

1 **Calcula el dominio y recorrido de las siguientes funciones exponenciales**

a) $f(x) = e^{x^2-9}$

b) $g(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

Solución:

a) $D(f) = \mathbf{R}$; $R(f) = \mathbf{R}^+$

b) $D(g) = \mathbf{R}$; $R(g) = \mathbf{R}^+$

2 **Dada la función $f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, halla $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. ¿Cuánto vale $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?**

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (5 - x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3) = 1 \end{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

3 **Dada la función:**

$$y = \frac{x+2}{x^2+x-2}$$

a) **Justificar que es continua en todo \mathbf{R} , excepto en $x = -2$ y $x = 1$.**

b) **Averiguar si tiene límite en $x = -2$, y, en caso afirmativo, cuánto vale.**

Lo mismo en $x = 4$.

Solución:

a) La función es un cociente de dos polinomios, luego es continua en todo \mathbf{R} , excepto en los puntos que anulan al denominador: $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ y $x = 1$.

b) La función se puede escribir de la forma:

$$y = \frac{x+2}{(x+2)(x-1)}$$

En los puntos en los que x distinto de -2 se cancela el factor $x + 2$ y queda :

$$y = \frac{1}{x-1}$$

y como:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{3}$$

resulta que la función tiene límite en $x = -2$, y éste vale $-\frac{1}{3}$.

En $x = 4$ la función es continua, como vimos en el apartado a, por lo tanto en este punto existe límite y es igual a $f(4)$

$$= \frac{1}{3}$$

4 **Estudiar la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)\ln(x^2 - x - 6) & \text{si } x \neq 3 \text{ y } x \neq -2 \\ 0 & \text{si } x = 3 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Solución:

Como la función logaritmo neperiano solamente está definida para valores positivos, el dominio de definición de la función $f(x)$ es $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$ ya que:

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) < 0 \text{ si } x \in (-2, 3)$$

Como las funciones polinómicas y la función logarítmica son funciones continuas resulta que $f(x)$ también será otra función continua.

Únicamente falta por estudiar la continuidad en los puntos $x = -2$ y $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x-3)\ln(x^2 - x - 6) = \infty \neq f(-2)$$

La función no es continua en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x-3 \ln(x^2 - x - 6) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) \ln x - 3 + \lim_{x \rightarrow 3^+} x-3 \ln(x+2) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) \ln(x-3) = 0$$

ya que la función potencial tiende más rápidamente hacia cero que la función logarítmica hacia infinito.

Por ser $f(3) = 0$ la función es continua en $x = 3$.

5 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

hallar a y b para que la función sea continua.

Solución:

Por tratarse de funciones polinómicas, sólo hay duda de la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$, que son los puntos en los que cambia la forma de la función.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \\ f(0) = a \cdot 0 + b = b \end{array} \right\}$$

la función será continua en $x = 0$ si $b = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2 \\ f(1) = 2 \end{array} \right\}$$

la función será continua en $x = 1$ si $a + b = 2 \Rightarrow a = 2$.

6 ¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas en un entorno del punto cero?

a) $f(x) = 2e^{-x}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$

Solución:

a) $f(0) = 2e^{-0} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2e^{-x} = 2$$

$f(x)$ es continua.

b) $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$f(x)$ es discontinua.

7 Enuncia e interpreta geoméricamente el teorema de Bolzano.

Demuestra que la ecuación $x - \cos x = 0$ tiene solución.

Solución:

El teorema de Bolzano establece:

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, teniendo $f(a)$ y $f(b)$ signos opuestos, es decir, $f(a)f(b) < 0$, existe al menos, un punto x_0 en (a, b) tal que $f(x_0) = 0$.

Geoméricamente, el teorema de Bolzano dice que si la función f es continua en $[a, b]$, y $f(a)f(b) < 0$, la gráfica de la función corta al eje de abscisas al menos en un punto comprendido entre los puntos $(a, 0)$ y $(b, 0)$.

Sea la función dada $f(x) = x - \cos x$:

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Al ser la función continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, según el teorema de Bolzano, existe al menos un c en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

tal que

$f(c) = 0$. Es decir que $x - \cos x = 0$ tiene, al menos, una solución.

8 Demostrar que la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ corta al eje de las abscisas en el intervalo $[0, 2]$.

¿Se puede decir lo mismo de la siguiente función $g(x) = \frac{2x-3}{x-1}$?

Solución:

Por ser la función $f(x)$ una función polinómica, es continua en toda la recta real y en particular lo es en el intervalo $[0, 2]$. Además $f(0) = 2 > 0$; $f(2) = -2 < 0$, luego aplicando el teorema de Bolzano se puede afirmar que dicha función corta, al menos una vez, al eje de abscisas.

No se puede afirmar lo mismo de la función $g(x)$ porque no es continua en el punto 1 y no toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[0, 2]$.

9 Calcular los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+16} - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{x+1})}{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{x+1})}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} -(1 + \sqrt{x+1}) = -2$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+16} - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9} - 3)(\sqrt{x+9} + 3)(\sqrt{x+16} + 4)}{(\sqrt{x+16} - 4)(\sqrt{x+16} + 4)(\sqrt{x+9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+9-9)(\sqrt{x+16} + 4)}{(x+16-16)(\sqrt{x+9} + 3)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+16} + 4)}{(\sqrt{x+9} + 3)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$

10 Estudiar en el campo real la continuidad de:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \frac{e^x + 1}{x^2 + 1} & x > 0 \end{cases}$$

Solución:

Las funciones definidas en sus respectivos intervalos son continuas, tan sólo hay que estudiar el punto de unión de ambos intervalos.

Se debe comprobar si coinciden los límites laterales y si éste coincide con el valor de la función en dicho punto.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

Al no coincidir los límites laterales, la función no es continua en 0.

Por tanto, f es continua en el dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbf{R} - \{0\}$.

11 **Estudiar la continuidad, el crecimiento y las asíntotas de:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

Solución:

La función es continua en $x > 0$ y $x < 0$.

En el punto 0 se tiene:

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

y por tanto es discontinua en $x = 0$.

La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

La función es creciente en todo \mathbf{R} . No tiene asíntotas (salvo si consideramos en sentido estricto la definición de asíntota, en cuyo caso $y = x - 1$ sería asíntota).

12 **Calcular los puntos de corte de los ejes y las asíntotas de la función:**

$$f(x) = \ln \frac{x+1}{x+2}$$

Solución:

Puntos de corte con los ejes :

$$x = 0, \quad y = \ln \frac{1}{2}$$

Asíntotas verticales:

$$\frac{x+1}{x+2} = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\frac{x+1}{x+2} = \infty \Rightarrow x = -2$$

Asíntotas horizontales en $y = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+1}{x+2} = \ln 1 = 0$$

No hay oblicuas.