1 **Calcula el dominio y recorrido de las siguientes funciones exponenciales**

a) $\mathbf{f(x) = e^{x^2-9}}$

b) $\boldsymbol{g(x) = 2^{\frac{x}{2}}}$

Solución:

a) D(f) = **R**; R(f) = **R⁺**

b) D(g) = **R**; R(g) = **R⁺**

2 **Dada la función** $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 5-x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 2x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}}$**, halla** $\boldsymbol{\lim_{x\to 2^-} f(x)}$**,** $\boldsymbol{\lim_{x\to 2^+} f(x)}$**. ¿Cuánto vale** $\boldsymbol{\lim_{x\to 2} f(x)}$**?**

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \left(5-x^2\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (2x-3) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 1$$

3 **Dada la función:**

$$\boldsymbol{y = \frac{x+2}{x^2+x-2}}$$

a) Justificar que es continua en todo R, excepto en *x* = -2 y *x* = 1.
b) Averiguar si tiene límite en *x* = -2, y, en caso afirmativo, cuánto vale.
Lo mismo en *x* = 4.

Solución:

a) La función es un cociente de dos polinomios, luego es continua en todo **R**, excepto en los puntos que anulan al denominador: $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ y $x = 1$.

b) La función se puede escribir de la forma:

$$y = \frac{x+2}{(x+2)(x-1)}$$

En los puntos en los que x distinto de -2 se cancela el factor $x + 2$ y queda :

$$y = \frac{1}{x-1}$$

y como:

$$\lim_{x\to -2} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{3}$$

resulta que la función tiene límite en x = -2, y éste vale $-\frac{1}{3}$.

En $x = 4$ la función es continua, como vimos en el apartado a, por lo tanto en este punto existe límite y es igual a $f(4)$ = $\frac{1}{3}$.

4 **Estudiar la continuidad de la función:**

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}(x-3)\mathrm{Ln}\left(x^2-x-6\right) & \text{si } x\neq 3 \text{ y } x\neq -2\\ 0 \quad \text{si} \quad x=3\\ 5 \quad \text{si} \quad x=-2\end{cases}}$$

Solución:
Como la función logaritmo neperiano solamente está definida para valores positivos, el dominio de definición de la función $f(x)$ es $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$ ya que:
$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) < 0$ si $x \in (-2, 3)$
Como las funciones polinómicas y la función logarítmica son funciones continuas resulta que $f(x)$ también será otra función continua.

Únicamente falta por estudiar la continuidad en los puntos $x = -2$ y $x = 3$.
$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(x-3)\ln\left(x^2-x-6\right)=\infty\neq f(-2)$$
La función no es continua en $x = -2$.

$$\lim_{x\to -3^+} x-3\,\ln\left(x^2-x-6\right)=\lim_{x\to -3^+}(x-3)\ln x-3+\lim_{x\to -3^+} x-3\ln(x+2)=\lim_{x\to -3^+}(x-3)\ln(x-3)=0$$
ya que la función potencial tiende más rápidamente hacia cero que la función logarítmica hacia infinito.
Por ser $f(3) = 0$ la función es continua en $x = 3$.

5 **Dada la función:**

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x<0\\ ax+b & \text{si } 0\leq x<1\\ 2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}}$$

hallar *a* y *b* para que la función sea continua.

Solución:
Por tratarse de funciones polinómicas, sólo hay duda de la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$, que son los puntos en los que cambia la forma de la función.
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2=0\\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b\\ f(0)=a\cdot 0+b=b\end{array}\right\}$$
la función será continua en $x = 0$ si $b = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2=2\\ f(1)=2\end{array}\right\}$$
la función será continua en $x = 1$ si $a + b = 2 \Rightarrow a = 2$.

6 **¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas en un entorno del punto cero?**

a) $f(x) = 2e^{-x}$

b) $f(x)=\begin{cases}-x & x\le 0\\ \ln x & x>0\end{cases}$

Solución:
a) $f(0) = 2e^{-0} = 2$
$\lim_{x\to 0} 2e^{-x} = 2$
$f(x)$ es continua.

b) $f(0) = 0$
$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
$f(x)$ es discontinua.

7 **Enuncia e interpreta geométricamente el teorema de Bolzano.**

Demuestra que la ecuación $x - \cos x = 0$ tiene solución.

Solución:
El teorema de Bolzano establece:
Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, teniendo $f(a)$ y $f(b)$ signos opuestos, es decir, $f(a)f(b) < 0$, existe al menos, un punto x_0 en (a, b) tal que $f(x_0) = 0$.
Geométricamente, el teorema de Bolzano dice que si la función f es continua en $[a, b]$, y $f(a)f(b) < 0$, la gráfica de la función corta al eje de abscisas al menos en un punto comprendido entre los puntos $(a, 0)$ y $(b, 0)$.

Sea la función dada $f(x) = x - \cos x$:
$f(0) = 0 - \cos 0 = -1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$
Al ser la función continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, según el teorema de Bolzano, existe al menos un c en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que
$f(c) = 0$. Es decir que $x - \cos x = 0$ tiene, al menos, una solución.

8 **Demostrar que la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ corta al eje de las abscisas en el intervalo $[0, 2]$.**
¿Se puede decir lo mismo de la siguiente función $g(x)=\frac{2x-3}{x-1}$?

Solución:
Por ser la función $f(x)$ una función polinómica, es continua en toda la recta real y en particular lo es en el intervalo [0, 2]. Además $f(0) = 2 > 0$; $f(2) = -2 < 0$, luego aplicando el teorema de Bolzano se puede afirmar que dicha función corta, al menos una vez, al eje de abscisas.

No se puede afirmar lo mismo de la función $g(x)$ porque no es continua en el punto 1 y no toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [0, 2].

9 **Calcular los siguientes límites de funciones irracionales:**

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

Solución:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-x} = \lim_{x\to 0} -\left(1+\sqrt{x+1}\right) = -2$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x+16}-4\right)\left(\sqrt{x+16}+4\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+9-9)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}{(x+16-16)\left(\sqrt{x+9}+3\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

10 **Estudiar en el campo real la continuidad de:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} & x \le 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$$

Solución:
Las funciones definidas en sus respectivos intervalos son continuas, tan sólo hay que estudiar el punto de unión de ambos intervalos.
Se debe comprobar si coinciden los límites laterales y si éste coincide con el valor de la función en dicho punto.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{2} = f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2+1\right) = 1$$

Al no coincidir los límites laterales, la función no es continua en 0.
Por tanto, *f* es continua en el dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbf{R} - \{0\}$.

11 **Estudiar la continuidad, el crecimiento y las asíntotas de:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}}$$

Solución:
La función es continua en $x > 0$ y $x < 0$.
En el punto 0 se tiene:
$f(0) = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

y por tanto es discontinua en $x = 0$.
La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

La función es creciente en todo **R** . No tiene asíntotas (salvo si consideramos en sentido estricto la definición de asíntota, en cuyo caso $y = x - 1$ sería asíntota).

12 **Calcular los puntos de corte de los ejes y las asíntotas de la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \ln \frac{x+1}{x+2}}$$

Solución:
Puntos de corte con los ejes :

$x = 0, \quad y = \ln\frac{1}{2}$

Asíntotas verticales:

$\frac{x+1}{x+2} = 0 \Rightarrow x = -1$

$\frac{x+1}{x+2} = \infty \Rightarrow x = -2$

Asíntotas horizontales en $y = 0$:

$\lim_{x\to\infty} \ln\frac{x+1}{x+2} = \ln 1 = 0$

No hay oblicuas.