, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Su inversa, $B^{-1} = \frac{(B_{ij})^t}{|B|} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

26. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 1 & a & 1 & 1+a\end{pmatrix}$

a) Estudia, en función de a, el rango de las matrices A y B. (1 punto)
b) Calcula, para $a=-1$, la matriz X que verifica $A\cdot X=B$. (1,5 puntos)

Solución:

a) Como sabemos, el rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo. También es igual al número de filas o columnas que dicha matriz tiene linealmente independientes. Por tanto, en los dos casos, el rango no puede ser mayor que 3.

El rango es mayor o igual que 2, pues el menor $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Para ver si puede ser 3 hacemos su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=1+2a \quad\Rightarrow\quad |A|=0 \text{ cuando } a=-1/2$$

Por tanto: si $a\neq -1/2$, el rango de A es 3; y si $a=-1/2$, su rango es 2.

Como la matriz B es una ampliación de la matriz A, consideramos otro de los menores de orden 3, $|M|=\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}=-2(a-1)-3=-1-2a$. Este menor también se anula para $a=-1/2$.

En consecuencia: si $a\neq -1/2$, el rango de B es 3; y si $a=-1/2$, su rango es 2.
Nota: Podría observarse que C4 = C2 + C3.

b) Para $a=-1$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $|A|=-1$. Como $|A|\neq 0$, la matriz A tiene inversa. En consecuencia: $A\cdot X=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$.

La matriz inversa viene dada por $A^{-1}=\dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A, que es: $A_{ij}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$. Luego $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -2\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -2\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

27. A cada matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se le asocia el polinomio $p(x)=x^2+(a+d)x+|A|$, donde $|A|$ indica el determinante de *A*. Diremos que $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz A. Se pide:

a) Encontrar una matriz que tenga como polinomio característico $p(x)=x^2+x+1$. ¿Cuántas matrices hay con ese mismo polinomio característico?

b) Si *A* tiene inversa, demostrar que el polinomio característico de la inversa, A^{-1}, es $p(x)=x^2-\frac{a+d}{|A|}x+\frac{1}{|A|}$.

Solución:

<u>Observación</u>:

De la lectura del enunciado se deduce que al escribir el polinomio característico se ha debido cometer un error (una errata), pues por definición

$$p(x)=\begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix}==(a-x)(d-x)-bc=x^2-(a+d)x+ad-bc$$

Luego $p(x)=x^2-(a+d)x+|A|$.

(Por tanto, en el enunciado se ha cambiado un signo. Este hecho no varía la respuesta del apartado a); en cambio, en el apartado b) descubriríamos que algo falla. Nosotros partimos del polinomio característico correcto.)

a) Si $p(x)=x^2+x+1 \Rightarrow \begin{cases} a+d=-1 \\ ad-bc=1 \end{cases}$. Este sistema tiene infinitas soluciones, pero por tanteo se puede hallar una de ellas. Es el caso de: $a = 1$, $d = -2$, $b = 1$ y $c = -3$.

Por tanto, la matriz pedida es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene inversa, su inversa es $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{pmatrix}$.

Por tanto, su polinomio característico será:

$$p(x)=x^2-\left(\frac{d}{|A|}+\frac{a}{|A|}\right)x+\left|A^{-1}\right|=x^2-\frac{a+d}{|A|}x+\frac{1}{|A|}$$

28. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que $\det(A^2) = (\det(A))^2$ y que $\det(A + I) = \det(A) + \det(I)$.

b) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que cumple que $\det(M^2) = (\det(M))^2$?

Razonar la respuesta.

c) Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que $\det(M + I) = \det(M) + \det(I)$

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^2) = 1$

Por otra parte, $\det(A) = -9 + 8 = -1$. Por tanto, $(\det(A))^2 = (-1)^2 = 1$.

Luego, $\det(A^2) = (\det(A))^2$

$A + I = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + I) = -8 + 8 = 0$

Por otra parte, $\det(A) + \det(I) = -1 + 1 = 0$. Por tanto, $\det(A + I) = \det(A) + \det(I)$.

b) Es una propiedad general. Si A y B son matrices cuadradas de la misma dimensión, entonces $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

En particular, $\det(M^2) = \det(M \cdot M) = \det(M) \cdot \det(M) = (\det(M))^2$

También puede demostrase tomando $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Por una parte: $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix}$, siendo su determinante:

$$\left|M^2\right| = a^2cb + a^2d^2 + b^2c^2 + bcd^2 - a^2bc - abcd - abcd - bcd^2 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$$

Por otra parte: $\left|M\right|^2 = (ad - bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$.

