Continuidad en un punto:

Se dice que una función f es continua en un punto de abscisa x=a si:

- *Existe f(a)*
- *Existe (y es finito) el* $\lim_{x \to a} f(x)$
- *El límite anterior coincide con el valor de la función*

Tipos de discontinuidades:

Evitable: la función es discontinua en a pero existe el límite en dicho punto
De salto finito: los dos límites laterales son finitos pero distintos
De salto infinito: uno de los dos límites laterales, o ambos, son infinitos, o bien carece de límites laterales.

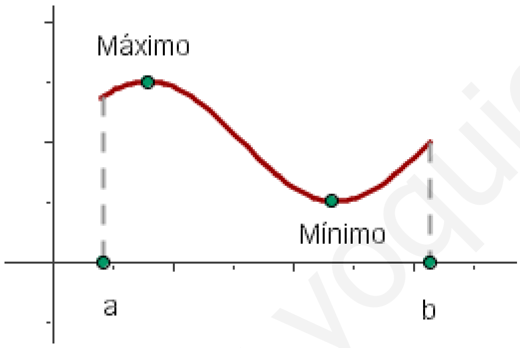
Teorema de Weierstrass:

Si una función f(x) está definida y es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f(x) alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo [a, b].

Interpretación geométrica:

Hay al menos dos puntos x_1, x_2 *pertenecientes a [a, b] donde f alcanza valores extremos absolutos:*

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \text{si } x \in [a,b]$$



El teorema de Weierstrass no nos indica donde se encuentra el máximo y el mínimo, sólo afirma que existen.

Teorema de Bolzano:

Si una función f(x) está definida en un intervalo cerrado [a, b] y es:
1º) f(x) continua en [a, b].
2º) Toma valores de distinto signo en a y en b.
Entonces, existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) tal que f(c)=0.

Interpretación geométrica:

Existe un punto del interior del intervalo en el que la función corta al eje X.

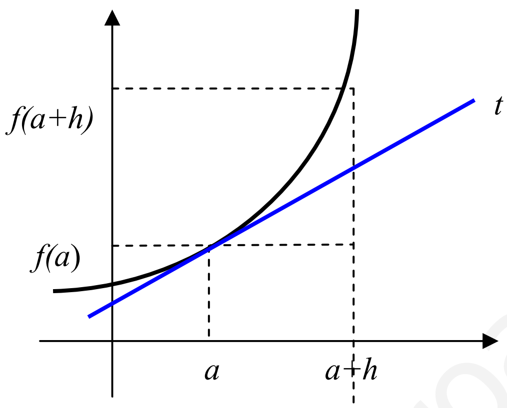
Derivada de una función en un punto:

Se llama derivada de la función f en el punto a, y se designa por f´(a), al $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *si existe y es finito.*

Si existe f´(a), se dice que f es derivable en a.

Interpretación geométrica:

La derivada de la función f en el punto a, f´(a), coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de y=f(x) en el punto (a, f(a)).



$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Derivadas laterales:

Se llama derivada por la izquierda de f en a, $f'(a^-)$*, al valor del límite:*

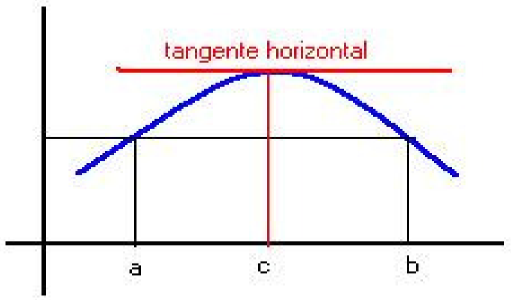
$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Se llama derivada por la derecha de f en a, $f'(a^+)$*, al valor del límite:*

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Teorema de Rolle:
Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:
a) Es continua en el intervalo cerrado [a, b]
b) Es derivable en el intervalo abierto (a, b)
c) Toma el mismo valor en los extremos del intervalo, es decir f(a) = f(b)
Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ *tal que* $f\,'(c) = 0$.

Interpretación geométrica: *Existe un punto en la curva cuya tangente es horizontal (paralela al eje X)*

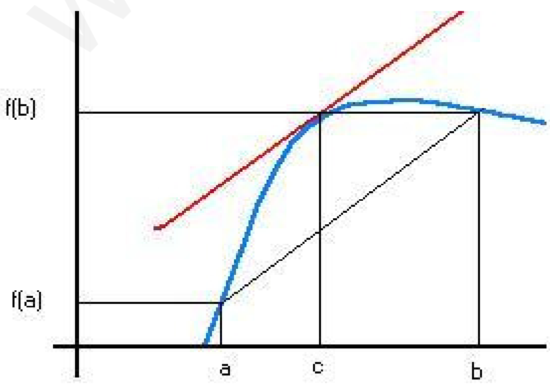


Teorema de Rolle
Hipótesis:
f es continua en [a, b]
f es derivable en (a, b)
f(a) = f(b)
Tesis:
$\exists c \in (a, b) \,/\, f\,'(c) = 0$

Teorema del valor medio del cálculo diferencial, Teorema de Lagrange o Teorema de los incrementos finitos:
Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:
- *Es continua en el intervalo cerrado [a, b]*
- *Es derivable en el intervalo abierto (a, b)*

Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ *tal que* $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Interpretación geométrica: *Existe un punto en la curva cuya tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (a,f(a)) y (b, f(b)).*



Teorema del Valor Medio
Hipótesis:
f es continua en [a, b]
f es derivable en (a, b)

Tesis:
$\exists c \in (a, b) \,/\, \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Teorema de Cauchy:

Si f y g son dos funciones continuas en [a. b] y derivables en (a, b), existe un punto c en (a, b) tal que $\dfrac{f(b)\quad f(a)}{g(b)\quad g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Ejemplo:

Halla el valor de c del intervalo (1, 4) donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy, siendo $f(x) = 3x + 2$ *y* $g(x) = x^2 + 1$

Las funciones son continuas y derivables en todo R por se funciones polinómicas

$$f'(x) = 3\,;\ f'(c) = 3$$
$$g'(x) = 2x\,;\ g'(c) = 2c$$

Valores de las funciones en los extremos del intervalo:

f(1) = 5; f(4) = 14

g(1) =2; g(4) = 17

luego $\dfrac{14-5}{17-2} = \dfrac{3}{2c} \Rightarrow \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{2c} \Rightarrow 18c = 45 \Rightarrow c = \dfrac{45}{18} = \dfrac{5}{2}\,; \quad \dfrac{5}{2} \in (1,4)$

Regla de L´Hôpital:

Es una consecuencia del teorema de Cauchy y nos permite obtener fácilmente ciertos límites que, sin esta regla, resultarían complicadísimos.
Esta regla dice:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *y existe* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *entonces se cumple que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L´Hôpital también puede ser aplicada al caso de indeterminaciones del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Este es un caso de indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ *por lo que podemos aplicar la regla:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{senx}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

La regla puede aplicarse una o más veces, mientras se mantenga la indeterminación.