Evidentemente, coinciden

c) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow M + I = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M + I) = ad + a + d + 1 - cb$

Por otra parte: $\det(M) + \det(I) = ad - cb + 1$

Luego, para que $\det(M + I) = \det(M) + \det(I)$ es necesario que $a + d = 0 \Rightarrow d = -a$

Las matrices M buscadas son de la forma: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

29. Se considera el conjunto M de matrices de números reales de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a^2 + b^2 = 1$$

Demostrar que tienen inversa y calcularla (4 puntos). Demostrar también que, si se multiplican dos matrices de M, se obtiene una matriz de M (6 puntos).

Solución:

Una matriz cuadrada tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; como $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$, la matriz A tendrá inversa.

La matriz de los adjuntos es: $A_{ij} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Luego, $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Si B es otra matriz de M, $B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, se tiene:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{pmatrix}$$

que evidentemente es una matriz de M.

30. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

a) Halla la inversa de A − BC.
b) Resuelve la ecuación matricial AX − BCX = A.

Solución:
a)

$$BC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -4 & 3 & -4\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A-BC=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -4 & 3 & -4\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\det(A-BC)=-1$$

$$\mathrm{Adj}(A-BC)=\begin{pmatrix}-7 & -5 & 6\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

Luego,

$$(A-BC)^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -1 & -3\\ 5 & -1 & -2\\ -6 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

b)

$$AX-BCX=A\ \Rightarrow\ (A-BC)X=A\ \Rightarrow\ X=(A-BC)^{-1}\cdot A$$

Esto es,

$$X=\begin{pmatrix}7 & -1 & -3\\ 5 & -1 & -2\\ -6 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -13 & 21\\ 8 & -9 & 16\\ -10 & 12 & -18\end{pmatrix}$$

31. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A.
b) Calcula la matriz X que verifique la ecuación AX = B.

Solución:

a) El determinante de A vale, $|A| = -3$

La matriz de los adjuntos es: $\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Luego $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|} = \dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) AX = B $\Rightarrow$ X = A^{-1}B $\Rightarrow$ X = $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

32. Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$

a) Probar que para cualquier valor de a y b, rango A ≥ 2.
b) Determinar un par de valores reales de a y b para los cuales sea rango A = 3 y otro par de valores de a y b de forma que rango A = 4.

Solución:

a) Tomamos los menores:

$$M1 = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b+1 & a \end{vmatrix} = a^2\,;\;\; M2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b+1 & 0 \end{vmatrix} = b(b+1)\,;\;\; M3 = \begin{vmatrix} b+1 & a \\ 0 & b+1 \end{vmatrix} = (b+1)^2$$

Si $a \neq 0$, M1 $\neq 0 \;\Rightarrow\;$ r(A) ≥ 2.
Si $a = 0$ y $b = 0$, M3 $\neq 0 \;\Rightarrow\;$ r(A) ≥ 2.
Si $a = 0$ y $b = -1$, M2 $\neq 0 \;\Rightarrow\;$ r(A) ≥ 2.

Por tanto, el rango de A siempre es mayor o igual a 2.

b) $|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a^4 + b^2(b+1)^2$

El rango A = 3 si $|A| = 0$ y algún menor de orden 3 es distinto de 0.

$$|A| = 0 \Rightarrow\; -a^4 + b^2(b+1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; a^4 = b^2(b+1)^2$$

$$\Rightarrow\; a^2 = b(b+1) \text{ (hay más soluciones).}$$

Haciendo $b = 1 \;\Rightarrow\; a = \pm\sqrt{2}$; (otro par de valores puede ser: $b = -2$ y $a = \pm\sqrt{2}$).

Una posibilidad es $b = 1$ y $a = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, siendo $|A| = 0$

Como el menor $M4 = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \;\Rightarrow\;$ r(A) = 3

Para que r(A) = 4 es necesario que $|A| \neq 0$, que se cumple si $a = 0$ y $b = 1$.